

1. Operazioni finanziarie

Si definisce operazione finanziaria (O.F.) ogni operazione relativa ad impegni monetari e si definisce operazione finanziaria elementare uno scambio, tra due individui, di capitali diversi. Quindi una O.F. avviene tra due operatori economici ognuno dei quali assume un impegno finanziario. Una volta che lo scambio viene accettato dalle due parti si può ritenere che lo scambio stesso porti beneficio ad entrambi i contraenti.

Una operazione finanziaria può essere:

- a) **certa** quando è caratterizzata da importi a scadenza fissa;
- b) **aleatoria** quando prevede lo scambio di importi monetari esigibili a scadenze diverse, essendo gli importi e le scadenze aleatorie.

Nella maggior parte dei casi di O.F. si configura la cessione di un capitale in uso ad altra persona, cioè nella cosiddetta operazione di prestito di denaro. Colui che presta il denaro si dice *mutuante* ed è il creditore del prestito, mentre colui che riceve il prestito si dice *mutuatario* e rappresenta il debitore del prestito. La somma prestata viene detta *capitale*.

In tale operazione il debitore si obbliga a restituire, alla scadenza t , il capitale C avuto in uso pagando inoltre una somma I , detta *interesse*, quale compenso per l'uso del capitale. Diamo quindi la seguente

Definizione: Si definisce *interesse* il compenso che viene corrisposto a colui che concede ad altri l'uso di un proprio capitale per un certo periodo di tempo.

L'uso di un capitale altrui non trova origine solo in operazioni di prestito: esso può anche derivare da un ritardato pagamento (interessi di mora). In ogni caso l'interesse è direttamente proporzionale al tempo di uso ed all'entità della somma. Generalmente il compenso viene pattuito in un *tot per cento* del capitale per ogni unità di tempo di impiego (che di solito è l'anno ma che può essere anche il semestre, il quadrimestre, ecc.). La misura di tale interesse si dice *tasso percentuale annuo* (che indicheremo con r), oppure semestrale, oppure quadrimestrale, ecc., cioè ci si riferisce all'unità di tempo pattuita per il pagamento.

Il tasso di interesse, anziché essere indicato in percentuale di capitale, può anche essere definito in misura unitaria (cioè riferito all'unità monetaria); in tal caso esso si dirà *tasso unitario annuo* (che indicheremo con i), o semestrale, o quadrimestrale, ecc.

La relazione che lega il tasso percentuale e quello unitario è pertanto la seguente:

$$i = \frac{r}{100}.$$

In generale faremo riferimento al tasso unitario.

2. Capitalizzazione

Si dice *capitalizzazione* il procedimento mediante il quale l'interesse prodotto da un certo capitale viene aggiunto al capitale stesso.

Le forme più comuni di capitalizzazione sono due, e precisamente:

- a) **Capitalizzazione semplice.** In questo caso l'interesse viene calcolato per tutto il periodo di impiego sulla somma in uso, cioè esso viene aggiunto al capitale soltanto alla fine del periodo di impiego.
- b) **Capitalizzazione composta.** Si ha quando l'interesse prodotto dal capitale impiegato si aggiunge al capitale stesso alla fine di ciascuna unità di tempo di impiego e diventa a sua volta fruttifero di interessi insieme al capitale originario.

La somma del capitale con gli interessi prodotti durante il tempo di impiego si dice *montante* in contrapposizione al capitale originariamente impiegato che viene detto *valore iniziale*. Si ha quindi:

$$M = C + I.$$

3. Interesse semplice

Si dice che un prestito è fatto ad interesse semplice quando l'interesse è proporzionale al capitale impiegato ed al tempo.

Per calcolare l'interesse semplice, indichiamo con C il capitale originariamente impiegato, con i il tasso unitario di interesse e con t il tempo di impiego. Essendo i l'interesse di 1€ per unità di tempo, è ovvio che l'interesse del capitale C , che indichiamo con I , sarà, dopo una unità di tempo, dato da:

$$I = C \cdot i$$

e dopo t unità:

$$I = C \cdot i \cdot t.$$

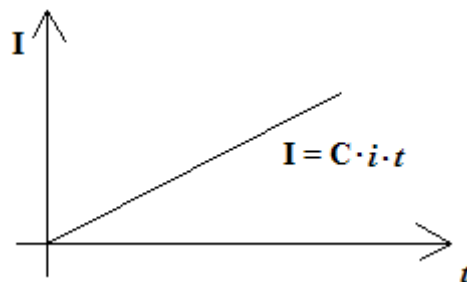
Possiamo quindi affermare che *l'interesse semplice è dato dal prodotto del capitale impiegato per il tasso unitario e per il tempo di impiego*.

