

PROTOTIPO III PARZIALE

1) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, 2, sono esattamente $\pm 1, \pm 2$. Ma allora si ha:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$$

da cui, procedendo per tentativi, risulta:

$$P(x = +1) = 3 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 2 = 3 + 2 - 7 + 2 = 0$$

cioè per $x = +1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	3	2	-7	+2
+1		3	5	-2
	3	5	-2	0

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x - 1)(3x^2 + 5x - 2)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = 3x^2 + 5x - 2$$

utilizzando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-5 - 7}{6} = -2 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{1}{3}$$

Quindi risulta:

$$Q(x) = 3x^2 + 5x - 2 = (x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

da cui:

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x-1)(3x^2 + 5x - 2) = (x-1)(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

È ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 2) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x-1=0 \\ x+2=0 \\ x - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = \frac{1}{3} \approx 0,3 \end{cases}$$

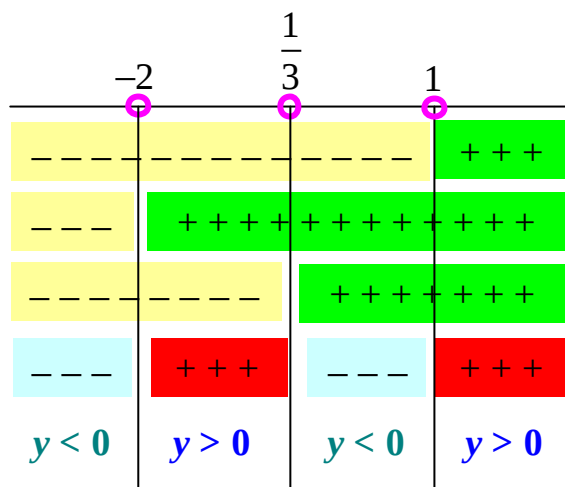
$$\Rightarrow B = (1, 0) \quad C = (-2, 0) \quad D = \left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ x - \frac{1}{3} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > -2 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 + 2x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x^2 - 7x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3) = -\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D(3x^3 + 2x^2 - 7x + 2) = 9x^2 + 4x - 7$$

da cui segue:

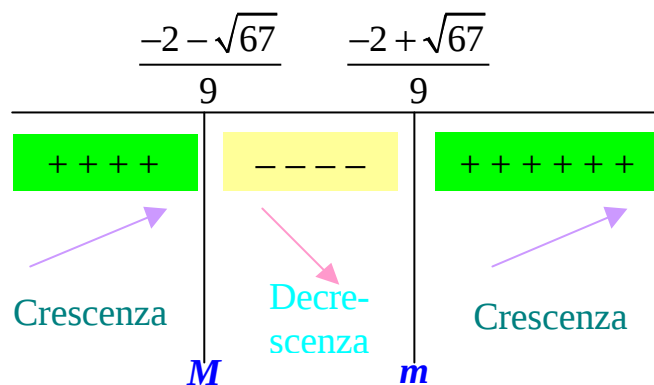
$$y' > 0 \Rightarrow 9x^2 + 4x - 7 > 0$$

Troviamo, in primo luogo, le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione utilizzando la formula risolutiva ridotta:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 63}}{9} = \frac{-2 \pm \sqrt{67}}{9} \Rightarrow x_1 = \frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \cong -1,13 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \cong 0,68$$

da cui:

$$9x^2 + 4x - 7 > 0 \Rightarrow x < \frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \quad \text{e} \quad x > \frac{-2 + \sqrt{67}}{9}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{-2 - \sqrt{67}}{9}$ ed un minimo in $x = \frac{-2 + \sqrt{67}}{9}$.

