

LIMITI DI FUNZIONI

1. CONCETTO DI LIMITE

Esula dallo scopo di questo libro la trattazione della teoria sui *limiti*. Tuttavia, pensando di fare cosa gradita allo studente, che deve possedere questa nozione come *background*, riteniamo più utile presentare, come richiamo, le interpretazioni grafiche di tale concetto.

Sia data, a tal proposito, una funzione reale $y = f(x)$ definita su un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia x_0 , appartenente o no all'insieme, un punto di accumulazione di E .

In generale quando si pensa al concetto di *limite* si fa riferimento alla scrittura

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

In realtà può aversi una casistica più ampia potendo sia x che $f(x)$ tendere ad un elemento dell'insieme $\{x_0 \text{ ovvero } \ell, -\infty, +\infty, \infty\}$, dove con ∞ si indica tutta la retta reale $(-\infty, +\infty)$.

Così si potrebbero presentare ben sedici casi con scritture quali:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

che si possono racchiudere nella seguente espressione

$$\lim_{x \rightarrow \begin{cases} x_0 \\ \pm \infty \\ \infty \end{cases}} f(x) = \begin{cases} \ell \\ \pm \infty \\ \infty \end{cases}$$

A volte, però, il limite non esiste ed allora occorre studiare il comportamento in un sottoinsieme di un intorno completo di x_0 avendosi casi come i seguenti:

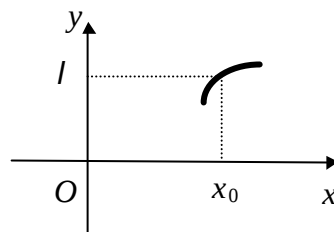
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \text{su } E}} f(x)$$

essendo E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ed x_0 un suo punto di accumulazione; la situazione tende a complicarsi maggiormente in termini di casistica.

Siano x_0 ed ℓ due numeri reali finiti. Elenchiamo qui di seguito i vari casi possibili:

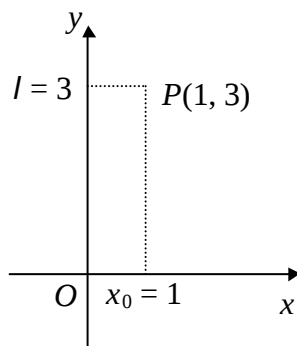
1) *limite finito quando x tende ad un numero finito*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$



Esempio

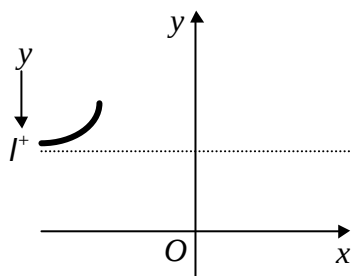
$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2) = 3$$



il limite è rappresentato proprio dal punto P

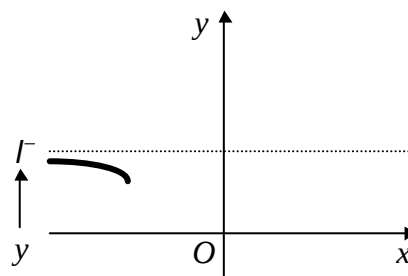
2) limite finito quando x tende ad infinito comprendente i seguenti quattro casi

a)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell^+$$

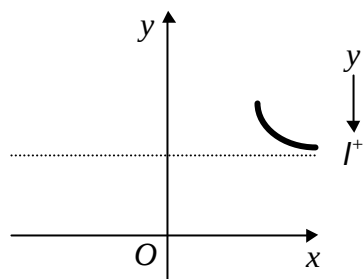
b)



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell^-$$

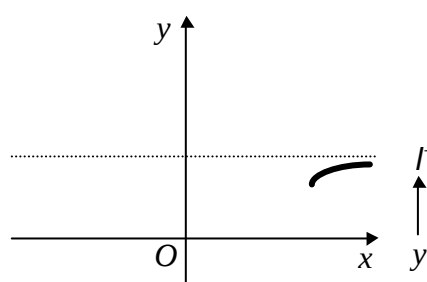
Notasi che scrivere formalmente ℓ^+ ed ℓ^- fornisce un'informazione aggiuntiva sulla tendenza dall'alto e dal basso della nostra funzione $f(x)$ verso la retta $y = \ell$.

c)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^+$$

d)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell^-$$

Esempi

b) + c)

La funzione

$$y = \frac{1}{x}$$

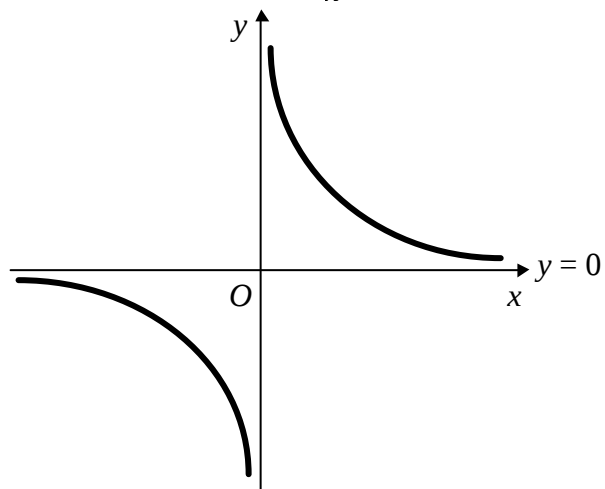
è definita su tutta la retta reale tranne che nel punto $x = 0$ (cfr. capitolo precedente).

Segue allora che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

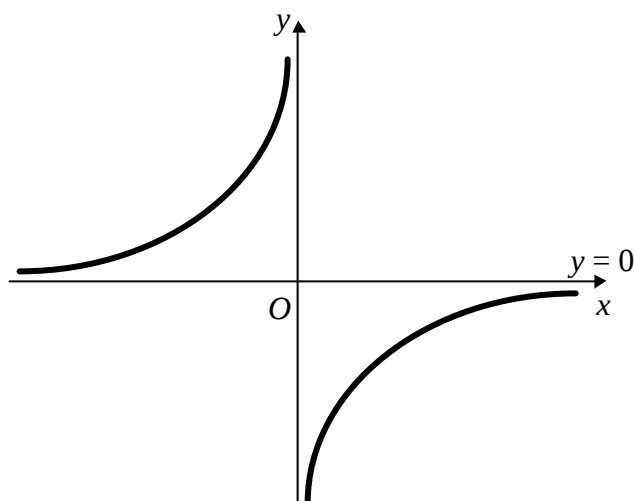


a) + d)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0^-$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0^+$$