Il periodo di impiego può essere un numero intero di anni, oppure di mesi, oppure di giorni. In ogni caso deve essere misurato in unità corrispondenti a quella cui si riferisce il tasso. Cioè, se il tasso è annuale il tempo deve essere espresso in anni, se il tasso è semestrale il tempo deve essere espresso in semestri, ecc.

Dalla formula fondamentale $I = C \cdot i \cdot t$ si ricavano le formule per risolvere i problemi inversi. Si ha:

$$C = \frac{I}{i \cdot t}, \quad i = \frac{I}{C \cdot t}, \quad t = \frac{I}{C \cdot i}.$$

L'interesse semplice è una funzione del tempo di impiego. Infatti esso è una grandezza variabile in dipendenza del tempo di impiego. Questa funzione è una funzione lineare (cioè graficamente rappresenta una retta). Infatti, se costruiamo un sistema di assi cartesiani riportando in ascissa il tempo di impiego ed in ordinate l'interesse, si ha una equazione dello stesso tipo della $y = kx$, cioè di una retta passante per l'origine:



Questa retta passa per l'origine degli assi poiché al tempo $t = 0$ gli interessi non sono stati sicuramente maturati; è una funzione crescente in quanto l'interesse cresce al crescere del tempo. Il suo coefficiente angolare, cioè la sua inclinazione rispetto al verso positivo dell'asse x , è dato dal fattore $C \cdot i$, cioè il coefficiente angolare dipende dal valore del capitale iniziale e dal tasso unitario di interesse. La linea che rappresenta l'interesse semplice è sempre situata nel primo quadrante perché, ovviamente, l'interesse ha sempre valore positivo.

3. Montante

Abbiamo detto che il montante di un capitale è costituito dal capitale iniziale aumentato dell'interesse maturato durante il periodo di impiego. Indicando il montante con M , si ha:

$$M = C + I,$$

$$M = C + C \cdot i \cdot t$$

e quindi:

$$M = C(1 + i \cdot t).$$

Possiamo quindi dire che il montante di un capitale, in regime di capitalizzazione semplice, è dato dal prodotto del capitale iniziale C per l'espressione $(1 + i \cdot t)$. Tale espressione equivale al montante di un euro impiegato al tasso unitario i dopo t unità di tempo e viene detta **fattore di capitalizzazione semplice** in quanto

rappresenta il coefficiente per il quale deve essere moltiplicato il capitale per ottenere direttamente il montante.

Dalla formula precedente, per risolvere i problemi inversi, si ricavano le formule seguenti:

$$C = \frac{M}{1+i \cdot t}; \quad t = \frac{M-C}{C \cdot i} = \frac{I}{C \cdot I}; \quad i = \frac{M-C}{C \cdot t} = \frac{I}{C \cdot t}.$$

Queste considerazioni valgono se il tasso di interesse è costante nel tempo. Nel caso che il tasso subisca delle variazioni, la formula del montante richiede una piccola modifica.

Supponiamo che il tasso sia i_1 per la durata t_1 , sia i_2 per la durata t_2 , ..., i_n per la durata t_n . Il montante del capitale C alla fine del periodo di durata $t_1+t_2+ \dots +t_n$ è dato allora da:

$$M = C(1 + i_1 \cdot t_1 + i_2 \cdot t_2 + \dots + i_n \cdot t_n) = C \left(1 + \sum_{k=1}^n i_k \cdot t_k \right).$$

Se poi il tasso potesse variare istante per istante, si avrebbe:

$$M = C \left(1 + \int_0^t i(k) dk \right).$$

Come esempio consideriamo un impiego per n anni con tassi di interesse crescenti in progressione aritmetica di ragione δ di anno in anno. Il tasso al k -esimo anno è dato quindi dalla:

$$i_k = i + (k-1) \cdot \delta.$$

Il montante risulta dato da:

$$M = C \left(1 + \sum_{k=1}^n [i + (k-1) \cdot \delta] \right) = C \left(1 + \sum_{k=1}^n i + \sum_{k=1}^n (k-1) \cdot \delta \right)$$

ed infine

$$M = C \left(1 + n \cdot i + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \delta \right).$$