In particolare:

$$x = \frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \Rightarrow y = 3 \left(\frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \right)^3 + 2 \left(\frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \right)^2 - 7 \left(\frac{-2 - \sqrt{67}}{9} \right) + 2 \cong 8,13$$

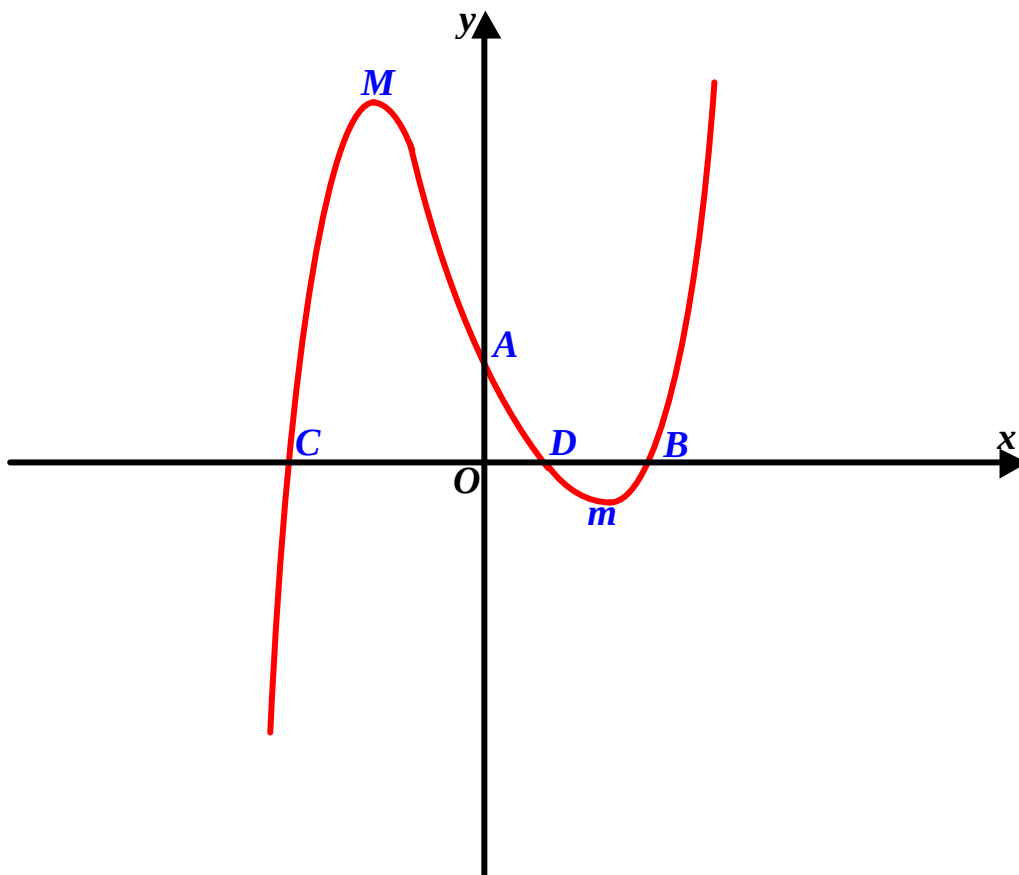
$$x = \frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \Rightarrow y = 3 \left(\frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \right)^3 + 2 \left(\frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \right)^2 - 7 \left(\frac{-2 + \sqrt{67}}{9} \right) + 2 \cong -0,89$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,68;-0,89)$ è il punto di *minimo*

$M(-1,13;8,13)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



2) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : 3x^2 + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

poiché $3x^2 + 2$ è sempre diverso da zero, in quanto è la somma di due quadrati, precisamente $(\sqrt{3}x)^2$ e $(\sqrt{2})^2$.

La funzione non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} = -1,5 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\frac{3}{2}\right) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

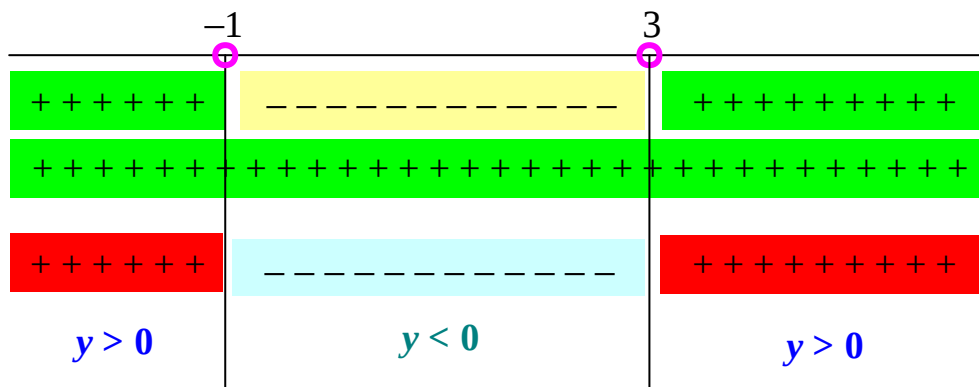
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 - 2 = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = 1 + 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = (-1, 0) \quad C = (3, 0) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ 3x^2 + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > 3 \\ \text{sempre (somma di due quadrati)} \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{3x^2} \right) = \frac{1}{3}$$