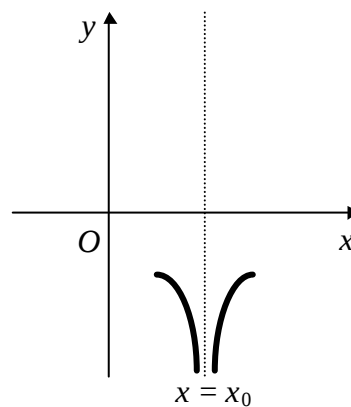
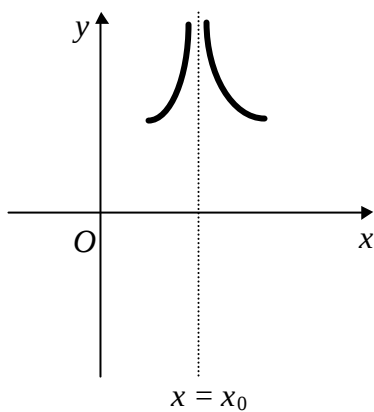
3) limite infinito quando x tende ad un numero finito comprendente i seguenti due casi

a) limite destro e sinistro coincidenti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = +\infty$$

o

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = -\infty$$

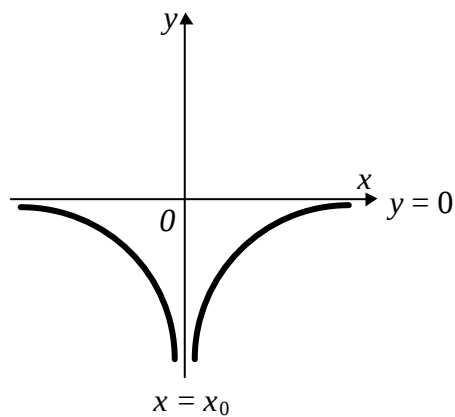
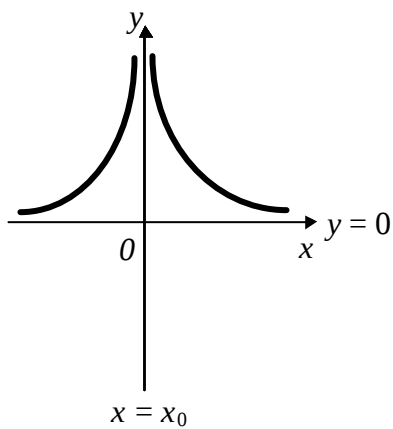


Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

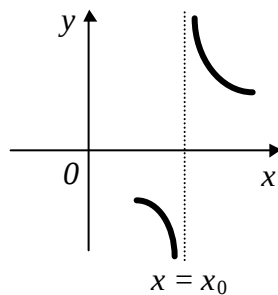


b) limite destro e sinistro differenti

$$b_1) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$

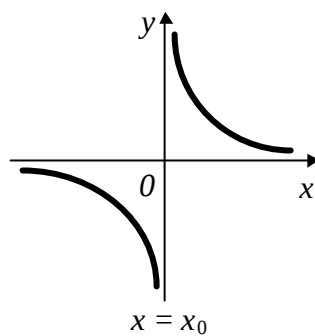


Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

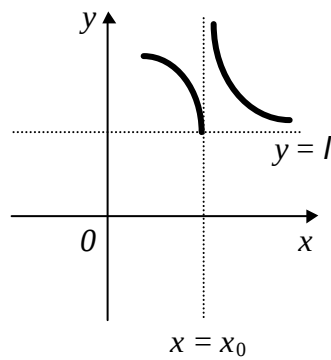
e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



$$b_2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

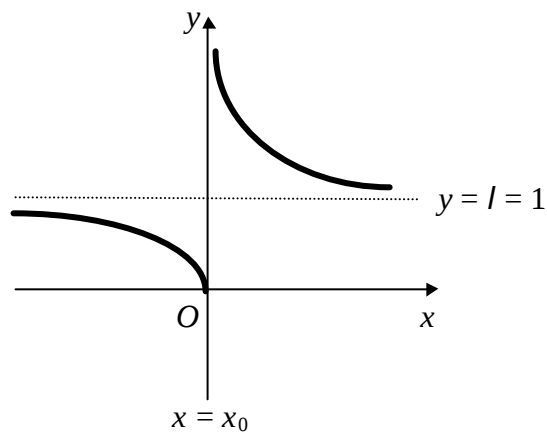
$$e \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$$



Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} a^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$e \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} a^{\frac{1}{x}} = 0 \quad a > 1 \quad x \neq 0$$

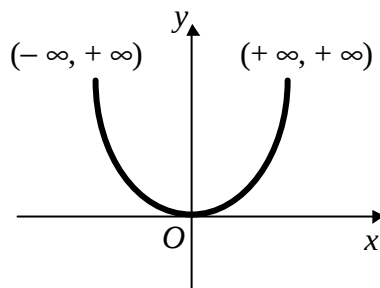


N.B

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} a^{\frac{1}{x}} = 1^{\pm}$$

4) limite infinito quando x tende ad infinito comprendente i seguenti quattro casi

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

e

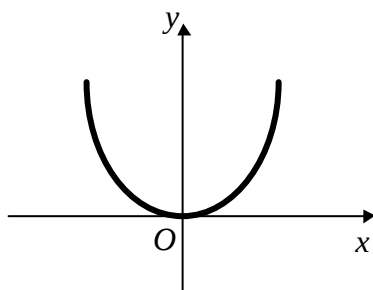
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

o più in generale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n} = +\infty$$

e

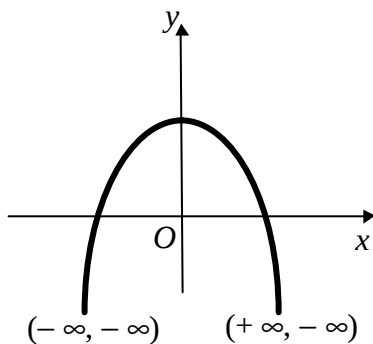
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n} = +\infty$$



b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty$$

e

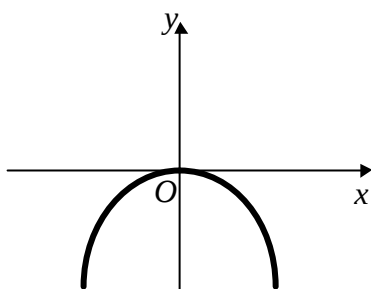
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$$

o più in generale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^{2n}) = -\infty$$

e

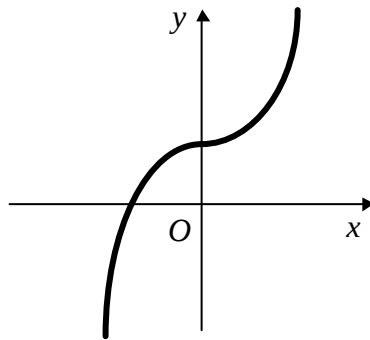
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^{2n}) = -\infty$$



