

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

III Parziale - Compito A
26/05/2005
A. A. 2004 – 2005

1) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, 10, sono esattamente $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$. Ma allora si ha:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$$

da cui, procedendo per tentativi, risulta:

$$P(x = +1) = 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 - 10 = 1 + 4 - 7 - 10 = -12 \neq 0$$

$$P(x = -1) = (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) - 10 = -1 + 4 + 7 - 10 = 0$$

cioè per $x = -1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	1	4	-7	-10
-1		-1	-3	+10
	1	3	-10	0

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x + 1)(x^2 + 3x - 10)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = x^2 + 3x - 10$$

utilizzando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-3-7}{2} = -5 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-3+7}{2} = 2$$

Quindi risulta:

$$Q(x) = x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$$

da cui:

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10 = (x+1)(x^2 + 3x - 10) = (x+1)(x-2)(x+5)$$

È ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=x^3+4x^2-7x-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-10 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A=(0,-10)$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=x^3+4x^2-7x-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x+1)(x-2)(x+5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \begin{cases} x+1=0 \\ x-2=0 \\ x+5=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \\ x_3=-5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

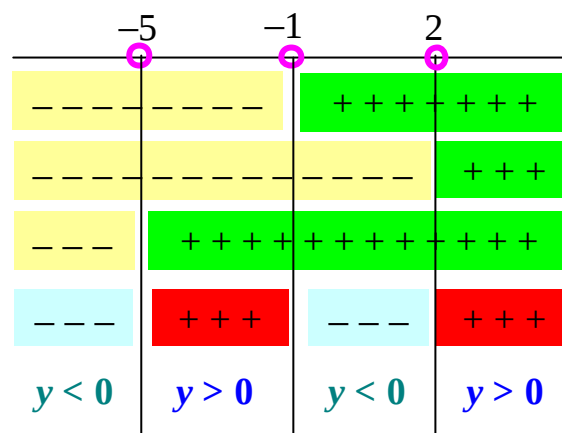
$\Rightarrow B=(-1,0)$ $C=(2,0)$ $D=(-5,0)$ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow x^3 + 4x^2 - 7x - 10 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x+5) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x > -5 \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 4x^2 - 7x - 10) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 4x^2 - 7x - 10) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D(x^3 + 4x^2 - 7x - 10) = 3x^2 + 8x - 7$$

da cui segue:

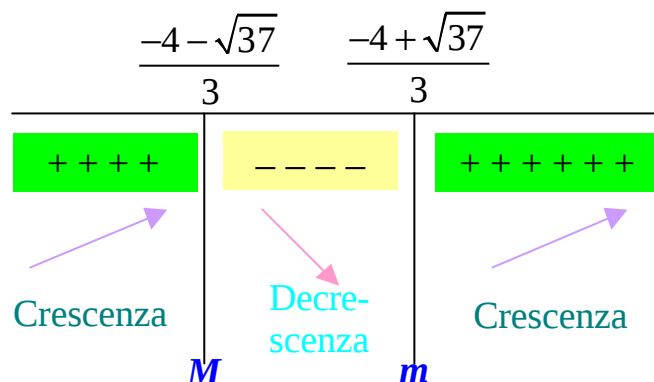
$$y' > 0 \Rightarrow 3x^2 + 8x - 7 > 0$$

Troviamo, in primo luogo, le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 21}}{3} = \frac{-4 \pm \sqrt{37}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{-4 - \sqrt{37}}{3} \cong -3,36 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{37}}{3} \cong 0,69$$

da cui:

$$3x^2 + 8x - 7 > 0 \Rightarrow x < \frac{-4 - \sqrt{37}}{3} \quad \text{e} \quad x > \frac{-4 + \sqrt{37}}{3}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{-4 - \sqrt{37}}{3}$ ed un minimo in $x = \frac{-4 + \sqrt{37}}{3}$.