cioè la retta di equazione $y = \frac{1}{3}$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\text{A.O.: } y = \frac{1}{3}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2}\right) &= \frac{(2x - 2) \cdot (3x^2 + 2) - (x^2 - 2x - 3) \cdot (6x)}{(3x^2 + 2)^2} = \\ &= \frac{6x^3 + 4x - 6x^2 - 4 - 6x^3 + 12x^2 + 18x}{(3x^2 + 2)^2} = \frac{6x^2 + 22x - 4}{(3x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

da cui segue:

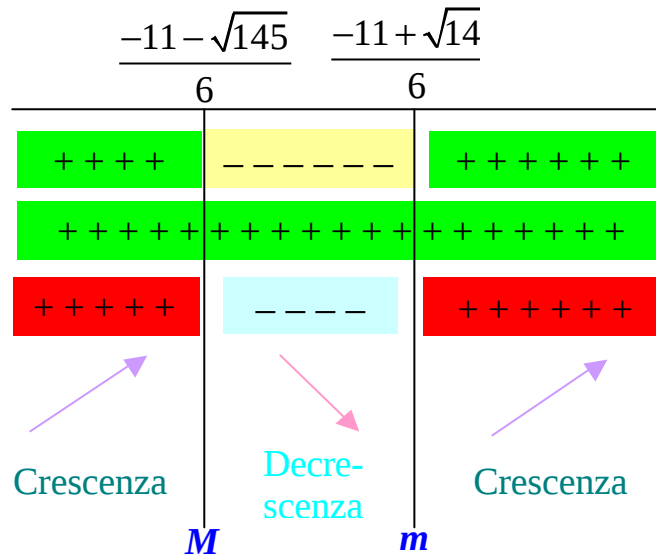
$$y' > 0 \Rightarrow \frac{6x^2 + 22x - 4}{(3x^2 + 2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 22x - 4 > 0 \\ (3x^2 + 2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Poiché risulta:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 22x - 4 = 0 &\Rightarrow 3x^2 + 11x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 24}}{6} = \frac{-11 \pm \sqrt{145}}{6} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{-11 - \sqrt{145}}{6} \cong -3,84 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-11 + \sqrt{145}}{6} \cong 0,17 \end{aligned}$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 22x - 4 > 0 \\ (3x^2 + 2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{-11 - \sqrt{145}}{6}, x > \frac{-11 + \sqrt{145}}{6} \\ \text{sempre (è un quadrato)} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{-11 - \sqrt{145}}{6}$ ed un minimo in $x = \frac{-11 + \sqrt{145}}{6}$.

In particolare si ha:

$$x = \frac{-11 - \sqrt{145}}{6} \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{-11 - \sqrt{145}}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{-11 - \sqrt{145}}{6}\right) - 3}{3\left(\frac{-11 - \sqrt{145}}{6}\right)^2 + 2} \cong 0,42$$