$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

e

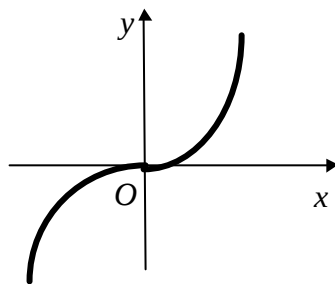
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

o più in generale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2n+1} = +\infty$$

e

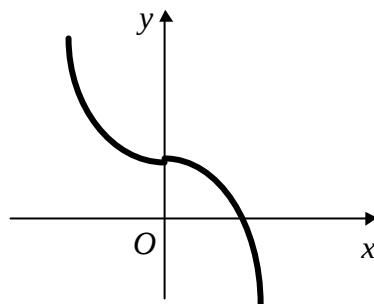
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2n+1} = -\infty$$



$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

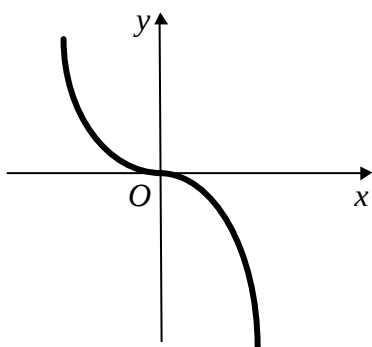


Esempio

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$$



Esempio

Sia

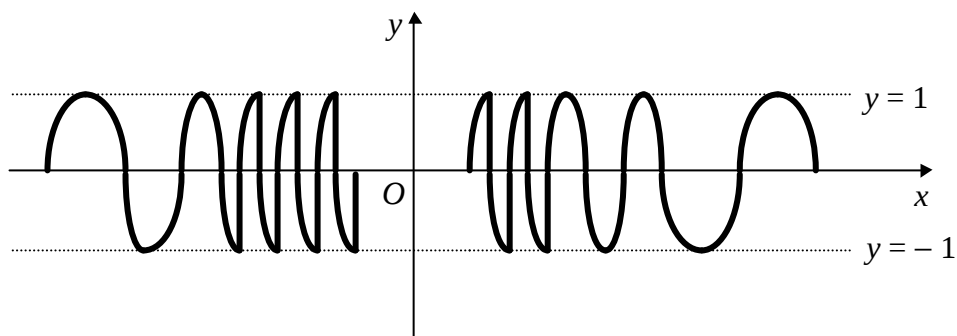
$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

Si dimostra che $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin \frac{1}{x} \right)$ non esiste o meglio oscilla tra -1 e $+1$. Si consideri allora l'insieme

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{np} \text{ con } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Risulta pertanto:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \text{su } E}} \left(\sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{N}}} (\sin np) = 0$$



In ogni intorno di zero la curva compie infinite oscillazioni che vanno via via infittendosi a mano a mano che ci si avvicina a zero.

2. TEOREMI SUI LIMITI

In questo paragrafo ci proponiamo di enunciare i più importanti teoremi che regolano le operazioni sui limiti di funzione.

Teorema dell'unicità del limite: il limite di una funzione, se esiste, è unico.

Teorema della permanenza del segno: se, al tendere di x ad x_0 , la funzione $y = f(x)$ tende al limite $\ell \neq 0$, esiste un intorno di x_0 in cui, escluso tutt'al più x_0 , la funzione assume lo stesso segno del suo limite.

3. OPERAZIONI SUI LIMITI

Limite della somma (o differenza) di due (o più) funzioni.

Primo caso

Date due funzioni $y = f(x)$ ed $y = g(x)$ definite rispettivamente sugli insiemi F e G ed indicato con x_0 un punto di accumulazione, appartenente o no all'insieme $F \cap G$, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 \pm \ell_2$$

posto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$$

Quindi il limite della somma di due o più funzioni è uguale alla somma dei limiti delle singole funzioni.

Esempio

Siano

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad e \quad g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 6$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0 \pm 6 = \pm 6$$

Secondo caso

Ci si pone adesso il problema se il teorema di cui sopra continui a valere anche quando la x tenda a valori infiniti. La risposta a tale quesito è affermativa.

Esempio

Siano

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \quad e \quad g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \pm \infty$$

Terzo caso

Ci si pone ora nel caso generale in cui il valore del limite può essere anche infinito e si afferma che la regola, indipendentemente da dove tende x , vale secondo i risultati riportati nella seguente

TABELLA DELLA SOMMA

+	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

$\ell, \ell' > 0$

? indica che il teorema generale della somma in questi casi (uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$) non porta a conclusione. Si suole esprimere tale circostanza dicendo che si è in un *caso indeterminato o di indecisione*.

Esempio

Siano

$$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 1 \quad e \quad g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty - \infty$$

che, come è evidente dalla tabella, è un caso di indecisione.

Limite del prodotto di due (o più) funzioni.

Date due (o più) funzioni $y = f(x)$ ed $y = g(x)$ definite rispettivamente sugli insiemi F e G ed indicato con x_0 un punto di accumulazione, appartenente o no all'insieme $F \cap G$, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_1 \ell_2$$

posto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2$$

cioè il limite del prodotto di due (o più) funzioni è uguale al prodotto dei limiti delle singole funzioni.

Esempio

Siano

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5 \quad e \quad g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 6$$

da cui

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = (-1) \cdot 6 = -6$$

Quanto sopra detto si può riassumere nella seguente

TABELLA DEL PRODOTTO

•	0	+ ℓ'	- ℓ'	+ ∞	- ∞	
0	0	0	0	?	?	$\ell, \ell' > 0$
+ ℓ	0	$\ell\ell'$	- $\ell\ell'$	+ ∞	- ∞	
- ℓ	0	- $\ell\ell'$	$\ell\ell'$	- ∞	+ ∞	
+ ∞	?	+ ∞	- ∞	+ ∞	- ∞	
- ∞	?	- ∞	+ ∞	- ∞	+ ∞	

? indica che il teorema generale del prodotto in questi casi (uno 0 e l'altro + ∞ o - ∞) non porta a conclusione. Si suole esprimere tale circostanza dicendo che si è in un *caso di indecisione o di indeterminazione*.

Esempio

Siano

$$f(x) = x^3 - x \quad e \quad g(x) = \frac{2x^3 + 3}{3x^2}$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

Segue che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)] = 0 \cdot (+\infty)$$

che, come è facile verificare confrontando la tabella, è una forma di indecisione.

Limite del quoziente di due funzioni

Date due funzioni $y = f(x)$ ed $y = g(x)$, con $g(x) \neq 0$, definite rispettivamente sugli insiemi F e G ed indicato con x_0 un punto di accumulazione, appartenente o no all'insieme $F \cap G$, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

posto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell_1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell_2 \neq 0$$

cioè il limite del quoziente di due funzioni è uguale al rapporto tra i limiti delle singole funzioni considerate.

