

PARZIALE A

Esercizio n° 1

$$(x^2 - 3x - 18) \cdot (x^2 - 4) \geq 0$$

Posto:

$F_1 = (x^2 - 3x - 18)$ ed $F_2 = (x^2 - 4)$, la disequazione sopra risulta del tipo: $F_1 \cdot F_2$.

Studiamo, dunque, il segno di F_1 ed F_2 :

$$F_1 \geq 0 \Rightarrow (x^2 - 3x - 18) \geq 0$$

Equazione associata:

$$(x^2 - 3x - 18) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} \Rightarrow x_1 = -3, \quad x_2 = 6.$$

$$F_1 \geq 0 \Rightarrow (x^2 - 3x - 18) \geq 0 \text{ per } x \leq -3 \cup x \geq 6.$$

Studiamo, ora il segno di F_2 :

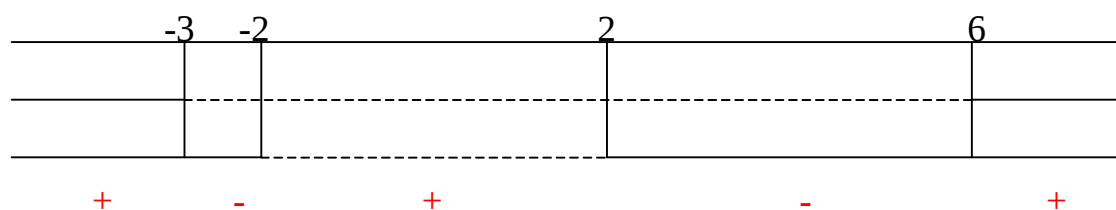
Si tratta di un binomio particolare e precisamente di una differenza tra quadrati:

$(x^2 - 4) = (x - 2) \cdot (x + 2)$; se valutiamo dunque l'equazione associata, notiamo, facilmente che le soluzioni sono :

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 2.$$

$$F_2 \geq 0 \Rightarrow (x^2 - 4) \geq 0 \text{ per } x \leq -2, \quad x \geq 2.$$

Applicando la regola dei segni, otteniamo la soluzione finale:



$$\mathbf{S: }]-\infty; -3] \cup [-2; 2] \cup [6; +\infty[$$

Esercizio n° 2

$$\frac{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+4)^7}{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x-1)^3 \cdot (x+6)} > 0$$

Si tratta di una disequazione razionale fratta, (ossia rapporto di polinomi), avente tutte le radici distinte, possiamo, dunque applicare il metodo veloce:

Siamo nel caso in cui compaiono potenze con esponenti pari e dispari, per cui disponiamo su di una retta nell'ordine naturale le radici sia del numeratore che del denominatore, prestando particolare attenzione agli elementi visibili, ossia a quelle radici che compaiono con esponente dispari:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} - & & \textbf{-6} & & + & & \textbf{-4} & & - & & \textbf{-1/2} & & + & & \textbf{-1/3} & & + & & \textbf{1} & & - & & \textbf{2} & & + \end{array}$$

I numeri in grassetto corrispondono agli elementi **visibili**, che fanno cambiare il segno alla disequazione, $-\frac{1}{3}$ è un elemento **invisibile** (compare, cioè, con esponente pari) e lascia invariato il segno.

Per cui la soluzione è:

$$\text{S: }]-\textbf{6};-\textbf{4}[\cup]-\frac{1}{2};-\frac{1}{3}[\cup]-\frac{1}{3};\textbf{1}[\cup]\textbf{2};+\infty[$$

Esercizio n° 3

$$\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x+1} < 0$$

Si tratta di una disequazione razionale fratta del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ è una biquadratica e $D(x)$ un binomio di I grado.

Procediamo, in modo classico, ponendo:

$$N(x) > 0$$

L'equazione associata è:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0, \text{ ponendo } x^2 = t, \text{ diventa:}$$

$$t^2 - 13t + 36 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 4, t_2 = 9.$$

Posso dunque scrivere $N(x)$ come prodotto di due fattori F_1 ed F_2 :

$$N(x) = (t - 9) \cdot (t - 4) = (x^2 - 9) \cdot (x^2 - 4)$$

$$F_1 = (x^2 - 9) = (x + 3) \cdot (x - 3) \geq 0 \quad \text{per valori esterni, ossia per } x \leq -3 \cup x \geq 3.$$

$$F_2 = (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \geq 0 \quad \text{per valori esterni, ossia per } x \leq -2 \cup x \geq 2.$$

$$D(x) > 0$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1.$$

Applicando la regola dei segni, si ha:

-3	-2	-1	0	2	3
-	+	-	+	-	+

Dobbiamo, ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è negativa, per cui la soluzione è:

$$\mathbf{S: }]-\infty; -3[\cup]-2; -1[\cup]2; 3[$$

Esercizio n° 4

Data la seguente matrice

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

calcolarne il determinante e, se possibile, trovarne l'inversa A^{-1} .

Svolgimento:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-2) - 2(-2) = 6$$

Poiché $\det A \neq 0$, è possibile trovarne l'inversa A^{-1} . Andiamo a calcolarla con il metodo dei complementi algebrici:

$$M_{11} = -2 \quad M_{21} = 4 \quad M_{31} = -2$$

$$M_{12} = 2 \quad M_{22} = 2 \quad M_{32} = -1$$

$$M_{13} = 2 \quad M_{23} = -4 \quad M_{33} = -1$$

$$\Rightarrow M = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow M^t = \begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} M^t = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

Esercizio n° 5

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 11 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

calcolarne il rango con il metodo delle matrici ridotte.