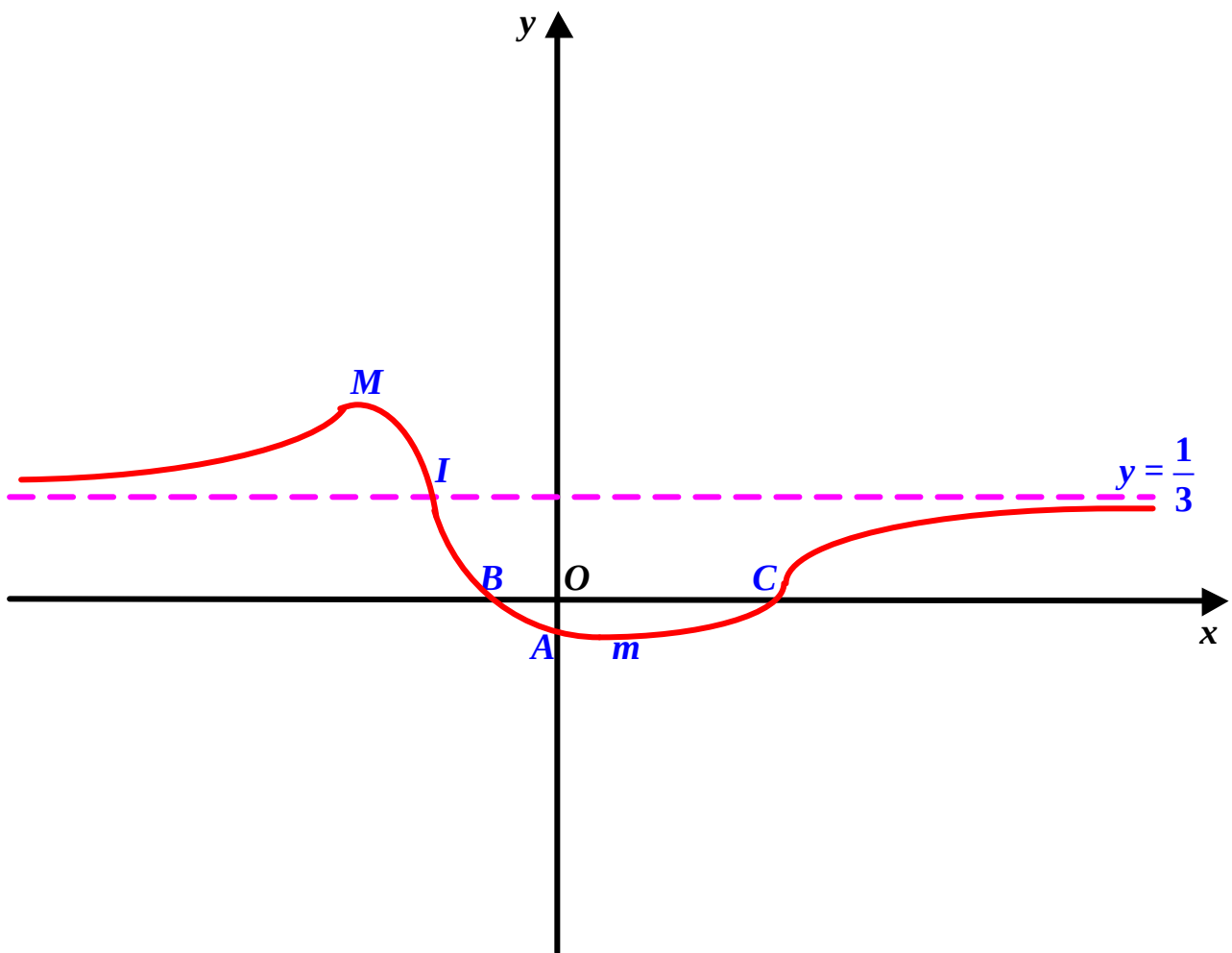
$$x = \frac{-11 + \sqrt{145}}{6} \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{-11 + \sqrt{145}}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{-11 + \sqrt{145}}{6}\right) - 3}{3\left(\frac{-11 + \sqrt{145}}{6}\right)^2 + 2} \cong -1,58$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,17; -1,58)$ è il punto di *minimo*

$M(-3,84; 0,42)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



Osservazione.

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Possiamo calcolare il punto di intersezione tra la funzione assegnata e la retta $y = 3$ resolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3} \quad (\text{essendo uguali i primi membri delle due equazioni del sistema dovranno necessariamente essere uguali anche i secondi membri})$$
$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 + 2} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow \frac{3(x^2 - 2x - 3) - (3x^2 + 2)}{3x^2 + 2} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 6x - 9 - 3x^2 - 2}{3x^2 + 2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -6x - 11 = 0 \Rightarrow 6x + 11 = 0 \Rightarrow x = -\frac{11}{6} \cong -1,83$$

Dunque il punto di intersezione sarà $I = \left(-\frac{11}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