Esempio

Siano

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5 \quad e \quad g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 6$$

Segue che:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = -\frac{1}{6}$$

Quanto sopra enunciato si può riassumere nella seguente

TABELLA DEL QUOZIENTE

$\div$	0	$+\ell'$	$-\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
0	?	0	0	0	0
$+\ell$	$+\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\frac{\ell}{\ell'}$	0	0
$-\ell$	$-\infty$	$-\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	?

? indica che il teorema generale del quoziente in questi casi (entrambi 0 oppure entrambi ∞) non porta a conclusione. Si suole esprimere tale circostanza dicendo che si è in un *caso di indecisione o di indeterminazione*.

Esempi

1) Siano

$$f(x) = x^3 + x - 2 \quad e \quad g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

Segue che:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{0}{0}$$

che, come è facile verificare confrontando la tabella, è una forma di indecisione.

2) Siano

$$f(x) = x^3 + x \quad e \quad g(x) = x^4 - 3x^2 + 1$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Segue che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{+\infty}{+\infty}$$

che, come è facile verificare confrontando la tabella, è una forma di indecisione.

Limite della potenza di una funzione

Se, al tendere di x ad x_0 , la funzione $y = f(x)$ tende ad un numero finito $\ell \neq 0$, indicando con n un intero qualsiasi, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \ell^n$$

cioè il limite di una potenza è uguale alla potenza del limite.

Esempio

Siano

$$f(x) = (3x^2 - 5x) \quad e \quad n = 3$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]^3 = 2^3 = 8$$

Quanto detto si può riassumere nella seguente

TABELLA DELL'ELEVAMENTO A POTENZA

$\lim_{x \rightarrow \begin{cases} x_0 \\ \pm \infty \\ \infty \end{cases}} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \begin{cases} x_0 \\ \pm \infty \\ \infty \end{cases}} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow \begin{cases} x_0 \\ \pm \infty \\ \infty \end{cases}} [f(x)]^{g(x)}$
ℓ	ℓ'	$\ell^{\ell'}$
0	0	?
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	0
$-\infty$	ℓ'	$\begin{cases} +\infty & \text{se } \ell' \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } \ell' \text{ è dispari} \end{cases}$
$\pm \infty$	0	?
1	$\pm \infty$	?
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

? indica che il teorema generale della potenza in questi casi (uno 1 e l'altro $\pm \infty$ oppure entrambi 0 oppure uno $\pm \infty$ e l'altro 0) non porta a conclusione. Si suole esprimere tale circostanza dicendo che si è in un caso di indecisione o di indeterminazione.

Esempi

1) Siano

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad e \quad g(x) = x^2$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

da cui si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{g(x)} = 1^{+\infty}$$

che è una forma indeterminata.

2) Siano

$$f(x) = (3x^3 + 2x^2 + x) \quad e \quad g(x) = x$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

da cui segue

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{g(x)} = 0^0$$

che è un'altra forma di indecisione.

3) Siano

$$f(x) = (3x^2 + 2) \quad e \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{g(x)} = (+\infty)^0$$

che è ancora un caso di indecisione.

Limite della radice n -esima di una funzione

Se, al tendere di x ad x_0 , la funzione $y = f(x)$ tende ad un numero ℓ (finito o infinito), indicando con n un intero positivo, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$$

con la sola ipotesi restrittiva che x_0 , punto di accumulazione dell'insieme di definizione della y , deve essere anche un punto di accumulazione dell'insieme di definizione della $\sqrt[n]{f(x)}$. Quindi il limite della radice n -esima di una data funzione è uguale alla radice n -esima del limite della funzione stessa.

Osservazione: la tabella della radice si può ricavare da quella dell'elevamento a potenza ricordando che

$$\sqrt[n]{[f(x)]^m} = [f(x)]^{\frac{m}{n}}$$

con m, n interi positivi.

Esempi

1) Sia

$$f(x) = 3x^2 - 2x \quad e \quad n = 3$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{3x^2 - 2x} = \sqrt[3]{8} = 2$$

2) Sia

$$f(x) = 3x^2 - 2x \quad e \quad n = 3$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3x^2 - 2x} = +\infty$$

3) Sia

$$f(x) = 3x^3 - 2x \quad e \quad n = 3$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{3x^3 - 2x} = -\infty$$

Limite di funzioni trascendenti composte

A) Se, al tendere di x ad x_0 , la funzione $y = f(x)$ tende ad un numero ℓ (finito o infinito), indicando con a un intero positivo diverso da 1, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^{f(x)} = a^\ell$$

Esempio

Sia

$$a = 2 \quad e \quad f(x) = 3x^2 - 5x$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 2} a^{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} 2^{(3x^2 - 5x)} = 2^{\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x)} = 2^2 = 4$$

B) Se, al tendere di x ad x_0 , la funzione $y = f(x)$ tende ad un numero $\ell > 0$, indicando con a un intero positivo diverso da 1, risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a f(x) = \log_a \ell$$

Esempio

Sia

$$f(x) = 3x^2 - x \quad e \quad a = 10$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow 2} \log_a f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \log_{10} (3x^2 - x) = \log_{10} \left[\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - x) \right] = \log_{10} 10 = 1$$

Analizziamo adesso più da vicino quelle che abbiamo già definito come

FORME INDETERMINATE O DI INDECISIONE

$$1) \quad \boxed{+\infty - \infty} \quad e \quad \boxed{-\infty + \infty}$$

In questo caso è sufficiente calcolare il limite del solo termine di grado massimo.

Esempi

$$a) f(x) = -3x^3 + 5x + 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3) = +\infty$$

$$b) f(x) = 3x^3 - 5x + 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3) = -\infty$$

$$c) f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty$$

$$d) f(x) = 2x^5 - x - 7 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5) = +\infty$$

$$2) \quad \boxed{0 \times \infty}$$

In tal caso si elimina l'indeterminazione mediante una semplice operazione di scomposizione in fattori.

Esempio

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \quad e \quad g(x) = \frac{x+3}{x^2 - x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 3) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+3}{x^2 - x} \right) = 0 \times \infty$$

Scomponendo si ottiene:

$$f(x) = (x-1)(x-3) \quad e \quad g(x) = \frac{x+3}{x(x-1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-1)(x-3) \frac{x+3}{x(x-1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x-3) \frac{x+3}{x} \right] = -8$$

3)

$$\frac{0}{0}$$

In questo caso si procede utilizzando il solito metodo della scomposizione in fattori oppure, se ciò non è possibile, la *regola di De L'Hopital* (cfr. capitolo sulle derivate).

