

SOLUZIONE COMMENTATA

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

CORSO DI MATEMATICA PER L'ECONOMIA

III° MODULO

- 1) Individuare il campo di esistenza della seguente funzione polinomiale:

$$y = x^2 + 5x + 6$$

- ☒ i
- ☐ $x \neq 3$
- ☐ $x \neq 6$
- ☐ $x \neq -3, x \neq -6$

Poiché la funzione data è polinomiale, essa risulta definita su tutto l'asse reale: una qualunque funzione polinomiale, infatti, è definita su tutto i !!!

- 2) Individuare il campo di esistenza della seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{2x-1}{x^2+1}$$

- ☒ $-\infty < x < +\infty$
- ☐ $x \neq -1$
- ☐ $x \neq \frac{1}{2}$
- ☐ $x \neq +1, x \neq -1$

Poiché la funzione data è razionale fratta, essa risulta definita su tutto l'asse reale tranne nei punti ove si annulla il denominatore della frazione; nel caso in esame, quindi, bisogna porre la condizione $x^2 + 1 \neq 0$, che è sempre verificata essendo $x^2 + 1$ la somma di due quadrati, ovvero una quantità sempre positiva; del resto, risolvendo l'equazione associata, cioè $x^2 + 1 = 0$, si può subito constatare che essa presenta $\Delta < 0$, per cui $x^2 + 1 = 0$ non è mai soddisfatta.

- 3) Individuare il campo di esistenza della seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4}$$

- ☐ i
- ☐ $x \neq 2$
- ☐ $x \neq -2$
- ☒ $x \neq +2, x \neq -2$

Poiché la funzione data è razionale fratta, essa risulta definita su tutto l'asse reale tranne nei punti ove si annulla il denominatore della frazione; nel caso in esame, quindi, bisogna porre la condizione $x^2 - 4 \neq 0$; inoltre l'equazione associata, $x^2 - 4 = 0$, ha come soluzioni $x = +2, x = -2$; ne segue che $x^2 - 4 \neq 0$ ha come soluzioni $x \neq +2, x \neq -2$.

4) Individuare l'equazione dell'asintoto verticale della seguente funzione:

$$y = \frac{x-1}{2x+2}$$

- ☐ $x = 1$
- ☐ $x = \frac{1}{2}$
- ☒ $x = -1$
- ☐ $x = 2$

L'asintoto verticale di una funzione razionale fratta si ottiene dal campo di esistenza della funzione, precisamente uguagliando a zero il denominatore; ne segue:

$$2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{2} \Rightarrow x = -1$$

5) Individuare l'equazione dell'asintoto orizzontale della seguente funzione:

$$y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4}$$

- ☐ $y = \frac{1}{2}$
- ☒ $y = -1$
- ☐ $y = 1$
- ☐ $y = 2$

L'asintoto orizzontale di una funzione razionale fratta si ottiene risolvendo il limite della funzione data per x che tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4} \right)$$

Poiché nel caso in questione il numeratore ed il denominatore della frazione presentano lo stesso grado, ovvero sono entrambi polinomi di grado 2, per calcolare il limite è sufficiente fare il rapporto dei coefficienti della x che figura al grado più alto; precisamente risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\cancel{-x^2} + 2x + 3}{\cancel{x^2} - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{1} \right) = -1$$

6) Individuare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 4}$$

- ☐ $-\infty$
☐ $+\infty$
☒ 0
☐ -2

Infatti risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

osservando che un qualunque numero diviso infinito dà come risultato zero.

Si poteva pervenire allo stesso risultato osservando che nella frazione il grado del numeratore è zero (il numeratore è costituito solo da un numero, per cui ha grado zero), motivo per cui risulta inferiore al grado del denominatore che è, invece, due: ogni volta che ci si trova in una situazione di questo tipo il limite è sempre zero.