3) Studiare la seguente funzione esponenziale:

$$y = e^{\frac{x^2-x}{x+2}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione esponenziale, il cui esponente è una frazione, il suo campo di esistenza è rappresentato da tutto l'asse reale esclusi i punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, -2 < x < +\infty\}$$

Ne segue subito che la retta $x = -2$ è un asintoto verticale per la funzione assegnata.

$$A.V.: x = -2$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{0-0}{0+2}} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0,1) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{x^2-x}{x+2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai} \end{cases} \Rightarrow \text{non ci sono intersezioni con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2-x}{x+2}} > 0 \Rightarrow \text{sempre in quanto si tratta di una funzione esponenziale, cioè:}$$

+++++

$$y > 0$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x}{x+2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-x}{x+2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ne segue che, per $x \rightarrow -\infty$, la $y \rightarrow 0$: dunque la retta $y = 0$ è un *Asintoto Orizzontale Sinistro* (la funzione, cioè ci tende solo da sinistra).

A.O.S.: $y = 0$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$\begin{aligned} D\left(e^{\frac{x^2-x}{x+2}}\right) &= e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot D\left(\frac{x^2-x}{x+2}\right) = e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot \left(\frac{(2x-1)(x+2) - (x^2-x) \cdot 1}{(x+2)^2}\right) = \\ &= e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot \left(\frac{2x^2 + 4x - x - 2 - x^2 + x}{(x+2)^2}\right) = e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot \frac{x^2 + 4x - 2}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

da cui:

$$y' > 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2-x}{x+2}} \cdot \frac{x^2 + 4x - 2}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x^2-x}{x+2}} > 0 \\ \frac{x^2 + 4x - 2}{(x+2)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x^2-x}{x+2}} > 0 \\ x^2 + 4x - 2 > 0 \\ (x+2)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ x^2 + 4x - 2 > 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases}$$

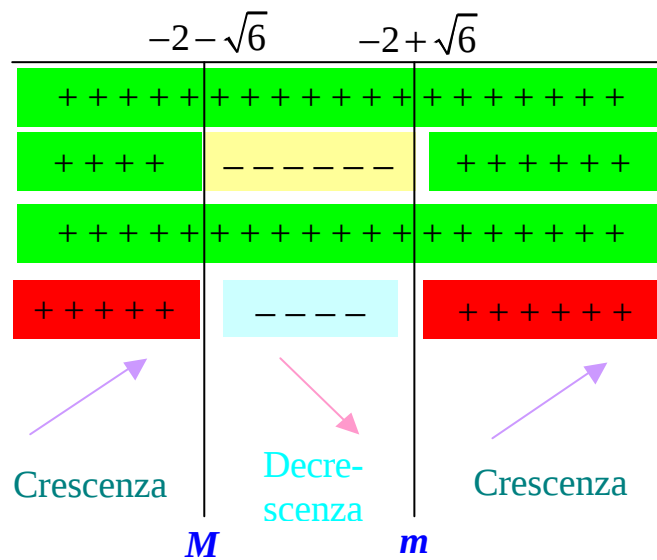
Troviamo, pertanto, le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione che figura nel sistema. Poiché risulta:

$$x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+2}}{1} = -2 \pm \sqrt{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 - \sqrt{6} \cong -4,44 \quad \text{e} \quad x_2 = -2 + \sqrt{6} \cong 0,44$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ x^2 + 4x - 2 > 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x < -2 - \sqrt{6}, x > -2 + \sqrt{6} \\ \text{sempre} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = -2 - \sqrt{6}$ ed un minimo in $x = -2 + \sqrt{6}$.
 In particolare si ha:

$$x = -2 - \sqrt{6} \Rightarrow y = e^{\frac{(-2-\sqrt{6})^2 - (-2-\sqrt{6})}{(-2-\sqrt{6})+2}} \cong 0,000005$$

$$x = -2 + \sqrt{6} \Rightarrow y = e^{\frac{(-2+\sqrt{6})^2 - (-2+\sqrt{6})}{(-2+\sqrt{6})+2}} \cong 0,90$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,44;0,90)$ è il punto di *minimo*

$M(-4,44;0,000005)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.