In particolare:

$$x = \frac{-4 - \sqrt{37}}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{-4 - \sqrt{37}}{3} \right)^3 + 4 \left(\frac{-4 - \sqrt{37}}{3} \right)^2 - 7 \left(\frac{-4 - \sqrt{37}}{3} \right) - 10 \cong 20,74$$

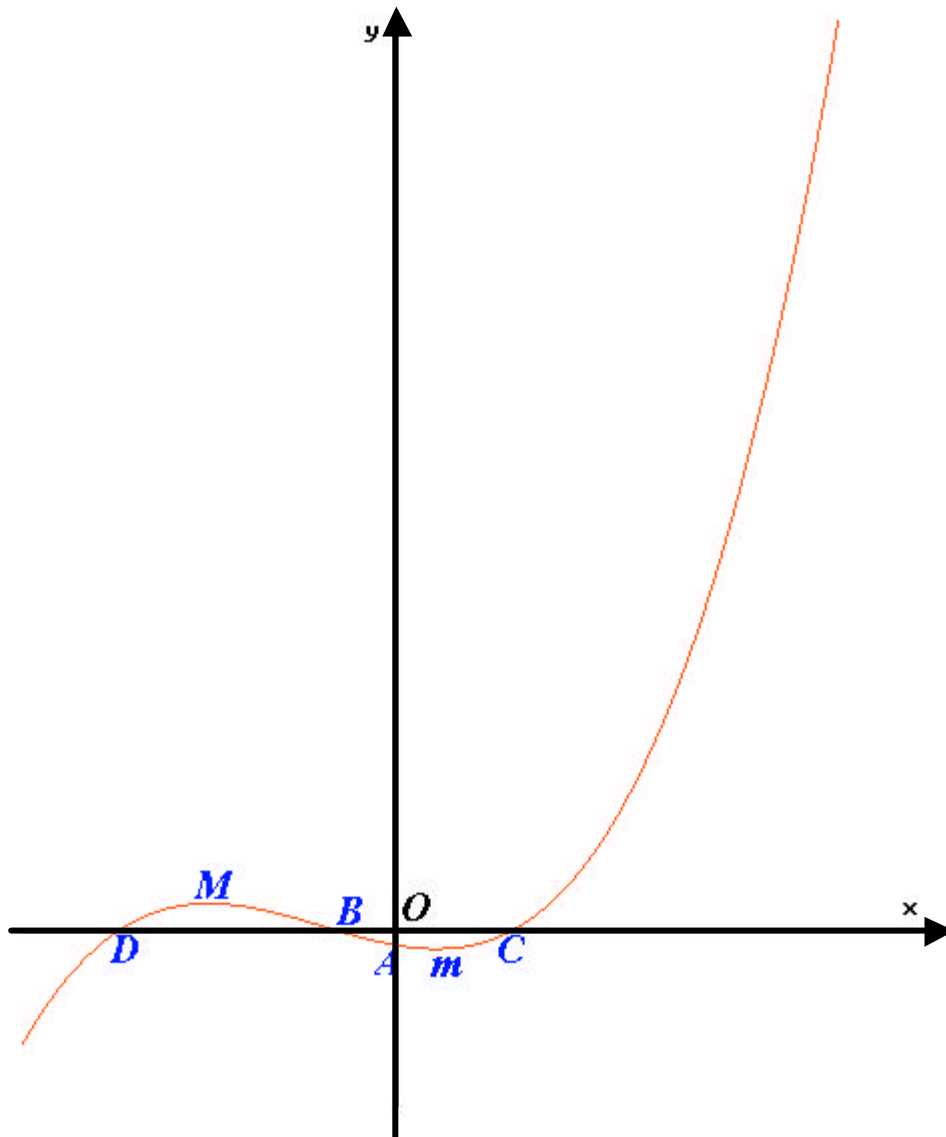
$$x = \frac{-4 + \sqrt{37}}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{-4 + \sqrt{37}}{3} \right)^3 + 4 \left(\frac{-4 + \sqrt{37}}{3} \right)^2 - 7 \left(\frac{-4 + \sqrt{37}}{3} \right) - 10 \cong -12,59$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,69;-12,59)$ è il punto di *minimo*

$M(-3,36;20,74)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



2) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty\}$$

poiché $x^2 + 1$ è sempre diverso da zero (è la somma di due quadrati).