7) Individuare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x - 1}{2x + 5}$$

- ☒ $-\infty$
☐ $\frac{3}{2}$
☐ $\frac{1}{2}$
☐ $+\infty$

Infatti risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2 + x - 1}{2x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x^2}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{2} \right) = \frac{3(-\infty)}{2} = -\infty$$

osservando che infinito diviso per un qualunque numero dà come risultato infinito.

Si poteva pervenire allo stesso risultato osservando che nella frazione il grado del numeratore, pari a due, risulta superiore al grado del denominatore che è, invece, uno: ogni volta che ci si trova in una situazione di questo tipo il limite è sempre infinito.

8) Individuare il valore del seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{9 - 4x^2}$$

☒ $-\frac{1}{4}$

☐ $\frac{1}{9}$

☐ 0

☐ $+\infty$

Infatti risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{9 - 4x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cancel{x^2}}{-4\cancel{x^2}} \right) = -\frac{1}{4}$$

osservando che nella frazione il grado del numeratore, ovvero due, coincide con quello del denominatore, per cui per il calcolo del limite assegnato è sufficiente fare il rapporto dei coefficienti della x che figura al grado più alto.

9) Individuare gli asintoti orizzontali e verticali della seguente funzione:

$$y = \frac{2x - 1}{3x + 2}$$

☐ A.V.: $x = -\frac{2}{3}$; A.O.: $y = -\frac{1}{2}$

☒ A.V.: $x = -\frac{2}{3}$; A.O.: $y = \frac{2}{3}$

☐ A.V.: $x = -2$; A.O.: $y = \frac{3}{2}$

☐ A.V.: $x = -\frac{1}{3}$; A.O.: $y = \frac{2}{3}$

Per la ricerca degli asintoti verticali basta porre il denominatore della frazione uguale a zero, ovvero:

$$3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \Rightarrow \text{A.V.: } x = -\frac{2}{3}$$

Per la ricerca degli asintoti orizzontali, invece, basta calcolare il limite della funzione per x che tende a $\pm\infty$; poiché la funzione data ha numeratore e denominatore di egual grado, pari ad uno, tale limite è uguale al rapporto dei coefficienti della x che figura al grado più alto; risulta, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x - 1}{3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2\cancel{x}}{3\cancel{x}} \right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{A.O.: } y = \frac{2}{3}$$

10) Individuare gli asintoti orizzontali e verticali della seguente funzione:

$$y = \frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2}$$

- ☐ A.V.: $x = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{2}$; A.O.: $y = \frac{6}{7}$
- ☐ A.V.: $x = -\frac{2}{3}, x = 2$; A.O.: $y = 1$
- ☐ A.V.: $x = \frac{3}{2}, x = -\frac{1}{2}$; A.O.: $y = \frac{1}{6}$
- ☒ A.V.: $x = -\frac{2}{3}, x = -\frac{1}{2}$; A.O.: $y = 1$

Per la ricerca degli asintoti verticali basta porre il denominatore della frazione uguale a zero, ovvero:

$$7x + 2 + 6x^2 = 0 \Rightarrow 6x^2 + 7x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{-7 \pm 1}{12} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{-7-1}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{-7+1}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{A.V.: } x = -\frac{2}{3}; x = -\frac{1}{2}$$

Per la ricerca degli asintoti orizzontali, invece, basta calcolare il limite della funzione per x che tende a $\pm\infty$; poiché la funzione data ha numeratore e denominatore di egual grado, pari a due, tale limite è uguale al rapporto dei coefficienti della x che figura al grado più alto; risulta, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{6x^2 + x - 1}{7x + 2 + 6x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{6x^2}{6x^2} \right) = 1 \Rightarrow \text{A.O.: } y = 1$$

11) Individuare gli asintoti verticali della seguente funzione polinomiale:

$$y = 2x^2 + 3x - 5$$

- ☐ A.V.: $x = 2$
- ☐ A.V.: $x = -5$
- ☐ A.V.: $y = 2, y = 5$
- ☒ non esistono asintoti verticali

Le funzioni polinomiali, in quanto definite su tutta la retta reale, non presentano mai asintoti verticali!!!