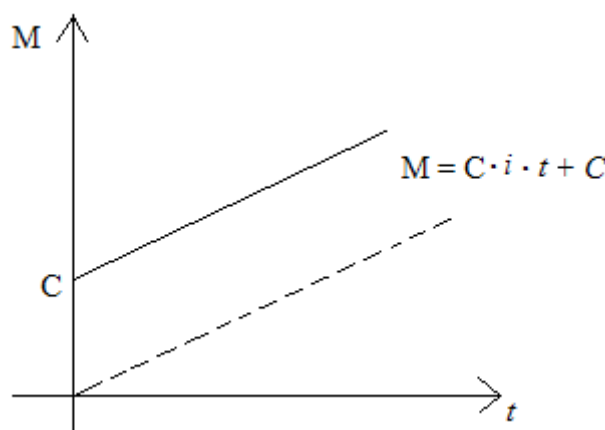
Allo stesso modo se supponiamo che il tasso vari istantaneamente partendo da $i(0) = i$ si ha:

$$i(k) = i + \delta \cdot k$$

da cui:

$$M = C \left(1 + \int_0^t (1 + \delta k) dk \right) = C \left(1 + \left[1 + \frac{\delta k^2}{2} \right]_0^t \right) = C \left(1 + it + \delta \frac{t^2}{2} \right).$$

È possibile rappresentare graficamente anche il montante. In questo caso abbiamo a che fare con una funzione lineare del tipo $y = mx + q$. Infatti la $M = C i t + C$ è analoga alla funzione che rappresenta l'interesse con la sola variante che quest'ultima presenta la variabile additiva C . La retta che la rappresenta deve quindi risultare parallela a quella dell'interesse e deve tagliare l'asse delle ordinate nel punto C :



4. Tassi equivalenti

due tassi di interesse si dicono equivalenti quando, anche se espressi in riferimento ad unità di tempo diverse, producono, nello stesso tempo di impiego, uguali montanti.

Basandoci su questa definizione ricaviamo la relazione che lega i tassi equivalenti.

Indichiamo con i il tasso riferito all'anno e con i_k il tasso riferito ad $\frac{1}{k}$ -esimo di anno. Ad esempio indicheremo con i_2 il tasso semestrale, con i_3 quello quadrimestrale, ecc. Il montante di due capitali unitari sarà dato, nei due casi, da:

$$M = (1 + i) \quad \quad M = (1 + i_k)^k.$$

Dovendo questi montanti essere uguali, dovrà aversi:

$$1 + i = 1 + i_k \cdot k$$

da cui:

$$i = i_k \cdot k \quad \text{e} \quad i_k = \frac{i}{k}.$$

Perciò, in regime di capitalizzazione semplice il tasso relativo ad un k -esimo di anno è equivalente alla k -esima parte del tasso annuo, e, viceversa, il tasso annuo è equivalente a k volte quello di 1 –esimo di anno.

6. Sconto commerciale

Lo sconto è il compenso spettante a colui che paga una somma dovuta prima della scadenza.

Come nella capitalizzazione semplice, la sua misura viene indicata con un “tot per cento” della somma da pagare per ogni unità di tempo prescelta per la misurazione del tempo di anticipo. Lo sconto può anche essere considerato come un interesse negativo calcolato sulla somma da pagare perché esso viene detratto dalla somma dovuta alla scadenza. Comunemente, in commercio, lo sconto si determina come interesse calcolato sulla somma pagabile alla scadenza, cioè su quello che chiamiamo **valore nominale**. Tale sconto viene detto, appunto, sconto commerciale.

Sia M il valore nominale del credito (o del debito) pagabile dopo un tempo t e sia d il tasso di sconto. Come detto sopra lo sconto commerciale è proporzionale al valore nominale ed al tempo di anticipo, per cui dovrà aversi:

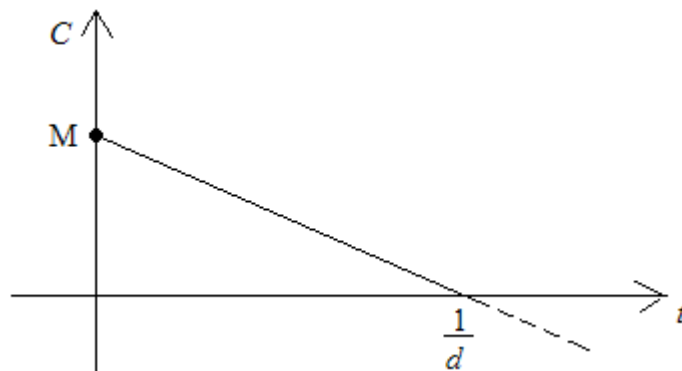
$$S_C = M \cdot d \cdot t.$$

La somma scontata, che chiameremo **valore attuale del capitale**, in regime di sconto commerciale, è data da:

$$C = M - S_C$$

$$C = M - M \cdot d \cdot t \quad \Rightarrow \quad C = M(1 - d \cdot t).$$

Da questa relazione si vede chiaramente che la somma scontata decresce al crescere di t . Possiamo rappresentare graficamente la funzione $C = - M \cdot d \cdot t + M$ in un piano cartesiano riportando in ascisse il tempo ed in ordinate il valore attuale C . La funzione da rappresentare (essendo di primo grado) rappresenta una retta avente coefficiente angolare $- M \cdot d$, interseca l’asse delle ordinate nel punto $(0, M)$ e l’asse delle ascisse nel punto in cui è $- M \cdot d \cdot t + M = 0$, cioè nel punto $\left(\frac{1}{d}, 0\right)$, ed il suo grafico è quindi:



Per l'applicazione di questo regime dobbiamo porre una limitazione importante perché lo sconto commerciale ha senso solo se è $t < \frac{1}{d}$, perché se fosse $t \geq \frac{1}{d}$ lo sconto risulterebbe uguale o superiore al valore nominale del debito e la somma scontata sarebbe nulla per $t = \frac{1}{d}$ e, addirittura, negativa per valori maggiori di $\frac{1}{d}$.

Dalla formula $C = M(1 - d \cdot t)$ si ricava immediatamente la legge di capitalizzazione commerciale, cioè si ha:

$$M = \frac{C}{1 - d \cdot t}$$

dove M è il montante del capitale C impiegato per un tempo t ad un tasso di sconto d (detto anche tasso di interesse anticipato).

L'importo dell'interesse anticipato è dato da:

$$I = M - C = \frac{C}{1 - d \cdot t} - C = \frac{C - C + C \cdot d \cdot t}{1 - d \cdot t}$$

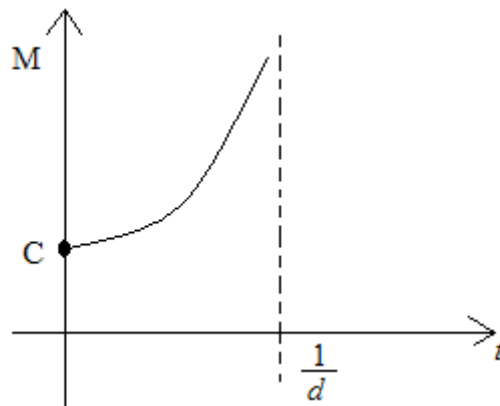
$$I = \frac{C \cdot d \cdot t}{1 - d \cdot t} = \frac{C}{1 - d \cdot t} \cdot d \cdot t$$

da cui, infine:

$$I = M \cdot d \cdot t.$$

Possiamo perciò dire che l'interesse anticipato prodotto dal capitale C è uguale allo sconto commerciale applicato al montante.

Rappresentiamo graficamente la funzione montante $M = \frac{C}{1-d \cdot t}$ in un sistema di assi cartesiani riportando in ascisse il tempo ed in ordinate il montante. La funzione di montante rappresenta un arco di iperbole equilatera che ha senso considerare solo per valori di t interni all'intervallo $\left[0, \frac{1}{d}\right[$; interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, C)$ (perché per $t = 0$ si ha che $M = C$), mentre per $\frac{1}{d}$ si annulla il denominatore della frazione e quindi il ramo dell'iperbole tende a $+\infty$ ed il valore di M cresce anch'esso tendendo rapidamente all'infinito:



Vogliamo ricavare, infine, la relazione che lega il tasso annuo di interesse i ed il tasso di sconto d . Se oggi investiamo un capitale C per avere fra un anno un montante M , possiamo dire che C è stato investito ad un tasso di interesse posticipato, e si ha:

$$\begin{aligned} M &= C(1 + i) & \Rightarrow & & M &= C + C \cdot i \\ i &= \frac{M - C}{C} & \Rightarrow & & i &= \frac{M}{C} - 1. \end{aligned}$$

Possiamo anche dire che sul capitale M esigibile dopo un anno, è stata fatta una ritenuta di sconto (o di interesse anticipato) e si ha quindi:

$$\begin{aligned} C &= M(1 - d) & \Rightarrow & & C &= M - M \cdot d \\ d &= \frac{M - C}{M} & \Rightarrow & & d &= 1 - \frac{C}{M}. \end{aligned}$$

Ora si ha:

$$i = \frac{M}{C} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{C} = 1 + i \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{M} = \frac{1}{1+i}.$$

Sostituendo nella espressione $d = 1 - \frac{C}{M}$ si ottiene:

$$d = 1 - \frac{1}{1+i} = \frac{1+i-1}{1+i} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{i}{1+i}$$

che ci dice che $d < i$.