Esempio

$$f(x) = x^2 + 3x \quad e \quad g(x) = x^3 - x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 3x)}{\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - x)} = \frac{0}{0}$$

Scomponendo si ha:

$$f(x) = x(x+3) \quad e \quad g(x) = x(x^2 - 1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2 - 1} = -3$$

4)

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Per tale forma di indecisione occorre distinguere i seguenti tre casi:

a) il numeratore ed il denominatore hanno lo stesso grado; il limite è finito ed è uguale al rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo

b) il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore; il limite è infinito ($\pm \infty$ a seconda dei casi)

g) il grado del numeratore è minore di quello del denominatore; il limite è finito e vale sempre zero, indipendentemente dal caso in cui ci si trova

Esempi

$$a) f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4 \quad e \quad g(x) = 2x^3 + 5 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 4}{2x^3 + 5} = \frac{4}{2} = 2$$

$$b) f(x) = x^3 + 3x + 5 \quad e \quad g(x) = 2x^2 + 7 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 5}{2x^2 + 7} = +\infty$$

$$c) f(x) = 3x + 2 \quad e \quad g(x) = x^2 - 5x + 7 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 7} = 0$$

5) 0^0

Tale forma indeterminata ricorre nel calcolo dei limiti di funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$. Per eliminare l'indeterminazione, quindi, si utilizza l'identità logaritmica $a = e^{\log a}$ che ci consente di scrivere:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$$

Esempio

$$f(x) = x \quad e \quad g(x) = x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \log x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \log x)}$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \log x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \right) = 0 \quad (\text{cfr. capitolo sulle derivate})$$

Dunque:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]^{g(x)} = e^0 = 1$$

6) 1^∞

Anche questa forma di indecisione si presenta nel calcolo dei limiti di funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$. Si procede, pertanto, come al punto 5).

Esempio

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 1} \quad e \quad g(x) = x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \log \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \log \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 1} \right) \right]}$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \log \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 1} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log \left(\frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 1} \right)}{\frac{1}{x}} \right] = 0 \quad (\text{cfr. capitolo sulle derivate})$$

Dunque:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{g(x)} = e^0 = 1$$

7)

∞^0

Come le precedenti anche tale forma di indeterminazione ricorre nel calcolo dei limiti di funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$. Pertanto si procede come ai punti 5) e 6).

Esempio

$$f(x) = x^2 + 5x + 3 \quad e \quad g(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 5x + 3)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \log(x^2 + 5x + 3)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \log(x^2 + 5x + 3) \right]}$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \log(x^2 + 5x + 3) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\log(x^2 + 5x + 3)}{x} \right] = 0$$

Dunque:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{g(x)} = e^0 = 1$$

Osservazione: per le funzioni trascendenti del tipo a^x ($a > 1$), x^n ($n > 0$), $\log_a x$ ($a > 1$) vale la seguente gerarchia tra gli infiniti:

esponenziale-elevamento a potenza-logaritmica

cioè una funzione esponenziale tende all'infinito più velocemente rispetto ad una potenza che, a sua volta, tende all'infinito più velocemente rispetto ad una funzione logaritmica.

Esempi

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^3} \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{4^x} \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^x} = 0$$

Riportiamo ora qui di seguito alcuni

LIMITI NOTEVOLI

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad \text{dove con } e \text{ si indica il numero di Neper, compreso tra 2 e 3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZI PROPOSTI

Calcolare i seguenti limiti immediati (1-38) dopo aver analizzato gli esempi a)-i):

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 5) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 3x + \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 1^2 - 3 \cdot 1 + 5 = 3$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x)(x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 5x) \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 \cdot 3 = 6$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - x^2}{3 + x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (4 - x^2)}{\lim_{x \rightarrow 3} (3 + x)} = -\frac{5}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{1 + 3 + 3 + 1}{1 + 2 - 1 - 2} = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 - 3)^4 = (-3)^4 = 81$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^2 - 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^2) = +\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^3 - x^2 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x^3) = \pm \infty$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} - 2}{\frac{2}{x} - 1} = \frac{0 - 0 - 2}{0 - 1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{6}} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \frac{\sin \frac{p}{3}}{\operatorname{tg} \frac{p}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p}{2}} = 0$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 2); \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 + 2) \quad [3; 0]$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 7x + 10); \quad \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) \quad [0; 3a^2]$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 4} (2x + \sqrt{x} - 1); \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 5) \quad [9; 9]$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{2x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{x + 2} \quad [2; 0]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 2}{3x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + 2x}{x + 3} \quad \left[1; -\frac{1}{2}\right]$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6}{x^3 - 9}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x - 1}{5x} \quad [2; 1]$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x - 6}{5x}; \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x + 1} \quad [0; 0]$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x + 2}{x - 2} \quad \left[-2; -\frac{5}{3}\right]$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x - x^2}{1 - x^2} \quad [0; \infty]$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x + 4}{3x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x + \sqrt{2}}{\sqrt{x}} \quad \left[\frac{1}{6}; 2\sqrt[4]{2}\right]$$

11) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x};$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}{x}$	$\left[0; \frac{\sqrt{2} + 2}{2}\right]$
12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 4}{x^2 - 1};$	$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}$	$[-\infty; +\infty]$
13) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 1}{x - 3};$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x} + \sqrt{5}}$	$[+\infty; 0]$
14) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 3x};$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x}}$	$[0; 2]$
15) $\lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} (\sin x - \cos x);$	$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} (\sin x + \cos x)$	$[0; \sqrt{2}]$
16) $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x-3} + \sqrt{x+5});$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \cos x}{\cos x}$	$[4; 3]$
17) $\lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{2-2x} - \sqrt{10+x});$	$\lim_{x \rightarrow 2p} \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$	$\left[-1; \frac{1}{2}\right]$
18) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7}}{2x};$	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x}{\sqrt{x+4}}$	$\left[\frac{3}{4}; \frac{10}{3}\right]$
19) $\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x};$	$\lim_{x \rightarrow p} \frac{1 + \sin x}{\cos x}$	$[0; -1]$
20) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x;$	$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^-} \operatorname{tg} x$	$[+\infty; -\infty]$
21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 5}{x + 1};$	$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^+} (x + \operatorname{tg} x)$	$[5; +\infty]$
22) $\lim_{x \rightarrow \frac{p}{3}} (\sin 2x - \cos x);$	$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{6}} (\cos 4x + \sin x)$	$\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}; 0\right]$
23) $\lim_{x \rightarrow \frac{p}{3}} \frac{\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x}{x};$	$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{3 \sin x + 1}{\cos x}$	$\left[\frac{3}{2p}; +\infty\right]$
24) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\sin x - \cos x};$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x + 2e^x)$	$[i; 0]$
25) $\lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} e^{\sin x - \cos x};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (2e^x + \log x)$	$[1; \infty]$
26) $\lim_{x \rightarrow p} \ln(\sin x);$	$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} (3x + \operatorname{tg} x)$	$[-\infty; +\infty]$
27) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (4^{-x} + 5e^{-x});$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$	$[\infty; 1]$
28) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2 + \log x} - 2e^x\right);$	$\lim_{x \rightarrow 2} e^{\ln x}$	$[-\infty; 2]$
29) $\lim_{x \rightarrow e} \ln x;$	$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{3 + 2 \cos x}{5 \operatorname{tg} x}$	$[1; 0]$
30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \cos x}{\sqrt{2+x}};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{x}{\cos x}$	$[0; -\infty]$

