

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

III Parziale - Compito B
26/05/2005
A. A. 2004 – 2005

1) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, 6, sono esattamente $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Ma allora si ha:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

da cui, procedendo per tentativi, risulta:

$$P(x = +1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$$

cioè per $x = +1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	1	-6	11	-6
+1		1	-5	6
	1	-5	6	0

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6$$

utilizzando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Quindi risulta:

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

da cui:

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

È ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=x^3-6x^2+11x-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-6 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A=(0,-6)$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=x^3-6x^2+11x-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x-1)(x-2)(x-3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \begin{cases} x-1=0 \\ x-2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

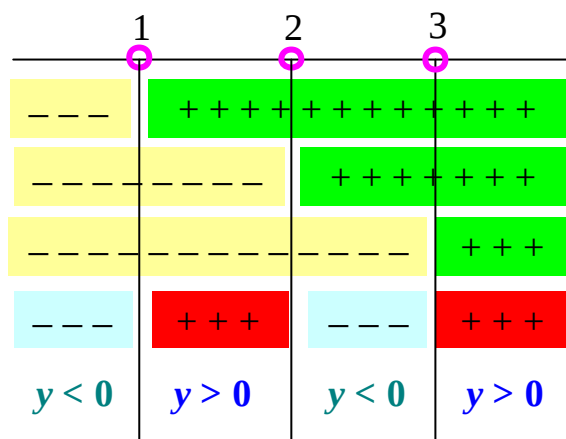
$\Rightarrow B=(1,0)$ $C=(2,0)$ $D=(3,0)$ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)(x-3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \\ x > 3 \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 3x^2 - 12x + 11$$

da cui segue:

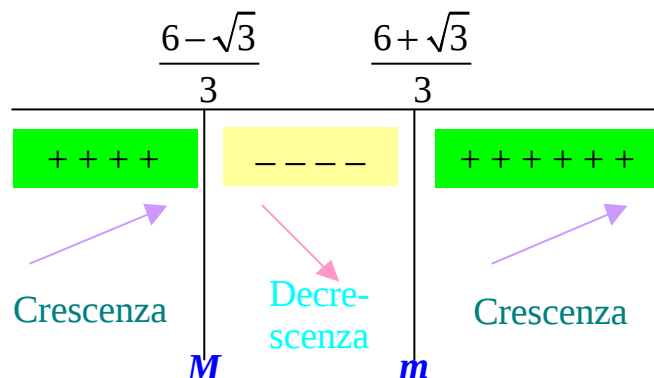
$$y' > 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 11 > 0$$

Troviamo, in primo luogo, le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione:

$$x_{1,2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 33}}{3} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \cong 1,42 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \cong 2,57$$

da cui:

$$3x^2 - 12x + 11 > 0 \Rightarrow x < \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad x > \frac{6 + \sqrt{3}}{3}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{6 - \sqrt{3}}{3}$ ed un minimo in $x = \frac{6 + \sqrt{3}}{3}$.

In particolare:

$$x = \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right)^2 + 11\left(\frac{6 - \sqrt{3}}{3}\right) - 6 \cong 0,38$$

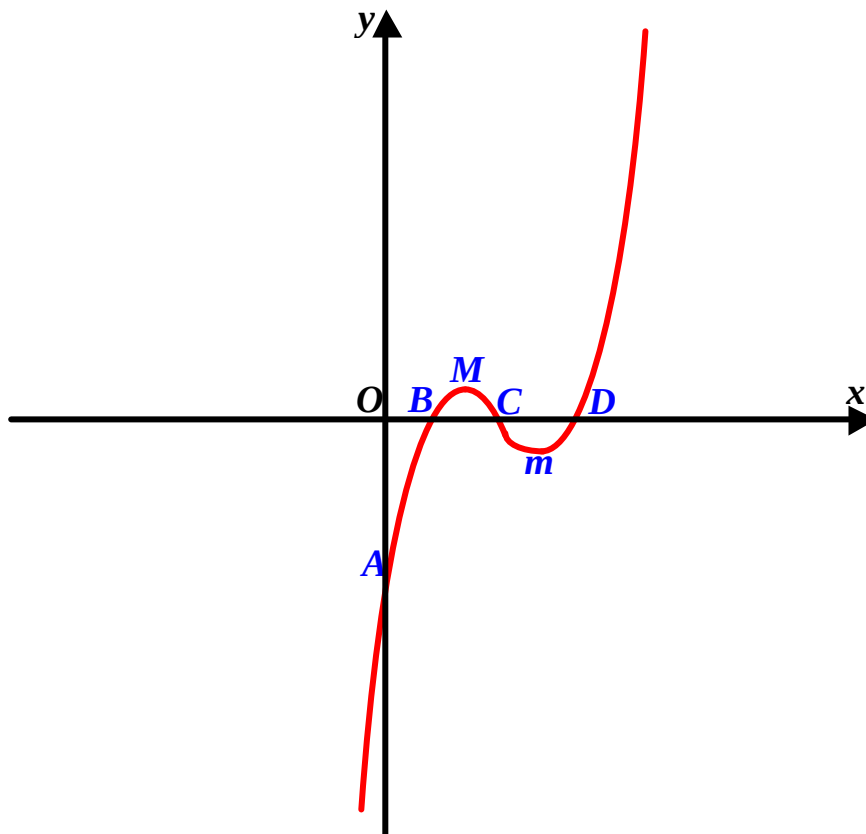
$$x = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right)^2 + 11\left(\frac{6 + \sqrt{3}}{3}\right) - 6 \cong -0,38$$