Partendo dalla relazione $d = 1 - \frac{C}{M}$ e ricavando i in funzione di d , si ha:

$$\frac{C}{M} = 1 - d \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{C} = \frac{1}{1-d}$$

che sostituito nella $i = \frac{M}{C} - 1$ dà:

$$i = \frac{1}{1-d} - 1 = \frac{1-1+d}{1-d} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{d}{1-d}$$

da cui si nota che è ancora $i > d$.

7. Sconto razionale

Lo sconto razionale risponde all'esigenza di equivalenza con l'interesse che dovrebbe essere determinato, allo stesso tasso e per lo stesso periodo di anticipo, sulla somma anticipata. Esso quindi corrisponde all'interesse sul valore attuale del capitale esigibile alla scadenza.

Determinare lo sconto razionale richiede un procedimento un po' più complesso rispetto a quello usato per determinare lo sconto commerciale. Infatti lo sconto razionale deve essere commisurato al valore attuale del capitale esigibile alla scadenza e quindi il problema è quello di ricercare il valore attuale di un capitale scontato razionalmente.

In regime di capitalizzazione semplice, la determinazione del valore attuale di un capitale scontato razionalmente può essere effettuata partendo dalla:

$$M = C(1 + i \cdot t) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{M}{1 + i \cdot t}$$

che può essere scritta anche nella forma $C = M \cdot \frac{1}{1+i \cdot t}$ nella quale l'espressione

$\frac{1}{1+i \cdot t}$ viene definita **fattore di sconto razionale** in quanto costituisce il coefficiente

per il quale deve essere moltiplicato il valore nominale di un capitale con scadenza futura per ottenere il valore attuale. Per determinare l'ammontare dello sconto razionale possiamo effettuare la differenza fra il valore nominale del capitale ed il suo valore attuale, cioè:

$$S_R = M - C$$

da cui, essendo $C = \frac{M}{1+i \cdot t}$, si ottiene:

$$S_R = M - \frac{M}{1+i \cdot t} = \frac{M + M \cdot i \cdot t - M}{1+i \cdot t} \Rightarrow S_R = \frac{M \cdot i \cdot t}{1+i \cdot t}.$$

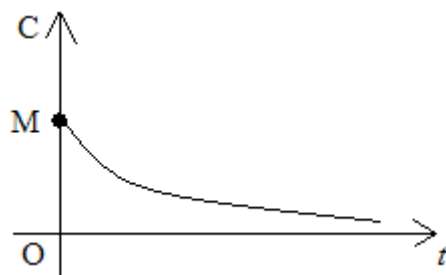
Ma possiamo anche scrivere:

$$S_R = \frac{M}{1+i \cdot t} \cdot i \cdot t \Rightarrow S_R = C \cdot i \cdot t$$

Deducendo che lo sconto razionale è l'interesse che la somma scontata produrrebbe se venisse impiegata allo stesso tasso per il tempo di anticipazione.

La funzione $C = \frac{M}{1+i \cdot t}$ la possiamo rappresentare su di un piano cartesiano riportando

in ascisse i tempi ed in ordinate il capitale C:



Per $t = 0$ si ha che $C = M$ ed è inoltre $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M}{1+i \cdot t} = 0$. L'asse t è quindi un asintoto orizzontale e la funzione rappresenta un arco di iperbole situata nel primo quadrante.

8. Confronto fra sconto commerciale e sconto razionale

Il problema che si presenta nella pratica è quello di determinare se ad un creditore, che vuole riscuotere anticipatamente una certa somma, è più conveniente applicare lo sconto commerciale o quello razionale.

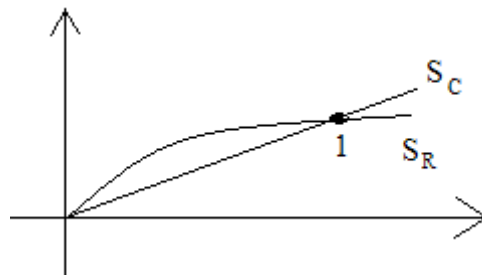
Intanto sappiamo che $S_R = \frac{M \cdot i \cdot t}{1 + i \cdot t}$, e che la relazione che intercorre fra i e d è

$i = \frac{d}{1-d}$. Sostituendo questo valore nella S_R si ottiene:

$$S_R = \frac{M \cdot \frac{d}{1-d}}{1 + \frac{d}{1-d} \cdot t} = \frac{\frac{M \cdot d}{1-d}}{\frac{1-d+d \cdot t}{1-d}} \Rightarrow S_R = \frac{M \cdot d}{1+d \cdot (t-1)}.$$

Lo sconto commerciale è invece dato dalla $S_C = M \cdot d \cdot t$. Si osserva che per $t = 1$ è $S_R = S_C$. Per $t < 1$ il fattore $[1+d \cdot (t-1)]$ è minore di 1, per cui è $S_R > S_C$. Se $t > 1$ (ma in ogni caso minore di $\frac{1}{d}$), si ha che $[1+d \cdot (t-1)]$ è maggiore di 1 per cui $S_R < S_C$.

