

LE DERIVATE

1. GENERALITÀ

Definizione

A) Intuitiva.

La *derivata*, a livello intuitivo, è un operatore tale che:

- a) ad una funzione f associa un'altra funzione;
- b) obbedisce alle seguenti *regole di derivazione*:

$$(1) D(a_0 x^n) = (a_0 x^n)' = n a_0 x^{n-1} \quad \text{derivata di un monomio}$$

ESEMPI

$$D(3x^2) = 2 \cdot 3 \cdot x^{2-1} = 6x$$

$$D(5x^4) = 4 \cdot 5 \cdot x^{4-1} = 20x^3$$

$$D(-4x^3) = 3 \cdot (-4) \cdot x^{3-1} = -12x^2$$

$$(2) D(a_0 x) = a_0 \quad \text{derivata di un monomio con } n = 1$$

ESEMPI

$$D(7x) = 1 \cdot 7 \cdot x^{1-1} = 7x^0 = 7 \cdot 1 = 7, D(10x) = 10, D(3x) = 3$$

$$(3) D(x) = 1 \quad \text{derivata di un monomio con } a_0 = 1 = n$$

$$(4) D(c) = 0 \quad \text{derivata di una costante}$$

ESEMPI

$$D(4) = 0, D(10) = 0, D(25) = 0$$

$$(5) D(x^n) = n x^{n-1} \quad \text{derivata di un monomio con } a_0 = 1$$

Più in generale risulta:

$$(5.1) D(x^a) = a x^{a-1} \quad (a \text{ reale qualsiasi})$$

Ricordando le regole delle potenze:

$$a) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

$$b) a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$c) a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

seguono varie proprietà applicate nei seguenti

ESEMPI

$$D(x^3) = 3x^{3-1} = 3x^2, D(x^5) = 5x^{5-1} = 5x^4, D(x^8) = 8x^{8-1} = 8x^7, D(x^{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1},$$

$$D(x^{1+\sqrt[3]{2}}) = (1+\sqrt[3]{2}) x^{\sqrt[3]{2}}$$

Se $a = \frac{1}{n}$ allora si ha:

$$D\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}$$

che si può scrivere, in modo più semplice, come segue:

$$(6) D\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \text{derivata della radice } n\text{-esima}$$

ESEMPI

$$D\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2 \sqrt{x^{2-1}}} = \frac{1}{2 \sqrt{x}}, D\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^{3-1}}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}, D\left(\sqrt[5]{x}\right) = \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^{5-1}}} = \frac{1}{5 \sqrt[5]{x^4}}$$

Più in generale si ottiene:

$$(7) D\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \frac{f'(x)}{n \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} \quad \text{derivata della radice } n\text{-esima di una funzione}$$

ESEMPI

$$D\left(\sqrt{x^3 - 4x + 2}\right) = \frac{(x^3 - 4x + 2)'}{2 \sqrt{(x^3 - 4x + 2)^{2-1}}} = \frac{3x^2 - 4}{2 \sqrt{x^3 - 4x + 2}}$$

$$D\left(\sqrt[3]{4x^3 + 6x^2 - 5}\right) = \frac{(4x^3 + 6x^2 - 5)'}{3 \sqrt[3]{(4x^3 + 6x^2 - 5)^{3-1}}} = \frac{12x^2 + 12x}{3 \sqrt[3]{(4x^3 + 6x^2 - 5)^2}} = \frac{4x^2 + 4x}{\sqrt[3]{(4x^3 + 6x^2 - 5)^2}}$$

$$D\left(\sqrt[5]{5x + 3}\right) = \frac{(5x + 3)'}{5 \sqrt[5]{(5x + 3)^{5-1}}} = \frac{5}{5 \sqrt[5]{(5x + 3)^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(5x + 3)^4}}$$

$$(8) D[a f(x) \pm b g(x)] = a D f(x) \pm b D g(x) \quad \text{derivata della somma (o differenza) e linearità}$$

ESEMPI

$$D(5x^4 + 3x^2 + 7x + 6) = 5D(x^4) + 3D(x^2) + 7D(x) + 6D(1) = 20x^3 + 6x + 7$$

$$D(6x^3 - 2x^2 + 4x - 6) = 6D(x^3) - 2D(x^2) + 4D(x) - 6D(1) = 18x^2 - 4x + 4$$

$$D(-4x^3 + 7x) = -4D(x^3) + 7D(x) = -12x^2 + 7$$

$$(9) D[f(x)g(x)] = [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{derivata del prodotto}$$

ESEMPI

$$D[(x^2 - 1)(5x + 2)] = (x^2 - 1)'(5x + 2) + (x^2 - 1)(5x + 2)' = 2x(5x + 2) + (x^2 - 1)5 =$$

$$= 10x^2 + 4x + 5x^2 - 5 = 15x^2 + 4x - 5$$

$$D[(2x + 3)(x^2 + 2x)] = (2x + 3)'(x^2 + 2x) + (2x + 3)(x^2 + 2x)' = 2(x^2 + 2x) + (2x + 3)(2x + 2) =$$

$$= 2x^2 + 4x + 4x^2 + 4x + 6x + 6 = 6x^2 + 14x + 6$$

$$D[(3x^3 + 4x + 1)(3x^2 + 4)] = (3x^3 + 4x + 1)'(3x^2 + 4) + (3x^3 + 4x + 1)(3x^2 + 4)' =$$

$$= (9x^2 + 4)(3x^2 + 4) + (3x^3 + 4x + 1)6x = 27x^4 + 36x^2 + 12x^2 + 16 + 18x^4 + 24x^2 + 6x =$$

$$= 45x^4 + 72x^2 + 6x + 16$$

(10) $D \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad g(x) \neq 0$ *derivata del quoziente*