Ne segue, quindi, che:

$m(2,57;-0,38)$ è il punto di *minimo*

$M(1,42;0,38)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



2) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - x - 3 \neq 0\}$$

poiché:

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-5}{4} = -1 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Ne segue:

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1, -1 < x < \frac{3}{2}, \frac{3}{2} < x < +\infty \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq -1, x \neq \frac{3}{2} \right\}$$

cioè:

$$A.V.: x = -1, x = \frac{3}{2}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\frac{4}{3} \right) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

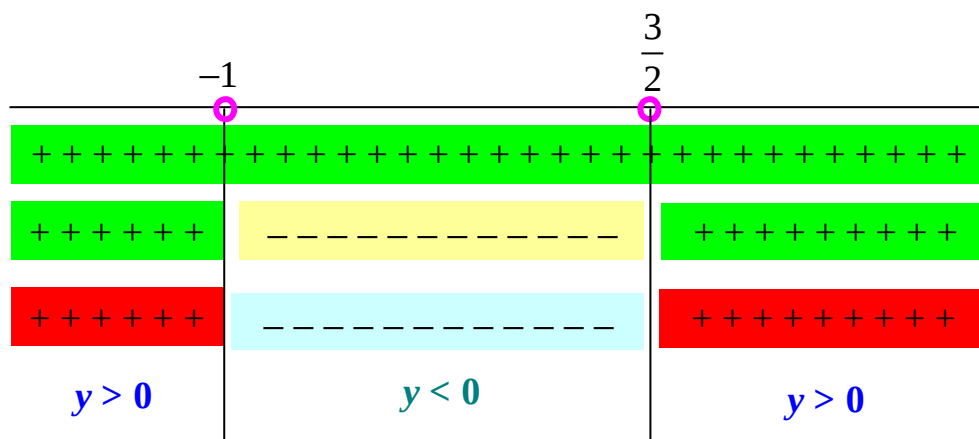
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai (somma di due quadrati)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la funzione non interseca l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4 > 0 \\ 2x^2 - x - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (somma di due quadrati)} \\ x < -1, x > \frac{3}{2} \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{2x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

cioè la retta di equazione $y = \frac{1}{2}$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\text{A.O.: } y = \frac{1}{2} = 0,5$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3}\right) &= \frac{2x(2x^2 - x - 3) - (x^2 + 4)(4x - 1)}{(2x^2 - x - 3)^2} = \\ &= \frac{4x^3 - 2x^2 - 6x - 4x^3 + x^2 - 16x + 4}{(2x^2 - x - 3)^2} = \frac{-x^2 - 22x + 4}{(2x^2 - x - 3)^2} \end{aligned}$$

da cui segue:

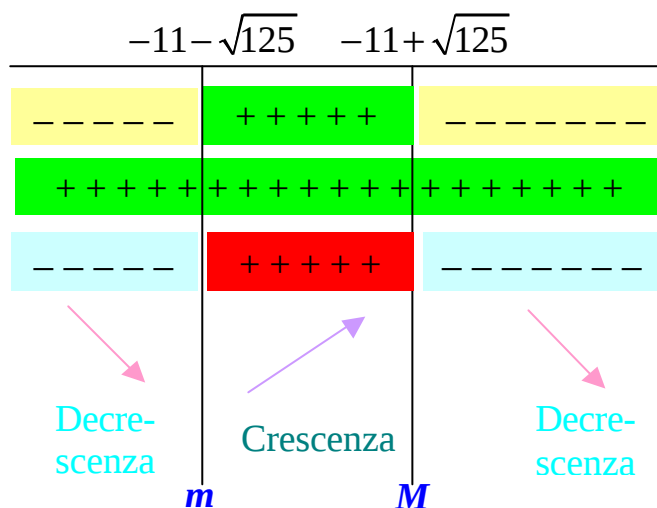
$$y' > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - 22x + 4}{(2x^2 - x - 3)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 22x + 4 > 0 \\ (2x^2 - x - 3)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 22x - 4 < 0 \\ (2x^2 - x - 3)^2 > 0 \end{cases}$$