12) Individuare la derivata della seguente funzione:

$$y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3}$$

☐ $y' = \frac{(2x+3)(x^3) + (x^2+3x+1)(3x^2)}{(x^3)^2}$

☐ $y' = \frac{(x^2+3x+1)(3x^2) - (2x+3)(x^3)}{x^3}$

☒ $y' = \frac{(2x+3)(x^3) - (x^2+3x+1)(3x^2)}{(x^3)^2}$

☐ $y' = \frac{(2x+3)(x^3) - (x^2+3x+1)(3x^2)}{x^2}$

Si tratta di una funzione razionale fratta, per cui per calcolare la sua derivata bisogna sfruttare la seguente regola:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{D[f(x)] \cdot g(x) - f(x)D[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

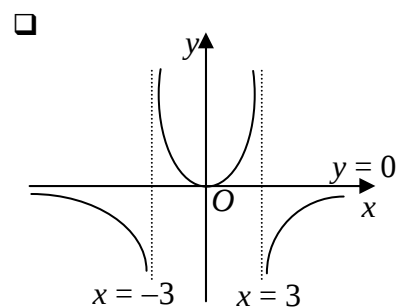
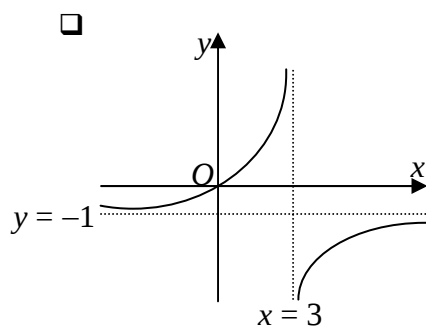
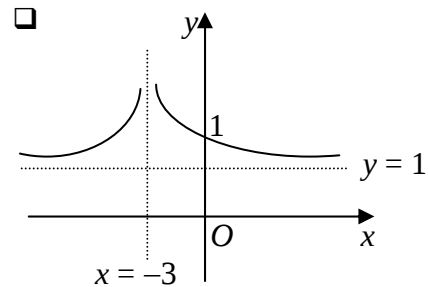
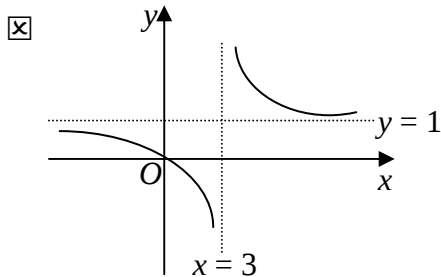
essendo $f(x)$ il polinomio che figura al numeratore della funzione e $g(x)$ il polinomio che figura al suo denominatore.

Applicando la regola sopra riportata, risulta:

$$\begin{aligned} y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3} &\Rightarrow y' = \frac{D(x^2 + 3x + 1) \cdot x^3 - (x^2 + 3x + 1) \cdot D(x^3)}{(x^3)^2} = \\ &= \frac{(2x + 3) \cdot x^3 - (x^2 + 3x + 1) \cdot (3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{2x^4 + 3x^3 - 3x^4 - 9x^3 - 3x^2}{(x^3)^2} = \\ &= \frac{-x^4 - 6x^3 - 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{\cancel{x^2}(-x^2 - 6x - 3)}{\cancel{x^6}^3} = \frac{-x^2 - 6x - 3}{x^3} \end{aligned}$$

13) Individuare quali tra i seguenti è il grafico approssimativo della funzione:

$$y = \frac{x}{x-3}$$



Per la risoluzione di questo esercizio, senza perdere troppo tempo, bisogna lasciarsi trasportare un po' dall'intuito. Osserviamo, infatti, che si tratta di una funzione razionale fratta: se poniamo uguale a zero il denominatore otteniamo l'asintoto verticale, cioè $x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow A.V.: x=3$; inoltre, numeratore e denominatore hanno lo stesso grado, motivo per cui facendo il rapporto dei coefficienti della x al grado più alto si ottiene l'asintoto orizzontale, cioè $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x-3} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 1 \Rightarrow A.O.: y=1$. Procedendo per esclusione il grafico richiesto non può che essere il primo!!!