ESEMPLI

$$D \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = \frac{(x)'(x^2 + 1) - x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$D \left(\frac{x^3}{4 - x} \right) = \frac{(x^3)'(4 - x) - x^3(4 - x)'}{(4 - x)^2} = \frac{3x^2(4 - x) - x^3(-1)}{(4 - x)^2} = \frac{-2x^3 + 12x^2}{(4 - x)^2}$$

$$D \left(\frac{1 + x^2}{4 + x^2} \right) = \frac{(1 + x^2)'(4 + x^2) - (1 + x^2)(4 + x^2)'}{(4 + x^2)^2} = \frac{2x(4 + x^2) - (1 + x^2)2x}{(4 + x^2)^2} =$$

$$= \frac{6x}{(4 + x^2)^2}$$

(11) $D[f(g(x))] = f'[\dots]g'[\dots] = f'[g(x)]g'(x)$ *derivata di funzioni composte*

ESEMPLI

$$D(\sqrt{4x^2 - 3}) = \left[(4x^2 - 3)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 - 3}} (4x^2 - 3)' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2 - 3}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 3}}$$

$$D \left[\sqrt[5]{(2x^3 + 1)^2} \right] = \left[\sqrt[5]{(2x^3 + 1)^2} \right]' = \left[(2x^3 + 1)^{\frac{2}{5}} \right]' = \frac{2}{5} (2x^3 + 1)^{-\frac{3}{5}} [(2x^3 + 1)'] =$$

$$= \frac{2}{5\sqrt[5]{(2x^3 + 1)^3}} 6x^2 = \frac{12x^2}{5\sqrt[5]{(2x^3 + 1)^3}}$$

$$D(\sqrt[3]{x^2 - 7x}) = \left[(x^2 - 7x)^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} (x^2 - 7x)^{\frac{1}{3}-1} (x^2 - 7x)' = \frac{2x - 7}{3\sqrt[3]{(x^2 - 7x)^2}}$$

$$D[(3x^2 - x)^5] = 5(3x^2 - x)^{5-1} (3x^2 - x)' = 5(3x^2 - x)^4 (6x - 1)$$

(12) $D[e^{f(x)}] = e^{f(x)} f'(x)$ *derivata di funzioni esponenziali*

ESEMPLI

$$D(e^{x^2 + 5x + 2}) = e^{x^2 + 5x + 2} (x^2 + 5x + 2)' = e^{x^2 + 5x + 2} (2x + 5)$$

$$D(e^{3x^3 + 7x}) = e^{3x^3 + 7x} (3x^3 + 7x)' = e^{3x^3 + 7x} (9x^2 + 7)$$

$$D \left(e^{\frac{x^3 + 3}{x^2 + 1}} \right) = e^{\frac{x^3 + 3}{x^2 + 1}} \left(\frac{x^3 + 3}{x^2 + 1} \right)' = e^{\frac{x^3 + 3}{x^2 + 1}} \left[\frac{3x^2(x^2 + 1) - (x^3 + 3)2x}{(x^2 + 1)^2} \right] = e^{\frac{x^3 + 3}{x^2 + 1}} \frac{x^4 + 3x^2 - 6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$D \left(e^{\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}} \right) = e^{\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}} \left(\frac{2x^2+4x}{3x^2+5} \right)' = e^{\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}} \left[\frac{4x(3x^2+5) - (2x^2+4x)6x}{(3x^2+5)^2} \right] =$$

$$= e^{\frac{2x^2+4x}{3x^2+5}} \frac{-24x^2+20x}{(3x^2+5)^2}$$

$$(13) D [\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{derivata di funzioni logaritmiche}$$

ESEMPI

$$D [\ln(3x^2+2)] = \frac{1}{3x^2+2} (3x^2+2)' = \frac{6x}{3x^2+2}$$

$$D [\ln(x^3-2x-1)] = \frac{1}{x^3-2x-1} (x^3-2x-1)' = \frac{3x^2-2}{x^3-2x-1}$$

$$D \left[\ln \left(\frac{2x^2+4x}{3x^2+5} \right) \right] = \frac{3x^2+5}{2x^2+4x} \left(\frac{2x^2+4x}{3x^2+5} \right)' = \frac{3x^2+5}{2x^2+4x} \frac{-24x^2+20x}{(3x^2+5)^2} = \frac{-24x^2+20x}{(2x^2+4x)(3x^2+5)}$$

Osservazione: riteniamo opportuno richiamare l'attenzione dello studente su alcune proprietà dei logaritmi che si riveleranno particolarmente utili soprattutto per lo studio di funzioni:

- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ con $a, b > 0$ e $a \neq 1$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ con $a, b, c > 0$ e $a \neq 1$
- $\log_a(b^n) = n \log_a b$ con $a, b > 0$ e $a \neq 1$ e n intero positivo
- $\log_a(\sqrt[n]{b}) = \frac{1}{n} \log_a b$ con $a, b > 0$ e $a \neq 1$ e n intero positivo
- $\log_a a = 1$ con $a > 0$ e $a \neq 1$
- $\log_a 1 = 0$ con $a > 0$ e $a \neq 1$
- $\log_a 0 = -\infty$ con $a > 0$ e $a \neq 1$
- $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ formula del cambio di base con N intero positivo

Inoltre, sfruttando la definizione classica di logaritmo, è facile verificare l'equivalenza delle seguenti espressioni:

$$z = \log_a b; \quad a^z = b; \quad a^{\log_a b} = b;$$

In generale si è soliti indicare con $\ln$ o anche con $\log$ il logaritmo naturale o *Neperiano*, cioè in base e .

B) Tecnica.

Per poter fornire la definizione rigorosa del concetto di derivata occorrono alcune definizioni preliminari.

Definizione di rapporto incrementale. Sia data una funzione nella sua forma generica $y = f(x)$. Per la definizione di funzione sappiamo che, scegliendo un valore x_1 , la funzione genererà un corrispondente valore di y , cioè $f(x_1)$. Se ora forniamo ad x_1 un incremento $\Delta x = h$, positivo o negativo, otteniamo un corrispondente valore della y , pari ad $f(x_1 + h)$. Ne segue che la differenza tra $f(x_1 + h)$ ed $f(x_1)$, cioè:

$$\Delta y = f(x_1 + h) - f(x_1)$$

rappresenta la variazione assoluta del valore della funzione, ovvero l'*incremento* che la funzione subisce quando dal valore x_1 si passa al valore $x_1 + h$: tale differenza può essere positiva, nulla o negativa.
Se consideriamo ora il rapporto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

tra l'incremento della funzione e quello corrispondente della variabile indipendente, $\Delta x = h$, riusciamo ad identificare un tasso di variazione media della funzione, ovvero un numero che indica la variazione media della y per ogni variazione unitaria della x nell'intervallo considerato. Tale rapporto prende il nome di *rapporto incrementale* della funzione $f(x)$ relativo al punto x_1 e all'incremento h .

Esempio

Calcolare il rapporto incrementale della funzione $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$, relativo al punto $x_1 = 1$ e all'incremento $h = \frac{1}{2}$.

Sfruttando la definizione si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{f\left(1 + \frac{1}{2}\right) - f(1)}{\frac{1}{2}} = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right) - f(1)}{\frac{1}{2}}$$

Essendo poi:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 4 \cdot \frac{9}{4} - 3 + 3 = 9$$

$$f(1) = 4(1)^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 4 - 2 + 3 = 5$$

risulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 - 5}{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot 2 = 8$$

Esempio

Calcolare il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \sqrt{x-3}$, relativo al punto $x_1 = 3$ e ad un generico incremento.

Sfruttando la definizione si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$$

Essendo poi:

$$f(3 + h) = \sqrt{(3 + h) - 3} = \sqrt{3 + h - 3} = \sqrt{h}$$

$$f(3) = \sqrt{3 - 3} = 0$$

risulta:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h}$$

Definizione.

Sia data la funzione $y = f(x)$. Costruiamo il suo rapporto incrementale nel punto x_1 ; facciamo tendere a zero l'incremento h , sia per valori positivi che per valori negativi, e consideriamo il limite del rapporto incrementale per h che tende a zero, cioè:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Allora, se tale limite esiste ed è finito, prende il nome di *derivata* della funzione per $x = x_1$. In particolare la derivata si indica con uno dei seguenti simboli:

$$f'(x) \quad y' \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad D[f(x)] \quad D(y)$$

Esempio

Sia data la funzione $y = x^3$. Sfruttando la definizione B), calcolare la sua derivata.

In primo luogo dobbiamo calcolare il rapporto incrementale relativamente al punto $x = 2$ e ad un generico incremento h , cioè:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \frac{(2 + h)^3 - (2)^3}{h} = \frac{8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8}{h} = \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h}$$

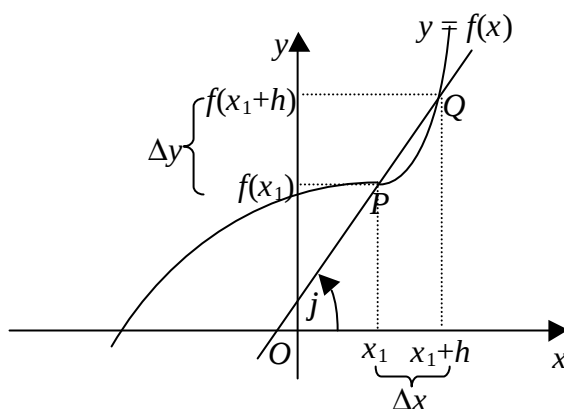
da cui, passando al limiti, si ha:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + 6h^2 + 12h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h^2 + 6h + 12)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 6h + 12) = 12$$

A questo punto risulta particolarmente interessante visualizzare graficamente il concetto sia di rapporto incrementale che di derivata prima.