La funzione non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -2) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \end{cases} \Rightarrow$$

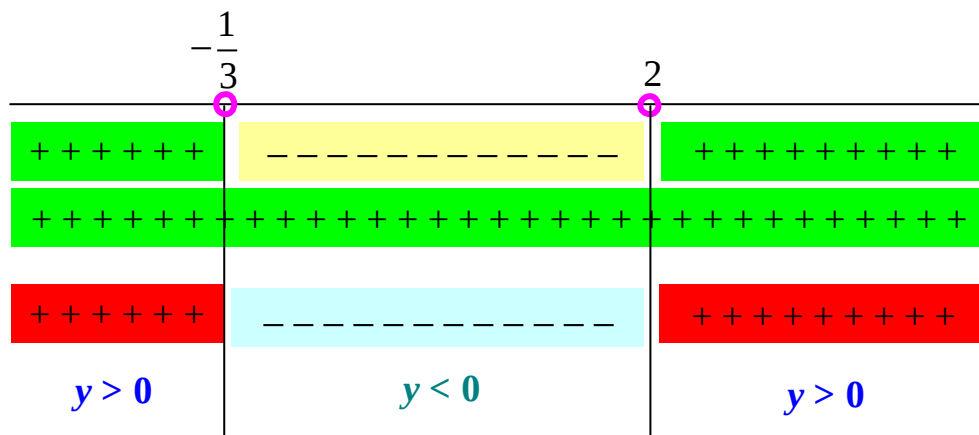
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3} \cong 0,33 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = \frac{5+7}{6} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \quad C = (2, 0) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{3}, x > 2 \\ \text{sempre (somma di due quadrati)} \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2}{x^2} \right) = 3$$

cioè la retta di equazione $y = 3$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\text{A.O.: } y = 3$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1}\right) &= \frac{(6x - 5) \cdot (x^2 + 1) - (3x^2 - 5x - 2) \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{6x^3 + 6x - 5x^2 - 5 - 6x^3 + 10x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{5x^2 + 10x - 5}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{5x^2 + 10x - 5}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 + 10x - 5 > 0 \\ (x^2 + 1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

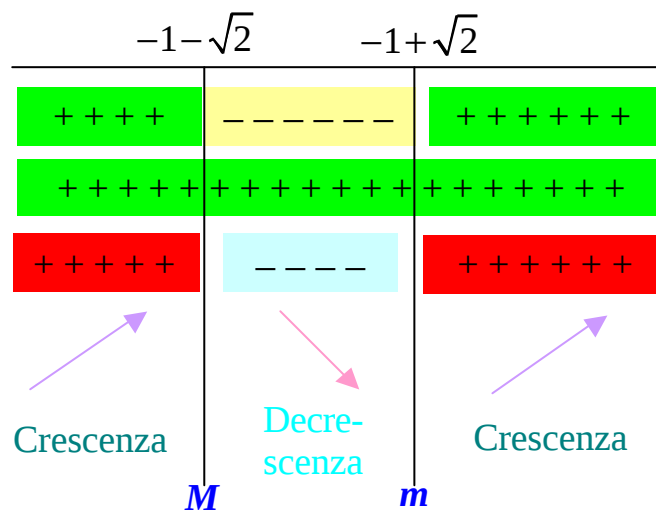
Poiché risulta:

$$5x^2 + 10x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+1}}{1} = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{2} \cong -2,41 \quad \text{e} \quad x_2 = -1 + \sqrt{2} \cong 0,41$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 1 > 0 \\ (x^2 + 1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 - \sqrt{2}, x > -1 + \sqrt{2} \\ \text{sempre (è un quadrato)} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = -1 - \sqrt{2}$ ed un minimo in $x = -1 + \sqrt{2}$.
In particolare si ha:

$$x = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{3(-1 - \sqrt{2})^2 - 5(-1 - \sqrt{2}) - 2}{(-1 - \sqrt{2})^2 + 1} \cong 4,03$$