31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(3+5x)}{4 \log x};$	$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \log(\sin x)$	$[0; 0]$
32) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \log 2x}{\log(2+3x)};$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\log x}{\log(x-a)}$	$[-\infty; 0]$
33) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x + 3}{\log \frac{x}{2}};$	$\lim_{x \rightarrow 2} x^{\log(x^2-3)}$	$[\infty; 1]$
34) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1 + e^x};$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{\log x}$	$[-\infty; 0]$
35) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \log x \right);$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1-x)}{2^x}$	$[+\infty; -\infty]$
36) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin \frac{1}{\log x} \right);$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log \sin x)$	$[0; -\infty]$
37) $\lim_{x \rightarrow 2} \log_2(3-x);$	$\lim_{x \rightarrow -2^+} \log(x+2)$	$[0; -\infty]$
38) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \log x}{1 + 2 \log x};$	$\lim_{x \rightarrow 1} \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$	$[2; 0]$

Calcolare i seguenti limiti di funzioni razionali fratte che si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (1-35):

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^3 - 27} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-4)(x-3)}{(x-3)(x^2 + 3x + 9)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{x^2 + 3x + 9} = -\frac{1}{27} \\
 b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-2} = +\infty \\
 c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = 12 \\
 d) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^3 - 64} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x^3 - 64)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x^2 + 4x + 16)(\sqrt{x} + 2)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x^2 + 4x + 16)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{192} \\
 e) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+3}} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+3})}{x+3} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -3} [(x-3)(\sqrt{x+3})] = 0 \\
 f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1
 \end{aligned}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{(\sqrt{x-a})(\sqrt{x-a})}{\sqrt{x-a}}}{\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{x-a}{\sqrt{x-a}}}{\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \infty$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x^2 - 2ax + a^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 12x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 16}{2 - x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^2 + 1};$$

$$6) \lim_{m \rightarrow 1} \frac{m^2 + 5m - 6}{m^2 + m - 2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-3)^2 - 4}{x^2 - 25};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 7x + 2}{3x^2 + 2x - 1};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 6x^2 + 9x - 4};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{2x^2 - 3x - 9};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\frac{1}{3}x^2 - x + \frac{2}{3}};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - 2x};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}} \frac{5x^2 - 9x - 2}{10x^2 - 13x - 3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \quad [+\infty; 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x + 3} \quad [+\infty; 2]$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{3x - 9} \quad \left[-\frac{1}{2}; 4\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{a^3 - x^3} \quad \left[-24; -\frac{2}{3a}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^3 - m^3}{5x^2 - 4mx - m^2} \quad \left[\frac{1}{2}; \frac{m}{2}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + 8x + 15} \quad \left[\frac{7}{3}; 10\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4x + 4} \quad [+\infty; 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{27 - x^3} \quad \left[\frac{2}{5}; -\frac{2}{9}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{b - x}{x^3 + bx^2 - b^2x - b^3} \quad \left[-\frac{1}{6}; -\frac{1}{4b^2}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 10x - 5}{x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 13x - 7} \quad \left[\frac{3}{5}; \frac{4}{7}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 - 9x - 63}{x^4 - 6x^2 - 27} \quad \left[\frac{3}{4}; \frac{1}{3}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2} \quad \left[-\infty; \frac{1}{2}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} \quad \left[\frac{8}{9}; \frac{3}{2}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 + 7x^2 - 4x - 6} \quad \left[15; -\frac{1}{19}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 + 3x^2 - 4} \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + 1}{x^4 - 7x^2 + 8x - 4} \quad \left[\frac{11}{17}; \frac{1}{24}\right]$$

- | | | |
|---|--|--|
| 17) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{3-2x}{4x^2-8x+3};$ | $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{3x^3+6x^2-x-2}$ | $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{11}\right]$ |
| 18) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^4+16x^2-19x+5}{2x^2-5x+2};$ | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^3-13x^2+2x+3}{x^3-10x+3}$ | $\left[-\frac{1}{3}; \frac{32}{17}\right]$ |
| 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-6x+5};$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}$ | $\left[0; \frac{5}{4}\right]$ |
| 20) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x^2+3x+2};$ | $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-6}{2x^2+5x-3}$ | $\left[5; \frac{5}{7}\right]$ |
| 21) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{x^3-3x^2-x+3};$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-2x+1}$ | $\left[\frac{1}{2}; -\infty\right]$ |
| 22) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6};$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x^2-1}$ | $\left[\frac{1}{5}; \frac{3}{2}\right]$ |
| 23) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^2-6x+5};$ | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$ | $[0; +\infty]$ |
| 24) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3};$ | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$ | $\left[\frac{3}{5}; \frac{3}{4}\right]$ |
| 25) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1};$ | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-5x^3+6x^2+4x-8}{x^3-4x^2+4x}$ | $\left[\frac{3}{2}; 0\right]$ |
| 26) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-8x+15}{x^2-10x+21};$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-6x+5}{x^2-2x+1}$ | $\left[\frac{1}{2}; -\infty\right]$ |
| 27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{x};$ | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ | $[3; 4]$ |
| 28) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2+2x-7}{x^3-4x^2+5x-2};$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$ | $\left[+\infty; \frac{3}{4}\right]$ |
| 29) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2};$ | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2-2x+6}{x^2-5x+6}$ | $\left[\frac{14}{3}; 7\right]$ |
| 30) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{1-x}-2};$ | $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+8}-3}$ | $\left[-\infty; \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ |
| 31) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2\sqrt{x}-2\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}};$ | $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{-x+6}-2}{x-2}$ | $\left[0; -\frac{1}{4}\right]$ |
| 32) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1};$ | $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}+x-7}{\sqrt{x}-4}$ | $\left[\frac{1}{3}; 0\right]$ |
| 33) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}};$ | $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x}-1}$ | $[-\infty; 0]$ |
| 34) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[3]{x}-2};$ | $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-3}$ | $[0; +\infty]$ |
| 35) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\log \left(\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x} \right) \right];$ | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-e^x}{1-e^x}$ | $[-\infty; 1]$ |

Calcolare i limiti delle seguenti funzioni razionali fratte che si presentano sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ (1-15):