Rapporto incrementale

Supponiamo di conoscere, in un piano cartesiano, il grafico della funzione $y = f(x)$. Indichiamo con P e Q i punti di tale grafico di ascisse rispettivamente x_1 ed $x_1 + h$.

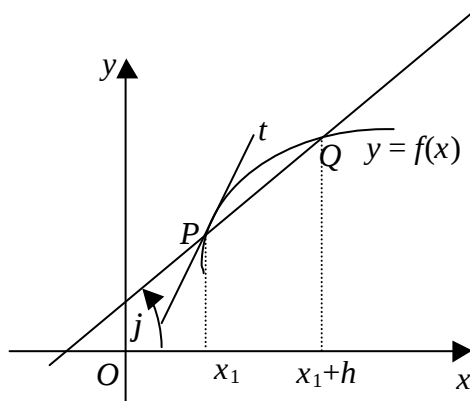


È facile verificare, almeno graficamente, che il rapporto incrementale della funzione $f(x)$ relativo al punto x_1 e all'incremento h è uguale al coefficiente angolare della retta secante il grafico nei punti P e Q .

Derivata prima

Supponiamo di conoscere, in un piano cartesiano, il grafico della funzione $y = f(x)$ e che tale funzione sia derivabile nel punto x_1 , ovvero che esista la sua derivata prima in x_1 . Se facciamo tendere h a zero, ossia

se attribuiamo ad h valori via via sempre più piccoli, il punto Q si avvicinerà sempre più al punto P e la retta secante si avvicinerà sempre più alla retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto P .



È facile verificare, almeno graficamente, che la derivata prima della funzione $f(x)$ nel punto x_1 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico nel suo punto P , di ascissa proprio x_1 .

Quindi, in base al valore assunto dalla retta tangente nel punto prescelto, è possibile assumere informazioni sulla funzione; in particolare:

$f'(x_1) > 0 \Rightarrow$ la funzione è crescente in x_1

$f'(x_1) < 0 \Rightarrow$ la funzione è decrescente in x_1

$f'(x_1) = 0 \Rightarrow$ la funzione è stazionaria in x_1

Osserviamo che, dal punto di vista economico, il concetto di derivata prima viene utilizzato, ad esempio, qualora si fa riferimento alle funzioni di costo e di ricavo!!!

2. TABELLA DELLE DERIVATE PIÙ COMUNI

Riportiamo qui di seguito una tabella riassuntiva delle derivate di alcune funzioni elementari, scrivendo a sinistra la funzione e, nella stessa linea, a destra, la sua derivata:

$$y = c$$

$$y = x$$

$$y = x^n, n \in \mathbb{N}$$

$$y = x^a, a \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt[n]{x^m}, n > m$$

$$y = \sin x$$

$$y = \cos x$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y = \operatorname{ctg} x$$

$$y = e^x$$

$$y = a^x, a > 0$$

$$y = x^x$$

$$y = \ln x, x > 0$$

$$y = \log_a x, x > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$y = \arcsin x, -\frac{p}{2} < y < \frac{p}{2}$$

$$y = \arccos x, 0 < y < p$$

$$y = \operatorname{arctg} x$$

$$y = \operatorname{arcctg} x$$

$$y' = 0$$

$$y' = 1$$

$$y' = nx^{n-1}$$

$$y' = a x^{a-1}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$$y' = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$$

$$y' = e^x$$

$$y' = a^x \log a$$

$$y' = x^x (1 + \ln x)$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Riportiamo adesso un elenco di derivate di funzioni elementari ottenuto dalla tabella precedente sostituendo alla variabile indipendente x una certa funzione $f(x)$ di cui si conosca la derivata ed applicando poi la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$y = [f(x)^n]$$

$$y' = n [f(x)]^{n-1} f'(x)$$

$$y = \sqrt{f(x)}$$

$$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$y = \sqrt[n]{[f(x)]^m}$$

$$y' = \frac{m}{n \sqrt[n]{[f(x)]^{n-m}}}$$

$$y = \sin f(x)$$

$$y' = \cos f(x) f'(x)$$

$$y = \cos f(x)$$

$$y' = -\sin f(x) f'(x)$$

$$y = \operatorname{tg} f(x)$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$$

$$y = \operatorname{ctg} f(x)$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 f(x)} f'(x)$$

$$y = \arcsin f(x)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} f'(x)$$

$$y = \arccos f(x)$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} f'(x)$$

$$y = \operatorname{arctg} f(x)$$

$$y' = \frac{1}{1+[f(x)]^2} f'(x)$$

$$y = \operatorname{arcctg} f(x)$$

$$y' = -\frac{1}{1+[f(x)]^2} f'(x)$$

$$y = e^{f(x)}$$

$$y' = e^{f(x)} f'(x)$$

$$y = a^{f(x)}$$

$$y' = a^{f(x)} \ln a f'(x)$$

$$y = \ln f(x)$$

$$y' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$y = \log_a f(x)$$

$$y' = \frac{1}{f(x)} \log_a e f'(x)$$

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \left[g'(x) \log f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right]$$

ESERCIZI PROPOSTI

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni polinomiali:

$y = 3x^2 + 1$	$[6x]$
$y = 5x + 7$	$[5]$
$y = 2x - 5$	$[2]$
$y = 3x^2 - 6x + 4$	$[6x - 6]$
$y = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$	$[12x^2 - 4x + 5]$
$y = 4x^2 - 1$	$[8x]$
$y = 1 + x + x^2$	$[1 + 2x]$
$y = x^3 - 2x$	$[3x^2 - 2]$
$y = 3x - 1$	$[3]$
$y = 4x^2$	$[8x]$
$y = 4x^2 + 5$	$[8x]$
$y = x^5 + 4x^2$	$[5x^4 + 8x]$
$y = x^3 + 2x^2 + 1$	$[3x^2 + 4x]$
$y = 3x^4 - 5x^3 + 4x - 7$	$[12x^3 - 15x^2 + 4]$
$y = 8x^5 - 24x^3 + 7$	$[40x^4 - 72x^2]$
$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 5x + 9$	$[x + x^2 + 5]$
$y = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$	$[6x^2 + 18x + 7]$
$y = (x^2 - 1)(5x + 2)$	$[15x^2 + 4x - 5]$
$y = (x^2 + 1)^5$	$[10x(x^2 + 1)^4]$
$y = \frac{5x^3}{4} - \frac{7x^2}{2} - \frac{3x}{5} + 9$	$\left[\frac{15}{4}x^2 - 7x - \frac{3}{5}\right]$
$y = x(x - 1)^3$	$[-(2x + 1)(x - 1)^2]$
$y = (1 + x^2)(2x - 5)$	$[6x^2 - 10x + 2]$
$y = (2x - 1)^2(3 - 7x)^5$	$[(2x - 1)(3 - 7x)^4(-98x + 47)]$
$y = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$	$[6x^2 + 18x + 7]$
$y = (1 - 2x^2)(3x + 1)$	$[-18x^2 - 4x + 3]$
$y = (3 - 2x - x^2)(x^4 - 2x^2)$	$[2x(-3x^4 - 5x^3 + 10x^2 + 6x - 6)]$
$y = x^2(4 + x)(5x + 1)$	$[x(20x^2 + 63x + 8)]$
$y = (8x - 1)^{10}$	$[80(8x - 1)^9]$
$y = (x - 1)^2(x - 2)$	$[(x - 1)(3x - 5)]$
$y = (5 + x^3)(1 - 2x - 4x^3)^2$	$[(1 - 2x - 4x^3)(-36x^5 - 10x^3 - 117x^2 - 20)]$
$y = (1 - 3x)^4(1 + x)$	$[(11 + 15x)(3x - 1)^3]$
$y = (2 - x)^2(x^3 + 2x)$	$[(2 - x)(-5x^3 + 6x^2 - 6x + 4)]$
$y = (x - 2)^3(x + 1)^2$	$[(x + 1)(x - 2)^2(5x - 1)]$
$y = (x^2 + x + 1)^3(x - 1)^4$	$[(x^2 + x + 1)^2(x - 1)^3(10x^2 + x + 1)]$
$y = (x^6 + 1)(3x + 1)^8$	$[6(3x + 1)^7(7x^6 + x^5 + 4)]$
$y = (x^2 + 2x - 3)^3(4 - x^2)^7$	$[2(12 + 33x - 17x^2 - 10x^3)(x^2 + 2x - 3)^2(4 - x^2)^6]$
$y = 2(x + 2)^2(x^2 + 4x - 3)$	$[4(x + 2)(2x^2 + 8x + 1)]$
$y = x^2(x^4 + 1)^3 + 3x(x^2 + 1)$	$[2x(x^4 + 1)^2(7x^4 + 1) + 3(3x^2 + 1)]$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni razionali fratte:

$$y = \frac{5}{x+1}$$

$$\left[-\frac{5}{(x+1)^2} \right]$$

$$y = \frac{x+1}{2x}$$

$$\left[-\frac{1}{2x^2} \right]$$

$$y = \frac{x-3}{x-4}$$

$$\left[-\frac{1}{(x-4)^2} \right]$$

$$y = \frac{2x-3}{3x-4}$$

$$\left[\frac{1}{(3x-4)^2} \right]$$

$$y = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\left[-\frac{4}{(x-3)^2} \right]$$

$$y = \frac{3x-4}{x^2-1}$$

$$\left[\frac{x(5-3x)}{(x^2-1)^2} \right]$$

$$y = \frac{1}{x^2-1}$$

$$\left[-\frac{2x}{(x^2-1)^2} \right]$$

$$y = \frac{4x^2+1}{x}$$

$$\left[\frac{(2x+1)(2x-1)}{x^2} \right]$$

$$y = \frac{x^2-3x-1}{x+1}$$

$$\left[\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2} \right]$$

$$y = \frac{(1-x)^2}{x}$$

$$\left[\frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \right]$$

$$y = \frac{3x^2-5}{x^2-1}$$

$$\left[\frac{4x}{(x^2-1)^2} \right]$$

$$y = \frac{4x^2-5x+3}{x^2-6x+5}$$

$$\left[-\frac{19x^2-34x+7}{(x^2-6x+5)^2} \right]$$

$$y = \frac{3x^2-2x+3}{x^2-2x-1}$$

$$\left[-\frac{4(x^2+3x-2)}{(x^2-2x-1)^2} \right]$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\left[-\frac{1}{x^2} \right]$$