Graficamente:



Possiamo anche vedere quali sono le relazioni che legano i tassi unitari di sconto commerciale e razionale affinché si abbia equivalenza fra i due regimi. A tale scopo indichiamo con i_c il tasso unitario di sconto commerciale e con i_r quello razionale.

Poiché è $S_C = C \cdot i_c \cdot t$ ed $S_R = \frac{C \cdot i_r \cdot t}{1 + i_r \cdot t}$, perché ci sia equivalenza occorre che sia:

$$C \cdot i_c \cdot t = \frac{C \cdot i_r \cdot t}{1 + i_r \cdot t} \Rightarrow i_c = \frac{i_r}{1 + i_r \cdot t}$$

che consente di calcolare il tasso di sconto commerciale equivalente ad un certo tasso di sconto razionale. Per calcolare il tasso di sconto razionale in funzione di quello commerciale, risolviamo l'ultima equazione rispetto a i_r . Si ha:

$$i_r = i_c \cdot (1 + i_r \cdot t) \Rightarrow i_r = i_c + i_c \cdot i_r \cdot t \Rightarrow i_r \cdot (1 - i_c \cdot t) = i_c$$

da cui, infine :

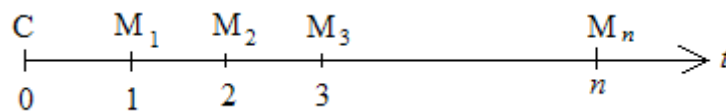
$$i_r = \frac{i_c}{1 - i_c \cdot t}$$

che permette di determinare il tasso di sconto razionale equivalente ad un dato tasso commerciale. È anche da notare che entrambe le relazioni sono in funzione del tempo e che la differenza fra sconto commerciale e sconto razionale diventa tanto più grande quanto maggiore è il tempo di anticipazione.

9. Capitalizzazione composta

Si ha la capitalizzazione composta quando gli interessi maturati in ciascuna unità di tempo considerata si uniscono al capitale originario per diventare essi stessi fruttiferi per il successivo tempo di impiego. È quindi chiaro che nella capitalizzazione composta l'interesse prodotto in ciascuna unità di tempo è via via crescente perché viene determinato su di un capitale che è continuamente in crescita. Vediamo come poter calcolare il montante in regime di capitalizzazione composta.

Rappresentiamo i montanti sulla retta dei tempi:



Il montante alla fine del primo periodo è dato da:

$$M_1 = C \cdot (1 + i).$$

Questo montante diventa il capitale su cui calcolare gli interessi per il periodo successivo. Il montante M_2 sarà quindi:

$$M_2 = M_1(1 + i) = C \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = C \cdot (1 + i)^2.$$

Con procedimento analogo troveremo che alla fine del terzo periodo il montante è:

$$M_3 = C \cdot (1 + i)^3.$$

Così procedendo fino all' n -esimo anno si ricava la legge del montante ad interesse composto:

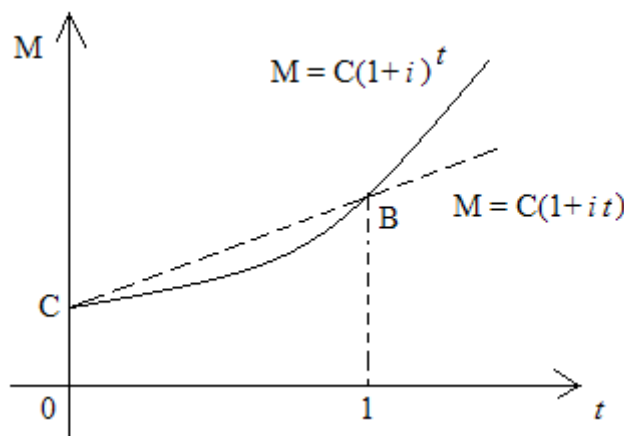
$$M = C \cdot (1 + i)^t.$$

L'espressione $(1 + i)^t$ è detta **fattore di capitalizzazione composta** e dà il montante (ad interesse composto) di un euro impiegato per n periodi ad un tasso i relativo al periodo di capitalizzazione.