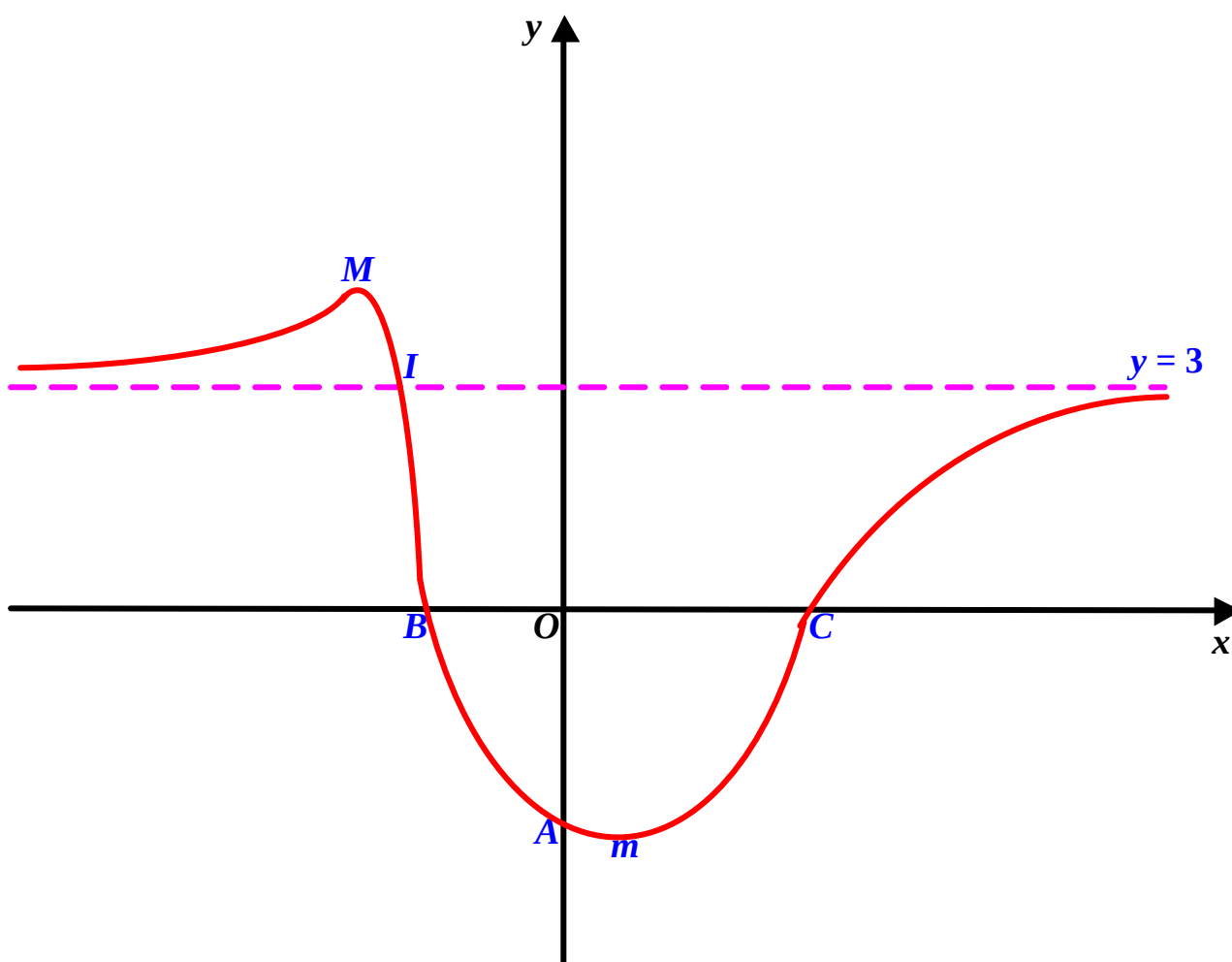
$$x = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = \frac{3(-1 + \sqrt{2})^2 - 5(-1 + \sqrt{2}) - 2}{(-1 + \sqrt{2})^2 + 1} \cong -3,03$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,41; -3,03)$ è il punto di *minimo*

$M(-0,41; 4,03)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



Osservazione.

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Possiamo calcolare il punto di intersezione tra la funzione assegnata e la retta $y = 3$ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1} \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1} = 3 \quad \begin{array}{l} \text{(essendo uguali i primi membri delle due} \\ \text{equazioni del sistema dovranno necessariamente} \\ \text{essere uguali anche i secondi membri)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 1} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 5x - 2 - 3x^2 - 3}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \frac{-5x - 5}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow -5x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x + 5 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Dunque il punto di intersezione sarà $I = (-1, 3)$.

3) Studiare la seguente funzione irrazionale:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Osserviamo in primo luogo che la funzione data è irrazionale: il suo indice di radice è dispari, pari a 3, ed il suo radicando è una frazione; poiché si tratta di una radice cubica, essa è definita su tutto l'asse reale, ma essendo il radicando una frazione bisogna considerare il denominatore diverso da zero. Risulta, pertanto:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty\}$$

Ne segue che la funzione non presenta *Asintoti Verticali*.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{-1}{2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cong -0,79 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

