

PROTOTIPO III PARZIALE

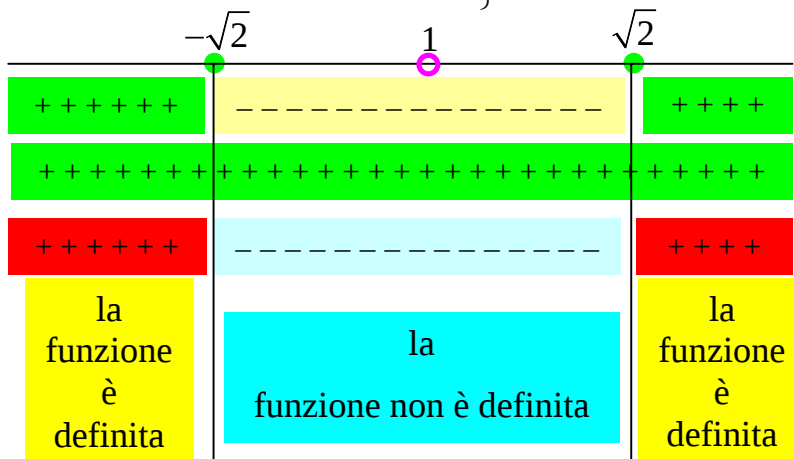
4) Studiare la seguente funzione irrazionale:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Osserviamo in primo luogo che la funzione data è irrazionale: il suo indice di radice è pari, pari a 2, ed il suo radicando è una frazione; poiché si tratta di una radice quadrata, essa è definita solo per i valori della x per i quali il radicando è positivo; inoltre, essendo il radicando una frazione, bisogna considerare anche il denominatore diverso da zero. Risulta, pertanto:

$$\begin{aligned} \text{C.E.} &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} \geq 0, (x-1)^2 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \\ (x-1)^2 > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \leq -\sqrt{2} \cong -1,41; x \geq +\sqrt{2} \cong +1,41 \\ \text{sempre (è un quadrato)} \\ x \neq 1 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$



$$\text{C.E.} = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty \leq x \leq -\sqrt{2}, \sqrt{2} \leq x < +\infty \right\}$$

Osserviamo inoltre che la retta di equazione $x = 1$, pur annullando il denominatore della funzione, non rappresenta un *Asintoto Verticale* in quanto in $x = 1$ la funzione non è definita.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Osserviamo, in primo luogo, che la funzione non interseca la retta di equazione $x = 0$, ovvero l'asse y , poiché tale punto non appartiene al campo di esistenza della funzione data.

Troviamo, quindi, solo le intersezioni con l'asse x . Risulta:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow A = (-\sqrt{2}, 0) \quad C = (\sqrt{2}, 0) &\text{sono le intersezioni della funzione con l'asse } x \end{aligned}$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow \text{sempre nel campo di esistenza}$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} \right)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1} \right)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} \right)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1} \right)} = \sqrt{1} = 1$$

Ne segue che, per $x \rightarrow \pm \infty$, la $y \rightarrow 1$: dunque la retta di equazione $y = 1$ è un *Asintoto Orizzontale* sia *destro* che *sinistro* per la funzione.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D \left(\sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}} \right) = \frac{D \left(\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} \right)}{2 \sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}}} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}}} \cdot \frac{2x \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2) \cdot (2x - 2)}{(x-1)^4} =$$