$$y = \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{x} + x^3$$

$$\left[\frac{3x^5+3x-1}{x^3} \right]$$

$$y = 3x^2 + 9x + \frac{1}{x}$$

$$\left[\frac{6x^3+9x^2-1}{x^2} \right]$$

$$y = \frac{x^2 + x^6 - 3x^3}{x^4}$$

$$y = x^3 - 2x - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^3}$$

$$y = \frac{2x}{3-x}$$

$$y = \frac{1+x^2}{4+x^2}$$

$$y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$$

$$y = \frac{x^3}{4-x}$$

$$y = \frac{x^2+1}{5x-7}$$

$$y = \frac{8x+x^5}{x+1}$$

$$y = \frac{4x^2-5}{x+1}$$

$$y = 2x - \frac{x}{x^2+1}$$

$$y = \left(2x + \frac{5}{x}\right)^3$$

$$y = \left(x - 1 - \frac{3}{x}\right)^4$$

$$y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$$

$$y = \frac{x^2+x+2}{x^2-1}$$

$$y = \frac{7}{(x^3+8)^2}$$

$$y = \frac{x}{x^3+x^2+2}$$

$$\left[-\frac{2}{x^3} + 2x + \frac{3}{x^2}\right]$$

$$\left[3x^2 - 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^4}\right]$$

$$\left[\frac{6}{(3-x)^2}\right]$$

$$\left[\frac{6x}{(4+x^2)^2}\right]$$

$$\left[\frac{16x}{(x^2+4)^2}\right]$$

$$\left[\frac{2x^2(6-x)}{(4-x)^2}\right]$$

$$\left[\frac{5x^2-14x-5}{(5x-7)^2}\right]$$

$$\left[\frac{4x^5+5x^4+8}{(x+1)^2}\right]$$

$$\left[\frac{4x^2+8x+5}{(x+1)^2}\right]$$

$$\left[\frac{2x^4+5x^2+1}{(x^2+1)^2}\right]$$

$$\left[3\left(2x + \frac{5}{x}\right)^2\left(2 - \frac{5}{x^2}\right)\right]$$

$$\left[4\left(x - 1 - \frac{3}{x}\right)^3\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)\right]$$

$$\left[\frac{16x}{(x^2+4)^2}\right]$$

$$\left[\frac{-x^2-6x-1}{(x^2-1)^2}\right]$$

$$\left[-\frac{42x^2}{(x^3+8)^3}\right]$$

$$\left[\frac{-2x^3-x^2+2}{(x^3+x^2+2)^2}\right]$$

$$y = \frac{x^3}{2x^2 - 3x + 1}$$

$$y = x^2 + 2 + \frac{x^3}{4 - x}$$

$$y = \frac{x^3 + x + 1}{x - 1}$$

$$y = \frac{3x - 1}{(4 - 5x)^2}$$

$$y = \frac{4x^2 - 5}{x + 1}$$

$$y = 5(x^2 + 9) - \frac{7}{x}$$

$$y = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^3 (x^2 - 1)$$

$$\left[\frac{x^2(2x^2 - 6x + 3)}{(2x^2 - 3x + 1)^2} \right]$$

$$\left[\frac{4x(8 - x)}{(4 - x)^2} \right]$$

$$\left[\frac{2x^3 - 3x^2 - 2}{(x - 1)^2} \right]$$

$$\left[\frac{15x + 2}{(4 - 5x)^3} \right]$$

$$\left[\frac{4x^2 + 8x + 5}{(x + 1)^2} \right]$$

$$\left[\frac{10x^3 + 7}{x^2} \right]$$

$$\left[\left(\frac{2x^2 + 1}{x} \right)^2 \left(\frac{6x^4 - x^2 + 1}{x^2} \right) \right]$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni irrazionali:

$$y = \sqrt{x}$$

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 7x}$$

$$\left[\frac{2x - 7}{\sqrt[3]{(x^2 - 7x)^2}} \right]$$

$$y = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} \right]$$

$$y = \sqrt{4x^2 - 3}$$

$$\left[\frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 3}} \right]$$

$$y = \sqrt{x^3 - 4x + 2}$$

$$\left[\frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x + 2}} \right]$$

$$y = \sqrt{x^4 + x^2 - 2x}$$

$$\left[\frac{2x^3 + x - 1}{\sqrt{x^4 + x^2 - 2x}} \right]$$

$$y = (x - 1)\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\left[\frac{2x^2 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right]$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\left[\frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}} \right]$$

$$y = \sqrt[5]{5x+3}$$

$$y = \sqrt[3]{4x^3 + 6x^2 - 5}$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$$

$$y = \sqrt[5]{(2x^3+1)^2}$$

$$y = 8x + \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x-1}$$

$$y = 2\sqrt{x} + 2x + 1$$

$$y = (x^2 + 2\sqrt{x})^5$$

$$y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{\sqrt[7]{x}} + 4\sqrt[4]{x^3}$$

$$y = \sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

$$y = x^7 - 3\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$$

$$y = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y = \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$y = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \sqrt{x} - 5\sqrt[3]{x^2}$$