Poiché risulta:

$$\begin{aligned} x^2 + 22x - 4 &= 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 4}}{1} = -11 \pm \sqrt{125} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= -11 - \sqrt{125} \cong -22,18 \quad \text{e} \quad x_2 = -11 + \sqrt{125} \cong 0,18 \end{aligned}$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 22x - 4 < 0 \\ (2x^2 - x - 3)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11 - \sqrt{125} < x < -11 + \sqrt{125} \\ \text{sempre (è un quadrato)} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un minimo in $x = -11 - \sqrt{125}$ ed un massimo in $x = -11 + \sqrt{125}$.
In particolare si ha:

$$x = -11 - \sqrt{125} \Rightarrow y = \frac{(-11 - \sqrt{125})^2 + 4}{2(-11 - \sqrt{125})^2 - (-11 - \sqrt{125}) - 3} \cong 0,49$$

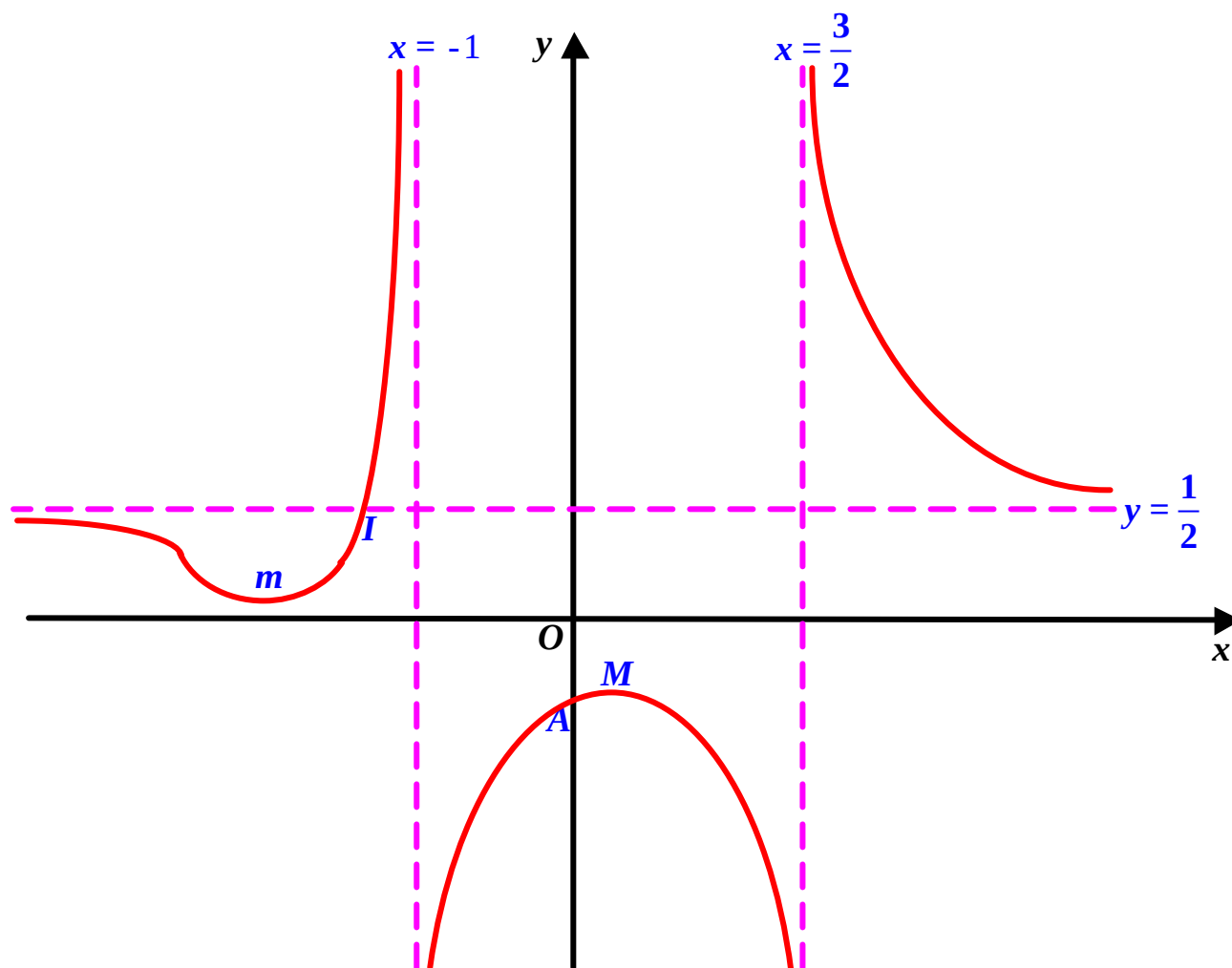
$$x = -11 + \sqrt{125} \Rightarrow y = \frac{(-11 + \sqrt{125})^2 + 4}{2(-11 + \sqrt{125})^2 - (-11 + \sqrt{125}) - 3} \cong -1,29$$