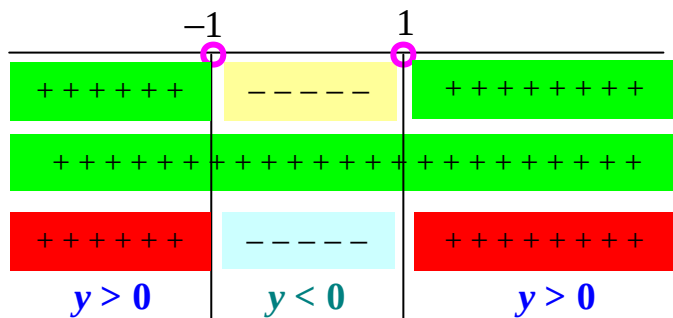
$$\Rightarrow B = (-1, 0) \quad C = (1, 0)$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > +1 \\ \text{sempre (è la somma di due quadrati)} \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+2}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)} = \sqrt[3]{1} = 1$$

Ne segue che, per $x \rightarrow \pm \infty$, la $y \rightarrow 1$: dunque la retta di equazione $y = 1$ è un *Asintoto Orizzontale*.

$$\text{A.O.: } y = 1$$

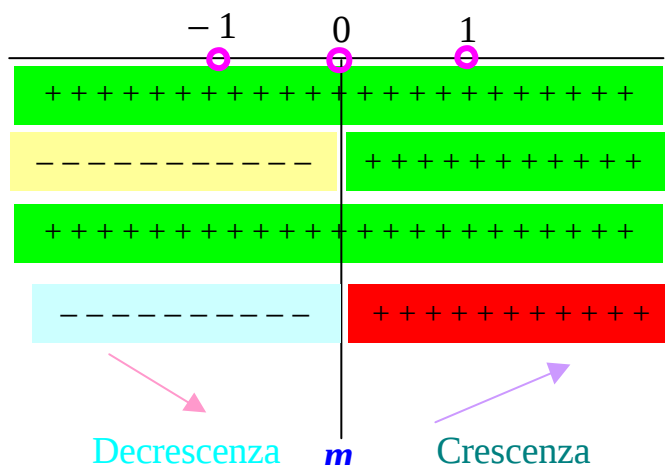
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$\begin{aligned} D \left(\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+2}} \right) &= \frac{D \left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^2}} \cdot \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2-1)}{(x^2+2)^2} = \\ &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^2}} \cdot \frac{2x^3 + 4x - 2x^3 + 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^2}} \cdot \frac{6x}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

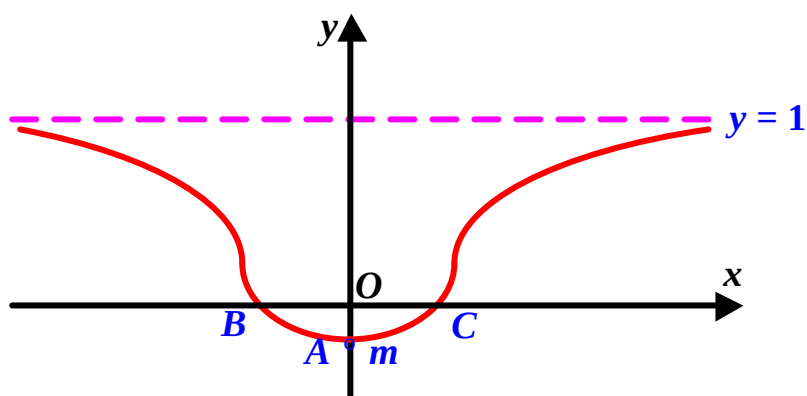
Ne segue:

$$\begin{aligned} y' > 0 &\Rightarrow \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^2}} \cdot \frac{6x}{(x^2+2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^2}} > 0 \\ \frac{6x}{(x^2+2)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-1}{x^2+2} \right)^2} > 0 \\ 6x > 0 \\ (x^2+2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (il radicando è un quadrato e quindi sempre positivo)} \\ x > 0 \\ \text{sempre (somma di due quadrati)} \end{cases} \end{aligned}$$



Dunque il punto di massimo della funzione, ottenuto per $x = 0$, coincide esattamente con il punto A di intersezione della funzione con l'asse y delle ordinate.

IL GRAFICO.



Osservazione.

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Possiamo calcolare il punto di intersezione tra la funzione assegnata e la retta $y = 3$ resolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+2}} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+2}} = 1 \quad (\text{essendo uguali i primi membri delle due equazioni del sistema dovranno necessariamente essere uguali anche i secondi membri})$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+2} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1-x^2-2}{x^2+2} = 0 \Rightarrow \frac{-3}{x^2+2} = 0 \Rightarrow \text{mai perché } -3 \neq 0$$

Dunque la funzione non interseca l'asintoto orizzontale.