Svolgimento:

Dobbiamo trovare un elemento speciale per ogni riga (elemento sotto il quale ci sono tutti zeri); il rango sarà dato dal numero degli elementi speciali.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 11 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 11 & 4 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $r(A) = 3$.

Il $r(A)$ può essere al massimo 3 perché $r(A) \leq \min\{3, 4\} = 3$.

Esercizio n° 1

Posto:

Studiamo, dunque, il segno di F_1 ed F_2 :

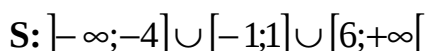
Equazione associata:

Studiamo, ora il segno di F_2 :

Si tratta di un binomio particolare e precisamente di una differenza tra quadrati:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Applicando la regola dei segni, otteniamo la soluzione finale:



Esercizio n° 2

$$\frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^3 \cdot (x+1) \cdot (x-2)^6}{\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 \cdot (x+2)^4} > 0$$

Si tratta di una disequazione razionale fratta, (ossia rapporto di polinomi), avente tutte le radici distinte, possiamo, dunque applicare il metodo veloce:

Siamo nel caso in cui compaiono potenze con esponenti pari e dispari, per cui disponiamo su di una retta nell'ordine naturale le radici sia del numeratore che del denominatore, prestando particolare attenzione agli elementi visibili, ossia a quelle radici che compaiono con esponente dispari:

$$\begin{array}{cccccccccccc} + & -2 & + & -1 & - & -1/8 & - & 1/4 & + & 2 & + \\ \hline \end{array}$$

I numeri in grassetto corrispondono agli elementi **visibili**, che fanno cambiare il segno alla disequazione, mentre gli altri sono elementi **invisibili** (compaiono, cioè, con esponente pari) e lasciano invariato il segno.

Per cui la soluzione è:

$$\mathbf{S:]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]\frac{1}{4}; 2[\cup]2; +\infty[}$$

Esercizio n° 3

$$\frac{x^4 - 7x^2 + 12}{x + 1} < 0$$

Si tratta di una disequazione razionale fratta del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ è una biquadratica e $D(x)$ un binomio di I grado.

Procediamo, in modo classico, ponendo:

$$N(x) > 0$$

L'equazione associata è:

$$x^4 - 7x^2 + 12 = 0, \text{ ponendo } x^2 = t, \text{ diventa:}$$

$$t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow t_1 = 4, t_2 = 3.$$

Posso dunque scrivere $N(x)$ come prodotto di due fattori F_1 ed F_2 :

$$N(x) = (t - 4) \cdot (t - 3) = (x^2 - 4) \cdot (x^2 - 3)$$

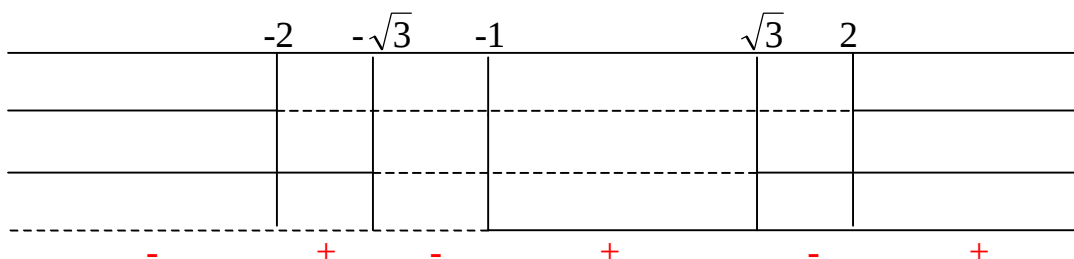
$$F_1 = (x^2 - 4) = (x + 2) \cdot (x - 2) \geq 0 \quad \text{per valori esterni, ossia per } x \leq -2 \cup x \geq 2.$$

$$F_2 = (x^2 - 3) = (x + \sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3}) \geq 0 \quad \text{per valori esterni, ossia per } x \leq -\sqrt{3} \cup x \geq \sqrt{3}.$$

$$D(x) > 0$$

$$x+1>0 \Rightarrow x>-1.$$

Applicando la regola dei segni, si ha:



Dobbiamo, ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è negativa, per cui la soluzione è:

$$\mathbf{s}:]-\infty; -2[\cup]-\sqrt{3}; -1[\cup]\sqrt{3}; 2[$$

Esercizio n° 4

Data la seguente matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

calcolarne il determinante e, se possibile, trovarne l'inversa A^{-1} .

Svolgimento:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1(2) = -3$$

Poiché $\det A \neq 0$, è possibile trovarne l'inversa A^{-1} . Andiamo a calcolarla con il metodo dei complementi algebrici:

$$M_{11} = -1 \quad M_{21} = 2 \quad M_{31} = 2$$

$$M_{12} = -1 \quad M_{22} = -1 \quad M_{32} = -1$$

$$M_{13} = 1 \quad M_{23} = -2 \quad M_{33} = 1$$

$$\Rightarrow M = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \Rightarrow M^t = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} M^t = \frac{1}{-3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

Esercizio n° 5

Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -11 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolarne il rango con il metodo delle matrici ridotte.

Svolgimento:

Dobbiamo trovare un elemento speciale per ogni riga (elemento sotto il quale ci sono tutti zeri); il rango sarà dato dal numero degli elementi speciali.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -11 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ -6 & 6 & -7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 1 \\ 8 & -11 & 2 & 0 \\ -6 & 6 & -7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 & 1 \\ 8 & -11 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -16 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi $r(A) = 3$.

Il $r(A)$ può essere al massimo 3 perché $r(A) \leq \min\{3, 4\} = 3$.