$$y = 8\sqrt{x} - 7\sqrt[3]{x^2}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt[5]{(5x+3)^4}} \right]$$

$$\left[\frac{4x(x+1)}{\sqrt[3]{(4x^3+6x^2-5)^2}} \right]$$

$$\left[\frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2} \right]$$

$$\left[\frac{12x^2}{5\sqrt[5]{(2x^3+1)^3}} \right]$$

$$\left[8 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right]$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right]$$

$$\left[5(x^2 + 2\sqrt{x})^4 \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right]$$

$$\left[3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[7]{x^8}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \right]$$

$$\left[\frac{\sqrt{x}+1}{4x\sqrt[4]{x}} \right]$$

$$\left[7x^6 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}} \right]$$

$$\left[\frac{x+2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \right]$$

$$\left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right]$$

$$\left[\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} \right]$$

$$\left[-\frac{1}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} \right]$$

$$\left[\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right]$$

$y = 4\sqrt{x} + 16\sqrt[4]{x}$	$\left[\frac{2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x}}{x} \right]$
$y = 25x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 7$	$\left[50x - \frac{1}{2x\sqrt{x}} \right]$
$y = \sqrt{2}x^3 - 4\sqrt[5]{x} + 25$	$\left[3\sqrt{2}x^2 - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^4}} \right]$
$y = x\sqrt[3]{x^2 - 1}$	$\left[\frac{5x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} \right]$
$x + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[5]{x}}$	$\left[\frac{x^2 - \sqrt{x} - \sqrt[5]{x^4}}{x^2} \right]$
$y = \frac{x^4 + 4x}{\sqrt{x}}$	$\left[\frac{7}{2}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right]$
$y = 2x\sqrt{x} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{x\sqrt{x}} + 2x^6 - 3$	$\left[3\sqrt{x} - \frac{1}{8\sqrt{x}} + 12x^5 \right]$
$y = \frac{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[5]{x^2}}{x\sqrt{x}}$	$\left[-\frac{23}{30x\sqrt[30]{x^{23}}} \right]$
$y = \frac{1 + \sqrt[4]{x^3}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$	$\left[\frac{3}{2\sqrt[4]{x}(1 - \sqrt[4]{x^3})^2} \right]$
$y = \frac{2 - \sqrt[3]{x^2}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}$	$\left[-\frac{8}{3\sqrt[3]{x}(2 + \sqrt[3]{x^2})^2} \right]$
$y = \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 + 3}$	$\left[x^4 + 9x^2 - \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{3}{2\sqrt{x}} \right]$
$y = (15x^2 - 12x + 8)\sqrt{(x+1)^3}$	$\left[\frac{105}{2}x^2\sqrt{x+1} \right]$
$y = \left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt[5]{x^3} \right)^2$	$\left[2\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt[5]{x^3} \right) \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - x + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}} \right) \right]$
$y = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{7x + 1}$	$\left[\frac{\sqrt{x^2 + 4} - x + 28}{(7x + 1)^2\sqrt{x^2 + 4}} \right]$
$y = \frac{\sqrt{2 - x^2} + x}{3 + x}$	$\left[\frac{-3x - 2 + 3\sqrt{2 - x^2}}{(3 + x)^2\sqrt{2 - x^2}} \right]$
$y = \frac{3 - x^2}{\sqrt[3]{x + 2}}$	$\left[\frac{-5x^2 - 12x - 3}{3\sqrt[3]{(x + 2)^4}} \right]$

$$y = \frac{x^5 - x^3}{\sqrt{x+1}}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$$

$$y = x \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \left(\frac{1}{x^2} + 2 \right)$$

$$\left[\frac{x^2(9x^2 - x - 6)}{2\sqrt{x+1}} \right]$$

$$\left[\frac{x+2}{2(x+1)\sqrt{x+1}} \right]$$

$$\left[-\frac{2x}{(1+x)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \right]$$

$$\left[\frac{-2x^4 + x^2 + 4}{x^4 \sqrt{x^2-1}} \right]$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni esponenziali e logaritmiche:

$$y = \ln(2x-1)$$

$$\left[\frac{2}{2x-1} \right]$$

$$y = \ln(x+3)$$

$$\left[\frac{1}{x+3} \right]$$

$$y = e^{x+1}$$

$$[e^{x+1}]$$

$$y = xe^x$$

$$[(1+x)e^x]$$

$$y = e^{5-x^2}$$

$$[-2xe^{5-x^2}]$$

$$y = \frac{x^4+1}{e^4+1}$$

$$\left[\frac{4x^3}{e^4+1} \right]$$

$$y = x \ln x$$

$$[\ln x + 1]$$

$$y = x^2 \ln x + 3x$$

$$[2x \ln x + x + 3]$$

$$y = e^{-\frac{3}{x^2}}$$

$$\left[\frac{2}{x^3} e^{-\frac{3}{x^2}} \right]$$

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

$$\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \right]$$

$$y = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$$

$$\left[\frac{2}{x(\ln x + 1)^2} \right]$$

$$y = x^3 e^x + e^x - 1$$

$$[e^x(x^3 + 3x^2 + 1)]$$

$$y = e^x(2 - e^x)$$

$$[2e^x(1 - e^x)]$$

$$y = e^x(x^3 - x + 7)$$

$$[e^x(x^3 + 3x^2 - x + 6)]$$

$$y = x \ln^3 x - 3x \ln^2 x + 6x \ln x - 6x$$

$$[\ln^3 x]$$

$$y = x^2(\ln x)^3$$

$$[x(\ln x)^2(2 \ln x + 3)]$$

$$y = 5x \ln^2 x - 6x^3 \ln^5 x$$

$$[-18x^2 \ln^5 x - 30x^2 \ln^4 x + 5 \ln^2 x + 10 \ln x]$$

$$y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

$$\left[\frac{1}{x^2} (1 - \ln x) \right]$$

$$y = (x \ln x - 1)^2$$

$$[2(x \ln x - 1)(\ln x + 1)]$$

$$y = 3x \ln x$$

$$[3(\ln x + 1)]$$

$$y = x^2 \ln x$$

$$[x(2 \ln x + 1)]$$

$$y = x \ln^3 x$$

$$y = \frac{1}{2} \ln^2 x - \ln x + \sqrt{x}$$

$$y = \ln \left(x + \sqrt{4 + x^2} \right)$$

$$y = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right) - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$y = \ln^2 x + 3x + 5$$

$$y = 4x \ln^4 x + 7x^5 \ln^5 x$$

$$y = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$y = x \sqrt{1 + x^2} + \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right)$$

$$y = \ln(x^2 - 7x - 8)$$

$$y = (x-1) \ln^3 x$$

$$y = e^{x^2 - 2x}$$

$$y = x e^{\frac{x-1}{x}}$$

$$y = \ln \sqrt[5]{x^2 + 4}$$

$$y = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

$$y = \ln \left(\frac{x}{x-1} \right)$$

$$y = \ln(x^3 + x^2 + 8)$$

$$y = \ln \sqrt[3]{4x^2 + 5x - 1}$$

$$y = \ln \sqrt{\frac{x^2 + 1}{2x + 3}}$$

$$[\ln^2 x (\ln x + 3)]$$

$$\left[\frac{2 \ln x - 2 + \sqrt{x}}{2x} \right]$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} \right]$$

$$\left[\frac{x^2 - 2}{x^3 (x-1)} \right]$$

$$\left[\frac{2 \ln x + 3x}{x} \right]$$

$$\left[\ln^3 x (35x^4 \ln^2 x + 35x^4 \ln x + 4 \ln x + 16) \right]$$

$$\left[\frac{1}{x^3} (1 - 2 \ln x) \right]$$

$$\left[2 \sqrt{1 + x^2} \right]$$

$$\left[\frac{2x - 7}{x^2 - 7x - 8} \right]$$

$$\left[\frac{x \ln^3 x + 3(x-1) \ln^2 x}{x} \right]$$

$$\left[2(x-1) e^{x^2 - 2x} \right]$$

$$\left[e^{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{x+1}{x} \right]$$

$$\left[\frac{2x}{5(x^2 + 4)} \right]$$

$$\left[\frac{1}{x^3 (x+1)} \right]$$

$$\left[-\frac{1}{x(x-1)} \right]$$

$$\left[\frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 + 8} \right]$$

$$\left[\frac{8x + 5}{3(4x^2 + 5x - 1)} \right]$$

$$\left[\frac{x^2 + 3x - 1}{(2x + 3)(x^2 + 1)} \right]$$

$y = \sqrt{\ln(x^2 + 4)}$	$\left[\frac{x}{(x^2 + 4)\sqrt{\ln(x^2 + 4)}} \right]$
$y = \sqrt[3]{\ln x + \sqrt{x^2 + 1}}$	$\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{\ln x + \sqrt{x^2 + 1}}} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \right]$
$y = \frac{1}{x^2} \ln^3(2x + \sqrt[5]{x})$	$\left[-\frac{2}{x^3} \ln^3(2x + \sqrt[5]{x}) + \frac{6}{x^2} \frac{\ln^2(2x + \sqrt[5]{x})}{2x + \sqrt[5]{x}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \right]$
$y = \ln \left(\frac{\sqrt{e^x}}{1 + \sqrt{1 + e^x}} \right)$	$\left[\frac{e^{\sqrt{x}}(2\sqrt{1 + e^x} + e^x + 2)}{4\sqrt{1 + e^x}} \right]$
$y = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}$	$\left[\frac{2}{x(\ln x + 1)^2} \right]$
$y = \frac{e^x + 1}{2 - e^x}$	$\left[\frac{3e^x}{(2 - e^x)^2} \right]$
$y = \frac{e^x}{x^3 + x^2}$	$\left[\frac{e^x(x^3 - 2x^2 - 2x)}{(x^3 + x^2)^2} \right]$
$y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$	$\left[\frac{1}{x(1 + \ln x)} \right]$
$y = \ln(\ln x)$	$\left[\frac{1}{x \ln x} \right]$
$y = \ln(e^x - 2)$	$\left[\frac{e^x}{e^x - 2} \right]$
$y = \ln(5e^x \sqrt{x^2 - 1})$	$\left[\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \right]$
$y = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) + x$	$\left[\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \right]$