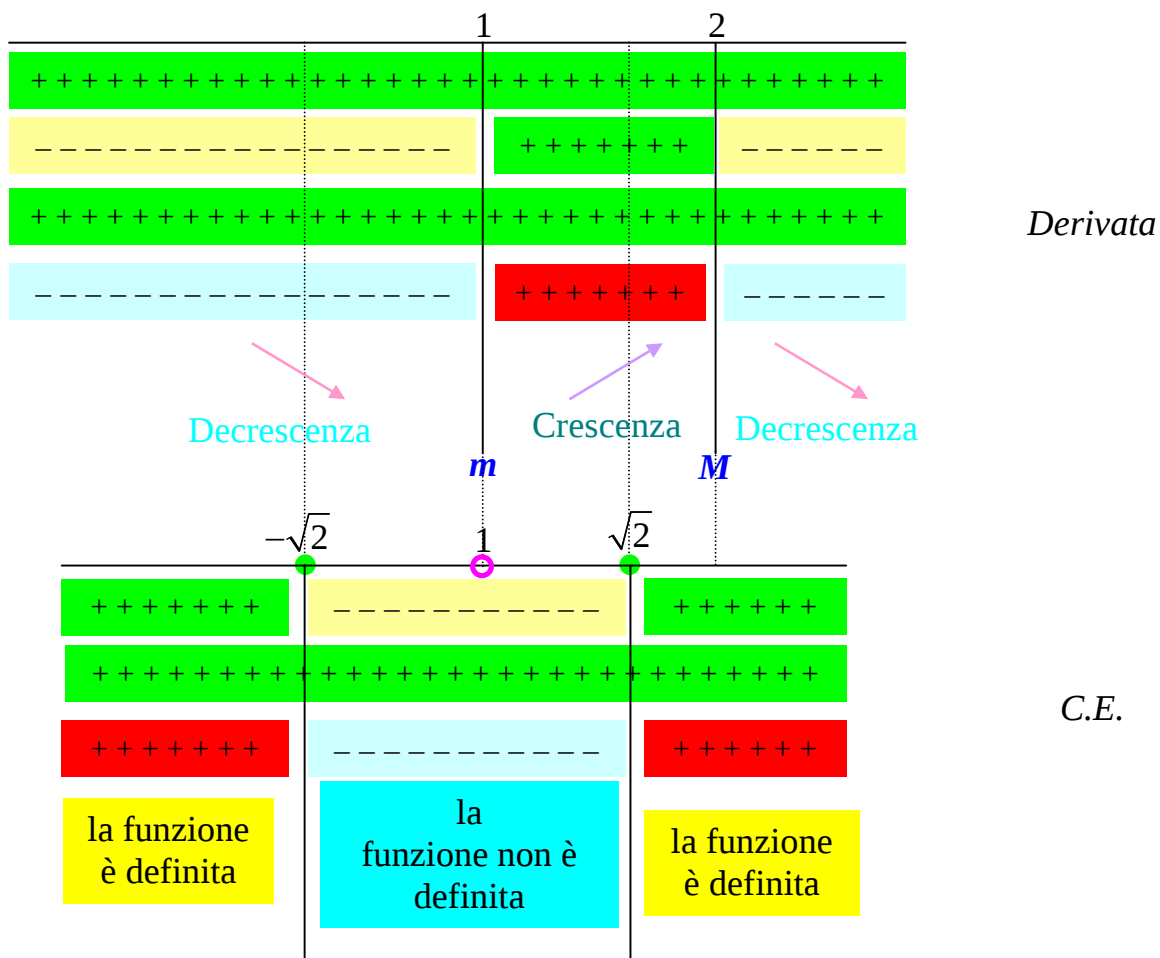
$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{(x-1)^2}}} \cdot \frac{2x \cdot (x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 2) \cdot (2x - 2)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{(x-1)^2}}} \cdot \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 2x^3 + 2x^2 + 4x - 4}{(x-1)^4} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{(x-1)^2}}} \cdot \frac{-2x^2 + 6x - 4}{(x-1)^4}$$

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{(x-1)^2}}} \cdot \frac{-2x^2 + 6x - 4}{(x-1)^4} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{(x-1)^2}}} > 0 \\ \frac{-2x^2 + 6x - 4}{(x-1)^4} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2-2}{(x-1)^2}} > 0 \\ -2x^2 + 6x - 4 > 0 \\ (x-1)^4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre nel campo di esistenza} \\ 2x^2 - 6x + 4 < 0 \\ \text{sempre perchè è un quadrato} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre nel campo di esistenza} \\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \\ \text{sempre perchè è un quadrato} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre nel campo di esistenza} \\ \frac{3-1}{2} = 1 < x < \frac{3+1}{2} = 2 \\ \text{sempre perchè è un quadrato} \end{cases}$$



Dall'unione dei due grafici (segno della derivata prima e campo di esistenza) ne segue che la funzione ha un minimo in $x = 1$ ed un massimo in $x = 2$. Osserviamo, però, che in $x = 1$ la funzione non è definita (si annulla il suo denominatore!!!).