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{4}{x}}{\frac{5x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{5 - \frac{1}{x}} = \frac{3+0}{5-0} = \frac{3}{5}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{3}{x^2}}{\frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} = \frac{2-0+0}{0-0} = \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{5}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{5}{x^3}}{3 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{0-0}{3-0+0} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 2 \sqrt[3]{x}}{3 \sqrt{2x} + \sqrt[4]{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}}}{3 \sqrt{2} x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + 2 \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}}{3 \sqrt{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2x^{-\frac{1}{6}}}{3 \sqrt{2} + x^{-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x^{\frac{1}{6}}}}{3 \sqrt{2} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{\sqrt[6]{x}}}{3 \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}} = \frac{1+0}{3 \sqrt{2} + 0} = \frac{1}{3 \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{\frac{1}{x-2}} + \sqrt{\frac{1}{x^2-4}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3-8}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x-2} \sqrt{x+2}}}{\frac{1}{\sqrt{x-2} \sqrt{x^2+2x+4}}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x-2} \sqrt{x+2}}}{\frac{1}{\sqrt{x-2} \sqrt{x^2+2x+4}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\left(\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x-2} \sqrt{x+2}} \right) (\sqrt{x-2} \sqrt{x^2+2x+4}) \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\left(\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}} \right) (\sqrt{x^2+2x+4}) \right] =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2+2}+1}{\sqrt{2+2}} \right) (\sqrt{4+4+4}) = \frac{3\sqrt{12}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x}{1}}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{5x-4}$$

$$\left[\frac{1}{5}; \frac{3}{5} \right]$$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{4x-3};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x^2}{3x^2-5x}$	$\left[\frac{1}{4}; -\frac{1}{3}\right]$
3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+3x-1}{4x+2};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{3x^2-5x}$	$[\infty; 0]$
4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-6x+2}{3x^2+5x+1};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+6}{6x-1}$	$\left[\frac{4}{3}; \infty\right]$
5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-5x+6}{2x^2-3x+2}$	$[\infty; 2]$
6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-4x+1}{3+7x^2+2x};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+3x}{3+2x+4x^2}$	$\left[\frac{3}{7}; 0\right]$
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-x+5}{2x^2+4x+1};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x+5}{2x^3-3x^2+9}$	$\left[\frac{3}{2}; 0\right]$
8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5+4x^3+9}{x^3-2x+5};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3-4x^2+9}{4x^3+x-2}$	$[\infty; 2]$
9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x^2-4}};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-1}{x-2x^2}$	$\left[4; -\frac{5}{2}\right]$
10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{2}};$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{5}{x} - 3}{\frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} + 8}$	$\left[0; \frac{1}{4}\right]$
11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+5}{x^7-2x^3+4};$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{5x^3+4x+3}}$	$\left[0; \frac{2}{\sqrt[3]{5}}\right]$
12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x-1+3x^2}{2x^2-3x+4};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{2+\sqrt{x}}$	$\left[\frac{3}{2}; 1\right]$
13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x-6}{4x+3}};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{25x+2}{49x-1}}$	$\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{7}\right]$
14) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{3x-1};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{\sqrt{3+x^2}}$	$\left[\frac{1}{3}; 2\right]$
15) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}};$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+2x^2}}$	$\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right]$

Calcolare i limiti delle seguenti funzioni che si presentano sotto la forma indeterminata $+\infty - \infty$ (1-13):

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x \right) \left(\sqrt{x^2+1} + x \right)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x - 3})(x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3})}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 + 2x + 3}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 7}{x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2x}{x} + \frac{7}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{2}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}} = \frac{-2 + 0}{1 - 0 + \sqrt{1 - 0 - 0}} = -\frac{2}{1 + 1} = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt{x(x+3)} - \sqrt{x^2 - 2} \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{x(x+3)} - \sqrt{x^2 - 2}][\sqrt{x(x+3)} + \sqrt{x^2 - 2}]}{\sqrt{x(x+3)} + \sqrt{x^2 - 2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x+3) - (x^2 - 2)}{\sqrt{x(x+3)} + \sqrt{x^2 - 2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 - 2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2}{x^2}}} = \frac{3 + 0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 - 0}} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+1-x-2}{(x-1)(x+1)} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{x^2-1} \right) = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - 1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \right] = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} \right) = -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f) \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin x + \cos x (1 + \cos x)}{\sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin x + \cos x + \cos^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin x + \cos x + 1 - \sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin x (1 - \sin x) + (1 + \cos x)}{\sin x (1 + \cos x)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{\sin x (1 - \sin x)}{\sin x (1 + \cos x)} + \frac{1 + \cos x}{\sin x (1 + \cos x)} \right] = \lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} + \frac{1}{\sin x} \right) = \frac{1 - 0}{1 - 1} + \frac{1}{0} = \infty
\end{aligned}$$

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - x + 3);$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x + 4 + \sqrt{x + 2})$	$[-\infty; -\infty]$
2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x});$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 4})$	$\left[-\frac{5}{2}; 0\right]$
3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{4x^2 + x});$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 6x + 9} - x)$	$\left[-\frac{1}{4}; -3\right]$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 2x - 8} - 2x - 1);$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (4x + 1 - \sqrt{16x^2 + 8x - 2})$	$\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$
5) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3 - \sqrt{2(x-1)(2x-3)});$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{2}x - \sqrt{8x^2 + 2x + 1})$	$\left[\frac{11}{1}; -\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$
6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 16} + 2 - x);$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3 - \sqrt{4x^2 + 12x + 1})$	$[1; 0]$
7) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 1} - x^2 + 1);$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x^2 - \sqrt{\left(2x^2 + \frac{1}{2}\right)^2}\right]$	$\left[1; -\frac{1}{2}\right]$
8) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+1});$	$\lim_{x \rightarrow \infty} [\sqrt{3(x-1)(x-2)} - \sqrt{3x^2 - 20}]$	$\left[0; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
9) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4});$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2})$	$\left[0; \frac{1}{2}\right]$
10) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 3});$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 + 5x + 4})$	$\left[0; -\frac{3}{2}\right]$
11) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 7});$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1})$	$[3; 0]$
12) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 - 4} - \sqrt{x^4 + 3});$	$\lim_{x \rightarrow \infty} [\log(25x + 3) - \log(5x + 2)]$	$[0; \log 5]$
13) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\log(x^2 + 5x - 6) - \log(x^2 - 1)];$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\log x - \log \sin 2x]$	$\left[0; \log \frac{1}{2}\right]$

Calcolare i limiti delle funzioni che si presentano sotto la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ (1-7):