4) Studiare la seguente funzione esponenziale:

$$y = e^{\frac{2x^2+x}{x-1}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione esponenziale, il cui esponente è una frazione, il suo campo di esistenza è rappresentato da tutto l'asse reale esclusi i punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 1, 1 < x < +\infty\}$$

Ne segue subito che la retta $x = 1$ è un asintoto verticale per la funzione assegnata.

$$A.V.: x = 1$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{0+0}{0-1}} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0,1) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai} \end{cases} \Rightarrow \text{non ci sono intersezioni con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} > 0 \Rightarrow \text{sempre in quanto si tratta di una funzione esponenziale, cioè:}$$

$$\overline{++++++}\br/>y > 0$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+x}{x-1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+x}{x-1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ne segue che, per $x \rightarrow -\infty$, la $y \rightarrow 0$: dunque la retta $y = 0$ è un *Asintoto Orizzontale Sinistro* (la funzione, cioè ci tende solo da sinistra).

A.O.S.: $y = 0$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$\begin{aligned} D\left(e^{\frac{2x^2+x}{x-1}}\right) &= e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} \cdot D\left(\frac{2x^2+x}{x-1}\right) = e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} \cdot \left(\frac{(4x+1)(x-1) - (2x^2+x) \cdot 1}{(x-1)^2}\right) = \\ &= e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} \cdot \left(\frac{4x^2 - 4x + x - 1 - 2x^2 - x}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} \cdot \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

da cui:

$$y' > 0 \Rightarrow e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} \cdot \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} > 0 \\ \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x-1)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{2x^2+x}{x-1}} > 0 \\ 2x^2 - 4x - 1 > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \end{cases}$$

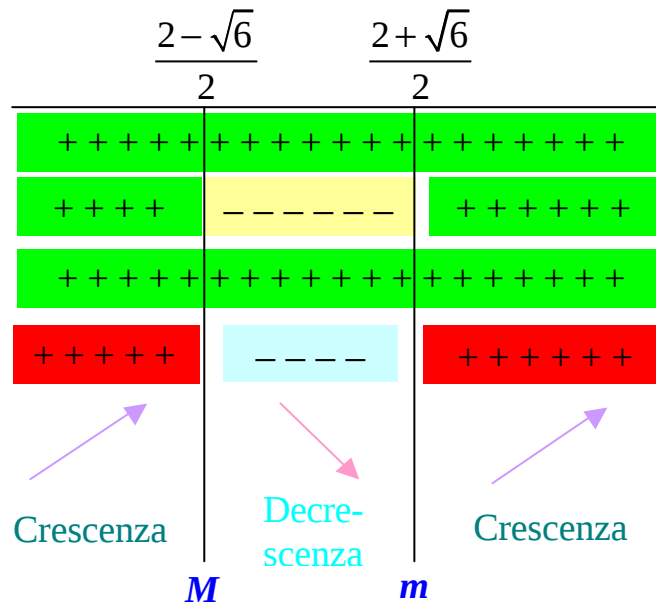
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ 2x^2 - 4x - 1 > 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases}$$

Troviamo, pertanto, le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione che figura nel sistema. Poiché risulta:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 1 &= 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \cong -0,22 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \cong 2,22 \end{aligned}$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ 2x^2 - 4x - 1 > 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x < \frac{2 - \sqrt{6}}{2}, x > \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \\ \text{sempre} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$ ed un minimo in $x = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$.

In particolare si ha:

$$x = \frac{2 - \sqrt{6}}{2} \Rightarrow y = e^{\frac{2\left(\frac{2 - \sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 - \sqrt{6}}{2}\right)}{\frac{2 - \sqrt{6}}{2} - 1}} \cong 1,10$$