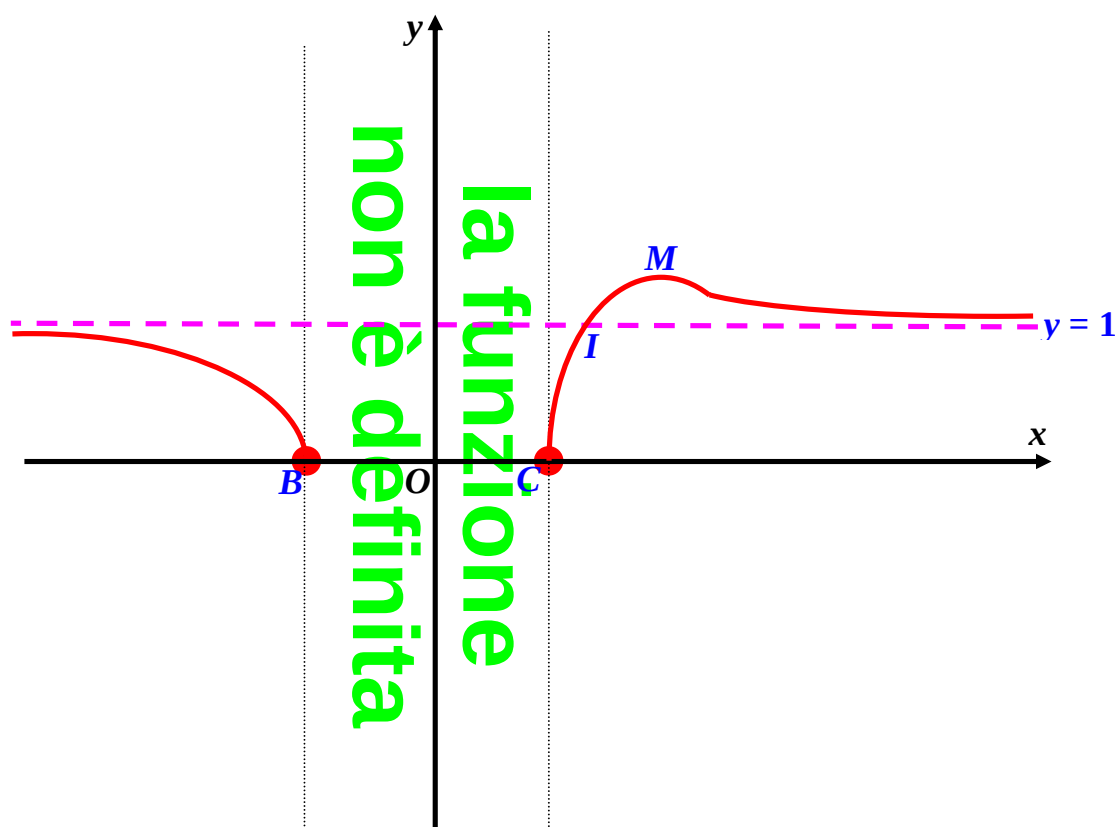
In particolare si ha:

$$x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{2^2 - 2}{(2-1)^2}} = \sqrt{\frac{4-2}{1}} = \sqrt{2} \cong 1,41$$

Ne segue, quindi, che:

$M(2; 1,41)$ è il punto di Massimo

IL GRAFICO.



Osservazione.

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Possiamo calcolare il punto di intersezione tra la funzione assegnata e la retta $y = 1$ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}} = 1 \quad (\text{essendo uguali i primi membri delle due equazioni del sistema dovranno necessariamente essere uguali anche i secondi membri})$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{(x-1)^2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2 - x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{2x - 3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5$$

Dunque il punto di intersezione sarà $I = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

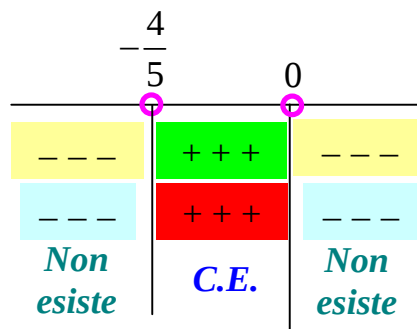
5) Studiare la seguente funzione razionale logaritmica:

$$y = \ln(-5x^2 - 4x)$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione logaritmica il cui argomento è un polinomio di secondo grado con termine noto nullo, il campo di esistenza si ottiene esclusivamente imponendo che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo (il polinomio, infatti, è definito su tutto l'asse reale!!!) . Allora risulta:

$$\begin{aligned} \text{C.E.} &= \{x \in \mathbb{R} : -5x^2 - 4x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 5x^2 + 4x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(5x + 4) < 0\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{4}{5} < x < 0 \right\} \end{aligned}$$



cioè le rette $x = -\frac{4}{5} = -0,8$ ed $x = 0$ sono due asintoti verticali per la funzione assegnata.

$$\text{A.V.} : x = -\frac{4}{5}, x = 0$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Osserviamo che in $x = 0$ la funzione non è definita, per cui essa non interseca l'asse y .

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \ln(-5x^2 - 4x) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \ln(-5x^2 - 4x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\ln(-5x^2 - 4x)} = e^0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -5x^2 - 4x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -5x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 5x^2 + 4x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-5}}{5} = \frac{-2 \pm \sqrt{-1}}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

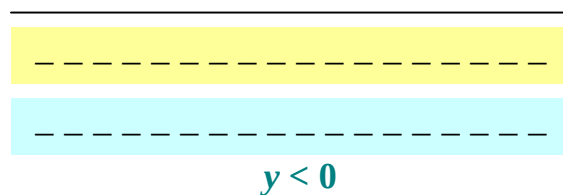
Poiché, quindi, risulta $\Delta < 0$ la funzione non interseca neanche l'asse x , in quanto l'equazione di secondo grado non ha soluzione nell'insieme dei numeri reali.