14) Individuare il punto di massimo della funzione:

$$y = -3x^2 + 2x + 1$$

☐ $M = \left(\frac{1}{2}, -4 \right)$

☐ $M = \left(-\frac{1}{3}, 1 \right)$

☐ $M = (4, 3)$

☒ $M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$

Per trovare il punto di massimo occorre calcolare, in primo luogo, la derivata prima della funzione:

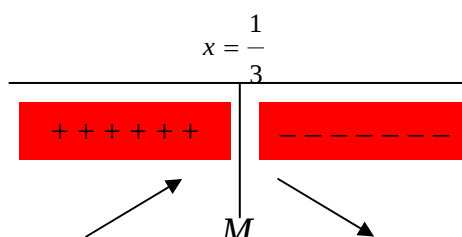
$$y = -3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow y' = -6x + 2$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow -6x + 2 > 0 \Rightarrow -6x > -2 \Rightarrow 6x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{6} \Rightarrow x < \frac{1}{3}$$

cioè:

$$y' > 0 \text{ per } x < \frac{1}{3}$$



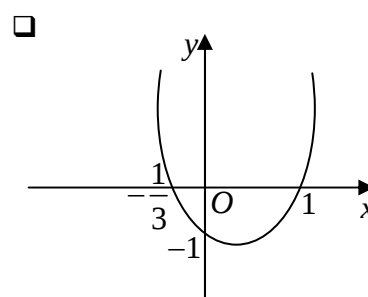
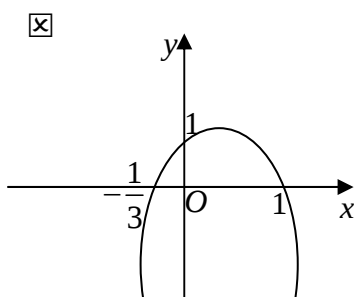
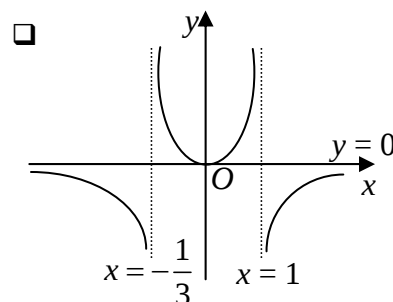
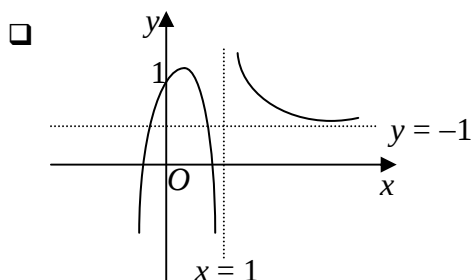
Dunque, per $x = \frac{1}{3}$ si ottiene un massimo. Per individuare il punto di massimo

occorre calcolare l'ordinata corrispondente a tale valore dell'ascissa sostituendo il valore della x appena determinato nella funzione data. Si ha:

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{3} \Rightarrow y &= -3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1 = -3\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{2}{3} + 1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \\ &= \frac{-1 + 2 + 3}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

15) Individuare quali tra i seguenti è il grafico approssimativo della funzione:

$$y = -3x^2 + 2x + 1$$



Anche in questo caso bisogna lasciarsi trasportare un po' dall'intuito. Osserviamo, infatti, che si tratta di una funzione polinomiale di secondo grado,

ovvero di una parabola; inoltre, il coefficiente del termine x^2 è negativo per cui la parabola avrà la concavità rivolta verso il basso; infine, nel precedente esercizio abbiamo calcolato già il punto di massimo della funzione!!! Dunque il grafico richiesto è esattamente il terzo (sono da escludere tutti quei grafici che presentano degli asintoti, sia orizzontali che verticali, trattandosi di una funzione polinomiale).