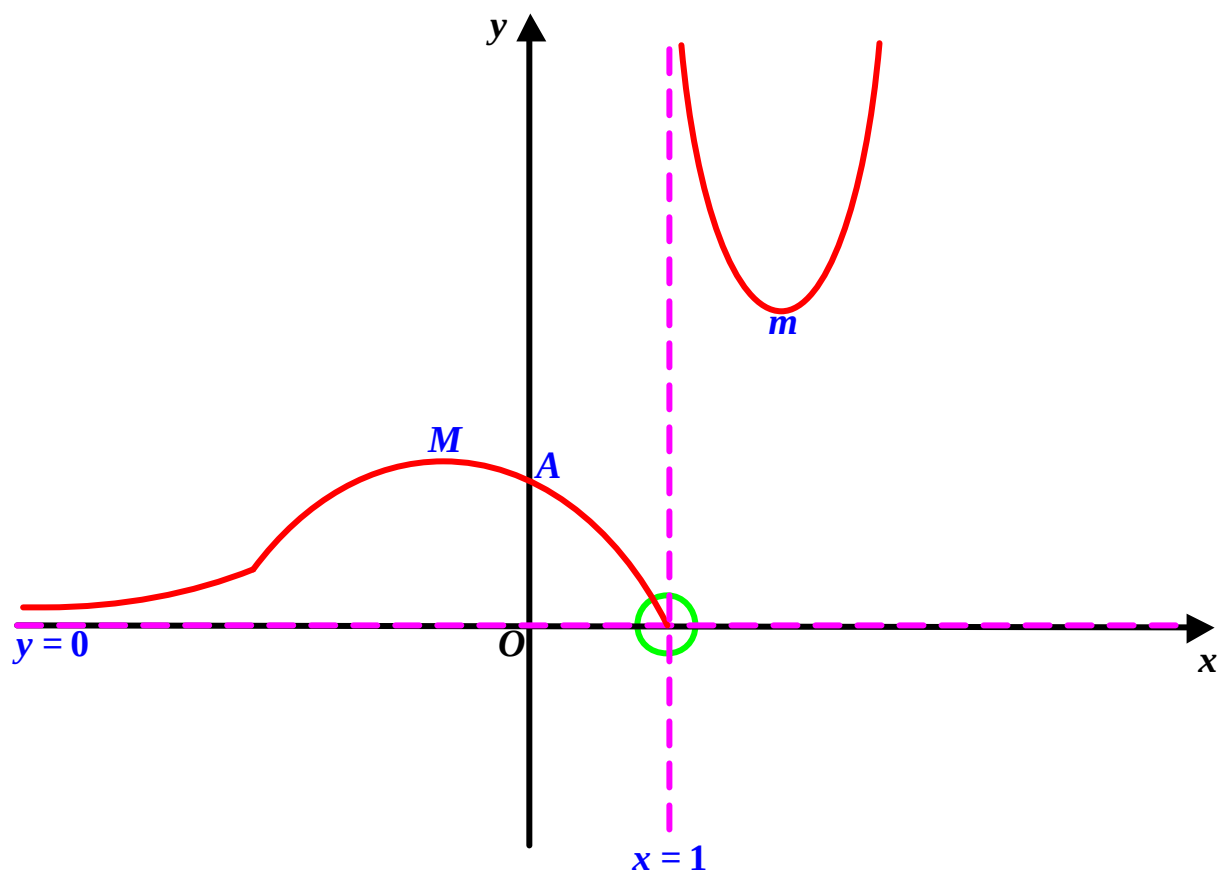
$$x = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} \Rightarrow y = e^{\frac{2\left(\frac{2 + \sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{2 + \sqrt{6}}{2}\right)}{\frac{2 + \sqrt{6}}{2} - 1}} \cong 19910,04$$

Ne segue, quindi, che:

$m(2,22;19910,04)$ è il punto di *minimo*

$M(-0,22;1,10)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



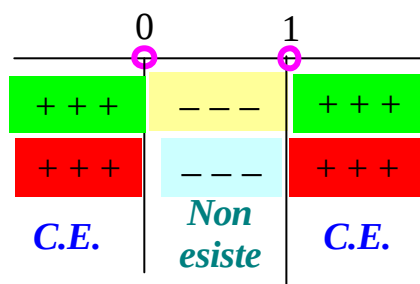
5) Studiare la seguente funzione logaritmica:

$$y = \ln(x^2 - x)$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione logaritmica il cui argomento è un polinomio di secondo grado con termine noto nullo, il campo di esistenza si ottiene esclusivamente imponendo che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo (il polinomio, infatti, è definito su tutto l'asse reale!!!) . Allora risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(x - 1) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ e } x > 1\}$$



Ne segue:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x < 0, x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 1 < x < +\infty\}$$

cioè le rette $x = 0$ ed $x = 1$ sono due asintoti verticali per la funzione assegnata.

$$A.V.: x = 0, x = 1$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Osserviamo che in $x = 0$ la funzione non è definita, per cui essa non interseca l'asse y .