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \ln(-5x^2 - 4x) > 0 \Rightarrow e^{\ln(-5x^2 - 4x)} > e^0 \Rightarrow -5x^2 - 4x > 1 \Rightarrow -5x^2 - 4x - 1 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5x^2 + 4x + 1 < 0 \Rightarrow \text{mai}$$

avendo già visto precedentemente (nelle intersezioni con l'asse x) che è $\Delta < 0$. Ne segue che la funzione data non è mai positiva, ovvero è sempre negativa nel suo campo di esistenza.



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Osserviamo che la funzione non ha asintoti orizzontali in quanto per $x \rightarrow \pm\infty$ non possiamo calcolare i suoi limiti, non essendo ivi definita.

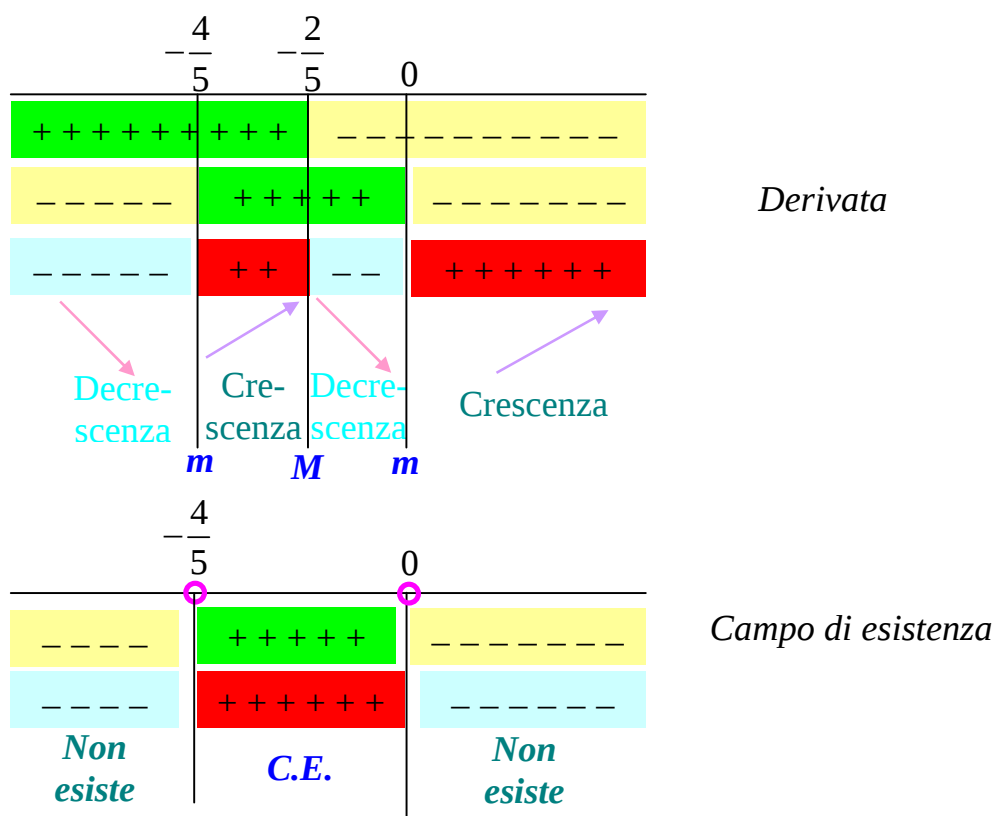
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D[\ln(-5x^2 - 4x)] = \frac{1}{-5x^2 - 4x} \cdot (-10x - 4)$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{-10x - 4}{-5x^2 - 4x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -10x - 4 > 0 \\ -5x^2 - 4x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 4 < 0 \\ 5x^2 + 4x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} \\ x(5x + 4) < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{5} = -0,4 \\ -\frac{4}{5} < x < 0 \end{cases}$$



Dunque, tenendo conto dei due grafici contemporaneamente, segue che la funzione ha un massimo in $x = -\frac{2}{5}$.

In particolare si ha:

$$x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = \ln \left[-5 \left(-\frac{2}{5} \right)^2 - 4 \left(-\frac{2}{5} \right) \right] = \ln \left[-5 \left(\frac{4}{25} \right) + \frac{8}{5} \right] =$$

$$= \ln \left(-\frac{4}{5} + \frac{8}{5} \right) = \ln \left(\frac{4}{5} \right) \cong -0,22$$

Ne segue, quindi, che:

$M(-0,4; -0,22)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.