Volendo determinare l'interesse composto, possiamo operare per differenza, cioè calcoliamo:

$$I = M - C = C \cdot (1 + i)^t - C \quad \Rightarrow \quad I = C \cdot [(1 + i)^t - 1].$$

In modo analogo a quanto fatto per il montante in regime di capitalizzazione semplice, anche il montante ad interesse composto può essere considerato come una funzione del tempo e quindi è suscettibile di una rappresentazione grafica riportando in ascisse i tempi ed in ordinate i montanti. Poiché la variabile indipendente tempo si trova ad esponente, la funzione non è sicuramente una funzione lineare come avviene nel caso della capitalizzazione semplice, ma è una funzione esponenziale avente base maggiore di 1 (infatti la base è $1+i$, essendo $i > 0$). La curva che rappresenta il montante è quindi una curva sempre crescente che volge la concavità verso l'alto. Interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, C)$. Per $t = 1$ si ottiene il punto $B(1, 1+i)$, che coincide con il punto per il quale passa anche il grafico della funzione che esprime la capitalizzazione semplice:



È immediato osservare che per $t = 0$ e per $t = 1$ il montante calcolato ad interesse semplice coincide con quello calcolato ad interesse composto. Per tempi di impiego inferiori all'unità scelta (cioè per periodi compresi tra 0 e 1) il montante ad interesse composto risulta minore di quello ad interesse semplice, mentre per un tempo di impiego superiore ad 1 il montante ad interesse composto supera quello ad interesse semplice e la differenza aumenta tanto più sensibilmente quanto più lungo è il tempo di impiego del capitale.

Se si deve calcolare il montante di un capitale per periodi di tempo superiori all'unità di tempo di impiego e per frazioni di esso, il calcolo può essere fatto in due modi diversi:

- a) *Convenzione lineare.* Il calcolo va fatto in regime di capitalizzazione composta per la parte intera dei periodi e in regime di capitalizzazione semplice per la parte frazionaria residua, cioè (nella formula ci si riferisce all'anno):

$$M = C \cdot (1+i)^t \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t_1}{12}\right).$$

Questo tipo di capitalizzazione è detta anche *capitalizzazione mista* ed è il procedimento applicato dalle Banche. Tale convenzione è giustificata dal fatto nella capitalizzazione composta gli interessi si aggiungono al capitale solo alla fine di ciascun periodo.

- b) *Convenzione esponenziale.* Il calcolo va fatto nel modo seguente:

$$M = C \cdot (1+i)^{t + \frac{t_1}{12}}.$$

Se t è intero è chiaro allora che $M_{lineare} = M_{esponenziale}$, altrimenti è sempre $M_{lineare} > M_{esponenziale}$.

10. Valore attuale in regime di capitalizzazione composta

Il problema che ci poniamo ora è quello di determinare il valore attuale di un capitale esigibile dopo un certo periodo di tempo, il che significa determinare il capitale iniziale che, impiegato per quel tempo ed a quel tasso, produce un montante uguale al valore nominale del capitale in questione. Ciò può essere fatto a partire dalla relazione $M = C(1+i)^t$ e risolvendola rispetto a C . Si ha:

$$C = \frac{M}{(1+i)^t}.$$

Questa formula può anche essere scritta nelle forme seguenti:

$$C = M \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \quad \text{e} \quad C = M(1+i)^{-t}.$$

I valori, $\frac{1}{(1+i)^t}$ e $(1+i)^{-t}$ rappresentano i valori attuali di 1 euro esigibile fra t unità di tempo e sono definiti **fattore di sconto composto** appunto perché servono a scontare un determinato capitale avente scadenza futura.

11. Tassi equivalenti

La legge di capitalizzazione composta è valida sia quando si prende come unità di misura del tempo l'anno, sia quando si prende una frazione di anno. Generalmente indichiamo, come già stabilito in precedenza, con i il tasso annuo e con i_k quello riferito ad $\frac{1}{k}$ -esimo di anno.

Il problema che si presenta è quello di trovare la relazione che lega il tasso i_k al tasso annuo i in modo che i montanti, calcolati con i due tassi, risultino uguali.

Si dice che due tassi relativi a periodi diversi sono equivalenti se, applicati a capitali uguali e per lo stesso periodo di tempo, producono montanti uguali. Assumiamo come capitale 1€ e come durata il tempo $t = 1 \text{ anno} = k \text{ periodi}$. La relazione di equivalenza che esprime l'uguaglianza dei montanti è la seguente:

$$(1 + i)^k = (1 + i_k)^k.$$

Da questa relazione si ricava immediatamente la:

$$i = (1 + i_k)^k - 1$$

che ci permette di ricercare il tasso annuo di interesse quando sia dato quello relativo ad una certa frazione di anno.