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \ln(x^2 - x) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \ln(x^2 - x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\ln(x^2 - x)} = e^0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \cong -0,61 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,61 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 0 \right)$$

$$B = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 0 \right)$$

sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

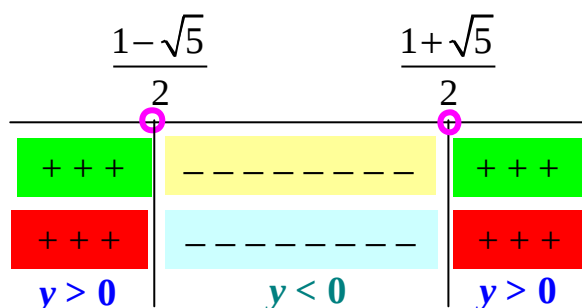
SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \ln(x^2 - x) > 0 \Rightarrow e^{\ln(x^2 - x)} > e^0 \Rightarrow x^2 - x > 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

avendo già calcolato precedentemente (nelle intersezioni con l'asse x) le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione di secondo grado.



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 - x)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) \right] = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(x^2 - x)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) \right] = \ln(+\infty) = +\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

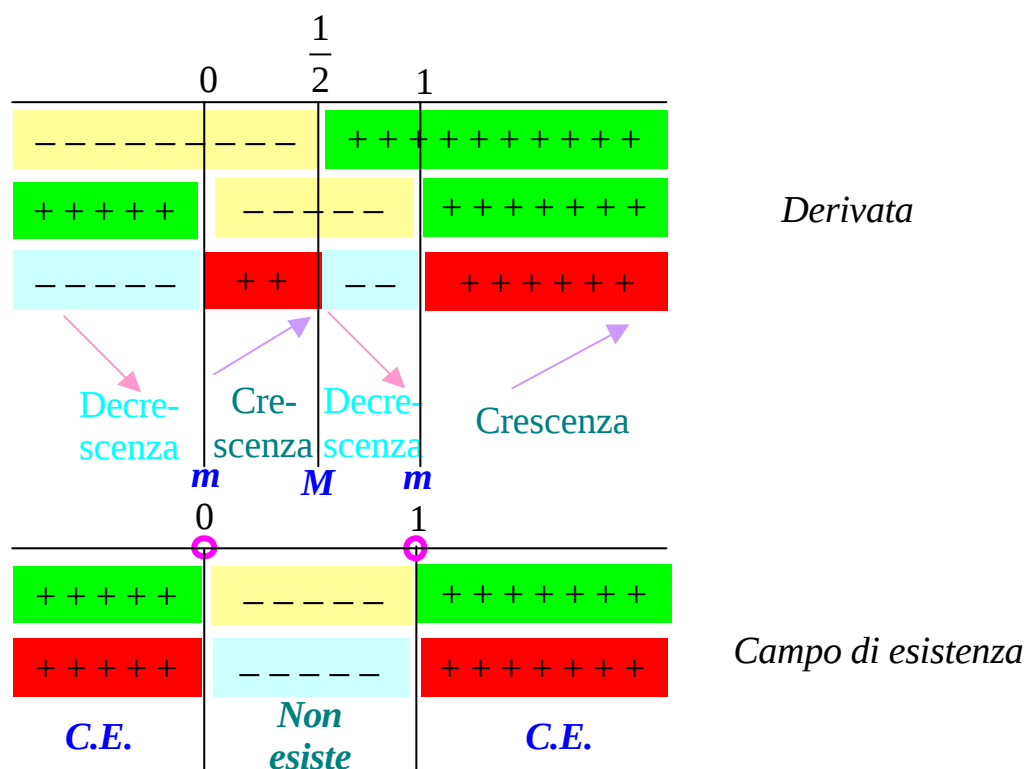
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D[\ln(x^2 - x)] = \frac{1}{x^2 - x} \cdot (2x - 1)$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{2x - 1}{x^2 - x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x(x - 1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 0, x > 1 \end{cases}$$



Dunque, tenendo conto dei due grafici contemporaneamente, segue che la funzione non ha né massimi né minimi: le rette $x = 0$ ed $x = 1$ sono, infatti, due asintoti verticali della funzione!!!

IL GRAFICO.