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[(x-2) \frac{1}{x^3 - 8} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{12}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x+1} \sqrt{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{0}{1+0} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(x + \sin x) \frac{1}{2x \cos x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{2x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{2x \cos x} + \frac{\sin x}{2x \cos x} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 \cos x} + \frac{1}{2 \cos x} \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$

1) $\lim_{x \rightarrow 3} \left[(x-3) \sqrt{\frac{1}{x^2 - 9}} \right];$	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sqrt{\frac{1}{x^2 - 5x}} \right)$	$\left[0; \frac{1}{2}\right]$
--	---	-------------------------------

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} \left[(x+1) \sqrt{\frac{1}{2x^2 + 3x + 1}} \right];$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \left[(x^3 - 1) \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right];$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} [(1 - \sin x) \operatorname{tg} x]$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{tg} 2x \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right);$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} [(1 - \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} 2x];$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left[(x+1) \left(1 + \frac{2}{x+1} \right) \right] \quad \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 2 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \sqrt{x^2 + 2} \right) \quad [6; 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 - \cos x) \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right] \quad [0; 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(3 \operatorname{tg} x \frac{1}{x} \right) \quad [0; 3]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 \frac{1}{\sin^2 x} \right) \quad [2; 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} \left(\frac{1}{\sin x - \cos x} \cos 2x \right) \quad [1; -\sqrt{2}]$$

Calcolare i seguenti limiti di funzioni trigonometriche ricordando che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg}^2 x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin px}{2x \cos px};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cos x - 2 \sin x}{4 \sin x + 2x \cos x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \quad [n; 3]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin hx} \quad \left[2; \frac{k}{h} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x-p)}{x-p} \quad \left[\frac{1}{2a}; 1 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 4x} \quad \left[1; \frac{5}{4} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cos^2 x}{x + \frac{p}{2}} \quad [1; 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 2x} \quad \left[5; \frac{5}{2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \quad \left[\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} \quad [2; -2]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} \quad \left[\infty; -\frac{1}{2} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos^3 x}{2 \sin^2 x} \quad \left[0; \frac{9}{4} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^3} \quad \left[\frac{p}{2}; \infty \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x + 3x - x^2}{5 \sin x - x} \quad \left[\frac{1}{2}; \frac{7}{4} \right]$$

$$\begin{array}{ll}
13) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cos x}{(1 - \sin x)^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}} \quad \left[\infty; \sqrt{2} \right] \\
14) \lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \quad \left[\infty; \frac{1}{2} \right] \\
15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - 2x \cos x - 2x^2 - 5x^3}{4 \sin x + 3x \cos x + x^2 - x^3}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 - \cos x)(1 - \cos x)}{x \sin x} \quad \left[\frac{1}{7}; 1 \right]
\end{array}$$

Dire a quali forme di indecisione conducono i seguenti limiti e quindi calcolarli:

$$\begin{array}{ll}
1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \sqrt{x^2 + a^2}}{x^2}; & \lim_{x \rightarrow -b} \frac{x + b}{x + \sqrt{2x^2 - b^2}} \quad \left[-\frac{1}{2a}; -1 \right] \\
2) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}; & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x}}{3 - x} \quad \left[\frac{\sqrt{a}}{2a}; \frac{\sqrt{3}}{6} \right] \\
3) \lim_{x \rightarrow -b} \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{b}}{x + b}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x}) \quad \left[\frac{\sqrt[3]{b}}{b}; -\frac{1}{2} \right] \\
4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x + 4}}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 3}) \quad [-4; 0] \\
5) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 3x}); & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{b^2 x} - \sqrt[3]{b^2}}{x - 1} \quad \left[-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt[3]{b^2}}{3} \right] \\
6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[2x - \sqrt{2(2x^2 + x)} \right]; & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + \sqrt[3]{x^3 - 1}}{3x + 2} \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{3} \right] \\
7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{3x + 2 - \sqrt{25x^2 - x + 4}}; & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - x) \quad [-1; 1] \\
8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - 3x); & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) \quad [-\infty; 0] \\
9) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 5x + 1}); & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - x - \sqrt{2} + 2}{x^2 - 4} \quad \left[\frac{5}{2}; \frac{1 - 2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} \right] \\
10) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 1} - \sqrt{9x^2 + 3x - 1}); & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + 2}} \quad \left[-\frac{1}{2}; 1 \right] \\
11) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 7x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x - 1}); & \lim_{x \rightarrow 2} \left[(x - 2) \sqrt{\frac{1}{x^2 - 4}} \right] \quad \left[-\frac{5}{2}; 0 \right] \\
12) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 2} - \sqrt{x^2 + 4x + 5}); & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{x - 1}} \quad [0; 0] \\
13) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 1 - \sqrt{9x^2 + 6x + 2}); & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{2x - 6}} \quad [0; 0] \\
14) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{16x^2 + 8x - 2} - 4x - 1); & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 + x}} \quad [0; 0] \\
15) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 5} - \sqrt{x + 2}); & \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}) \quad \left[0; \frac{5}{2} \right]
\end{array}$$

- 16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}};$
- 17) $\lim_{x \rightarrow \infty} [\log(x^2 - 1) - \log(x^2 - x + 1)];$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x};$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1};$
- 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$
- 21) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x);$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{x}}{2 - x};$
- 23) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1};$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{x - 1};$
- 25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x + 4e^{-x}}{2e^x - 6e^{-x}};$
- 26) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log \sqrt{3x^2 - 5} - \log \sqrt{4x^2 + 3});$
- 27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{x};$
- 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x};$
- 29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{2x \cos x};$
- 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x (1 - \cos x)}{\sin^2 x};$
- 31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + 4x \cos x}{5 \sin x + 2x \cos x};$
- 32) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{1 + \cos^3 x}{2 \cos^2 \frac{x}{2}};$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{5x-1}}{4 - x^2} \quad \left[+\infty; \frac{5}{24} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)^3 - 8}{x} \quad [0; 12]$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 + 6x + 2}}{x} \quad [1; -\sqrt{2}]$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1 - 2\sqrt{x}}{(x-1)^2} \quad \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{4} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 1}) \quad \left[\frac{1}{4}; 0 \right]$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2}} \quad \left[\frac{3}{2}; 2 \right]$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \quad \left[\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{1}{4} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}} \quad \left[\frac{1}{3}; \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5e^x - 6e^{-x}}{4e^x + 3e^{-x}} \quad \left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{4} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \log x - 5}{3 \log x + 2} \quad \left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\log(3x+1) - \log(2x-1)] \quad \left[\log \frac{\sqrt{3}}{2}; \log \frac{3}{2} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} \quad [2; 2]$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \quad [\infty; 2]$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{p}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} \quad [1; -\sqrt{2}]$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \quad [1; 0]$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{p}{2}} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x} \quad \left[1; \frac{3}{2} \right]$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} 3x} \quad \left[3; -\frac{1}{3} \right]$