Sempre dalla stessa relazione possiamo ricavare il tasso i_k relativo ad $\frac{1}{k}$ -esimo di anno equivalente ad un dato tasso annuo. Si ha infatti:

$$1 + i_k = \sqrt[k]{1 + i} \quad \Rightarrow \quad i_k = \sqrt[k]{1 + i} - 1.$$

La validità di questa relazione si estende anche a tassi relativi a diverse frazioni di anno. Se, ad esempio, vogliamo determinare il rapporto di equivalenza fra tasso semestrale i_2 e quello quadrimestrale i_3 , possiamo procedere nel modo seguente:

$$(1 + i_2)^2 = (1 + i); \quad (1 + i_3)^3 = (1 + i)$$

e, per la proprietà transitiva si ha:

$$(1 + i_2)^2 = (1 + i_3)^3$$

$$1 + i_2 = \sqrt{(1 + i_3)^3} \quad \Rightarrow \quad i_2 = \sqrt{(1 + i_3)^3} - 1$$

oppure:

$$1 + i_3 = \sqrt[3]{(1 + i_2)^2} \quad \Rightarrow \quad i_3 = \sqrt[3]{(1 + i_2)^2} - 1.$$

12. Tassi nominali convertibili

Spesso, nelle operazioni finanziarie, accade che viene espresso un tasso annuale di interesse con capitalizzazione semestrale, quadrimestrale, ecc. Cioè, in questi casi, si fa riferimento ad un tasso annuo ed allo stesso tempo si indica che gli interessi vengono capitalizzati relativamente a frazioni di anno. In questo caso si parla di *capitalizzazione frazionata* in quanto il periodo di capitalizzazione è un sottomultiplo dell'anno. Il tasso che viene indicato in riferimento all'anno non è un tasso effettivo, ma è un tasso che viene detto **nominale** e che deve essere diviso per il numero di periodi di capitalizzazione esistenti nell'anno.

Ad esempio, quando si parla di un capitale impiegato al tasso del 6% annuo con capitalizzazione semestrale, si intende che il tasso semestrale è del 3% che non è equivalente a quello del 6% annuo, ma vale qualcosa di più.

Il tasso 6% viene detto *tasso annuo nominale convertibile semestralmente*.

In generale il tasso nominale convertibile k volte all'anno è un tasso espresso formalmente all'anno ma con capitalizzazione degli interessi alla fine di ciascun k -esimo di anno. Il tasso nominale convertibile k volte all'anno lo indicheremo con j_k e quindi sussiste la relazione:

$$i_k = \frac{j_k}{k}.$$

Per risolvere i problemi che prevedono questo tipo di capitalizzazione possiamo procedere in due modi:

- a) misurare il tempo di impiego in numero di periodi di capitalizzazione avendo però l'accortezza di convertire il tasso nominale annuo nel tasso relativo a ciascun periodo tenendo presente che $i_k = \frac{j_k}{k}$.
- b) Misurare il tempo di impiego in anni: in questo caso occorre usare il tasso effettivo annuo equivalente a quello nominale indicato e procedendo nel modo seguente:

$$i_k = \frac{j_k}{k} \qquad i = (1 + i_k)^k - 1.$$

13. Capitalizzazione continua

Quando il periodo di capitalizzazione diventa molto piccolo, ossia quando k diventa molto grande, si considera un modello matematico teorico di capitalizzazione detto di *capitalizzazione continua*. Questo modello si presenta spesso nella realtà economica di un'azienda allorché i capitali appena riscossi vengono subito reinvestiti. Osserviamo che $\{j_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ rappresenta una successione numerica che al crescere di k j_k

diminuisce. La successione è però limitata in quanto è sempre $j_k > 0$, e la successione è perciò convergente. Dalla $i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1$, e dalla $j_k = ki$ si trae che:

$$j_k = k \cdot [\sqrt[k]{1+i} - 1].$$

Andiamo allora a calcolare:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} j_k = \lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot [\sqrt[k]{1+i} - 1].$$

Questo limite si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$. La sua risoluzione può essere ricondotta al limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Infatti:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \cdot [\sqrt[k]{1+i} - 1] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}}.$$

Ponendo $\frac{1}{k} = t$, si ha che $t \rightarrow 0$, per cui è:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+i)^t - 1}{t} = \ln(1+i).$$

Posto $\delta = \ln(1+i)$, si ricava che $1+i = e^\delta$ dove e^δ è detto *tasso istantaneo* o anche *forza di interesse*.

La legge di capitalizzazione continua (detta anche legge esponenziale) è quindi data da:

$$M = C \cdot e^\delta.$$