Ne segue, quindi, che:

$M(0,18; -1,29)$ è il punto di *Massimo*

$m(-22,18; 0,49)$ è il punto di *minimo*

IL GRAFICO.



Osservazione.

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Possiamo calcolare il punto di intersezione tra la funzione assegnata e la retta $y = \frac{1}{2}$ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3} = \frac{1}{2} \quad (\text{essendo uguali i primi membri delle due equazioni del sistema dovranno necessariamente essere uguali anche i secondi membri})$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 4}{2x^2 - x - 3} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{2(x^2 + 4) - (2x^2 - x - 3)}{2(2x^2 - x - 3)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + 4) - (2x^2 - x - 3) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 8 - 2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow x + 11 = 0 \Rightarrow x = -11$$

Dunque il punto di intersezione sarà $I = \left(-11, \frac{1}{2}\right)$.

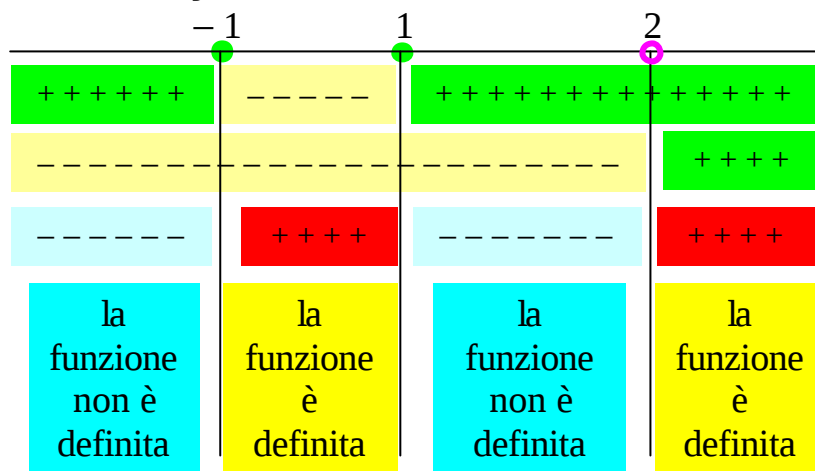
3) Studiare la seguente funzione irrazionale:

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 2}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Osserviamo in primo luogo che la funzione data è irrazionale: il suo indice di radice è pari, pari a 2, ed il suo radicando è una frazione; poiché si tratta di una radice quadrata, essa è definita solo per i valori della x per i quali il radicando è positivo; inoltre, essendo il radicando una frazione, bisogna considerare anche il denominatore diverso da zero. Risulta, pertanto:

$$\begin{aligned} C.E. &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{x - 2} \geq 0, x - 2 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \right\} = \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \leq -1; x \geq +1 \\ x > 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \right\} \end{aligned}$$



$$C.E. = \{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1, 2 < x < +\infty \}$$

Ne segue che la retta di equazione $x = 2$ rappresenta un *Asintoto Verticale* per la funzione data.

$$A.V.: x = 2$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{\frac{1}{2}} \cong 0,70 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2-1}{x-2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x_{1,2}=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow$$

 $\Rightarrow B = (-1, 0) \quad C = (1, 0) \text{ sono le intersezioni della funzione con l'asse } x$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} > 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x-2} > 0 \Rightarrow \text{sempre nel campo di esistenza}$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x-2} \right)} = +\infty$$

Ne segue che, per $x \rightarrow +\infty$, la $y \rightarrow +\infty$: dunque la funzione non ha *Asintoti Orizzontali*.
Si osservi, inoltre, che non è stato calcolato il limite della funzione per x che tende a $-\infty$ in quanto in tale parte di piano essa non è definita.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

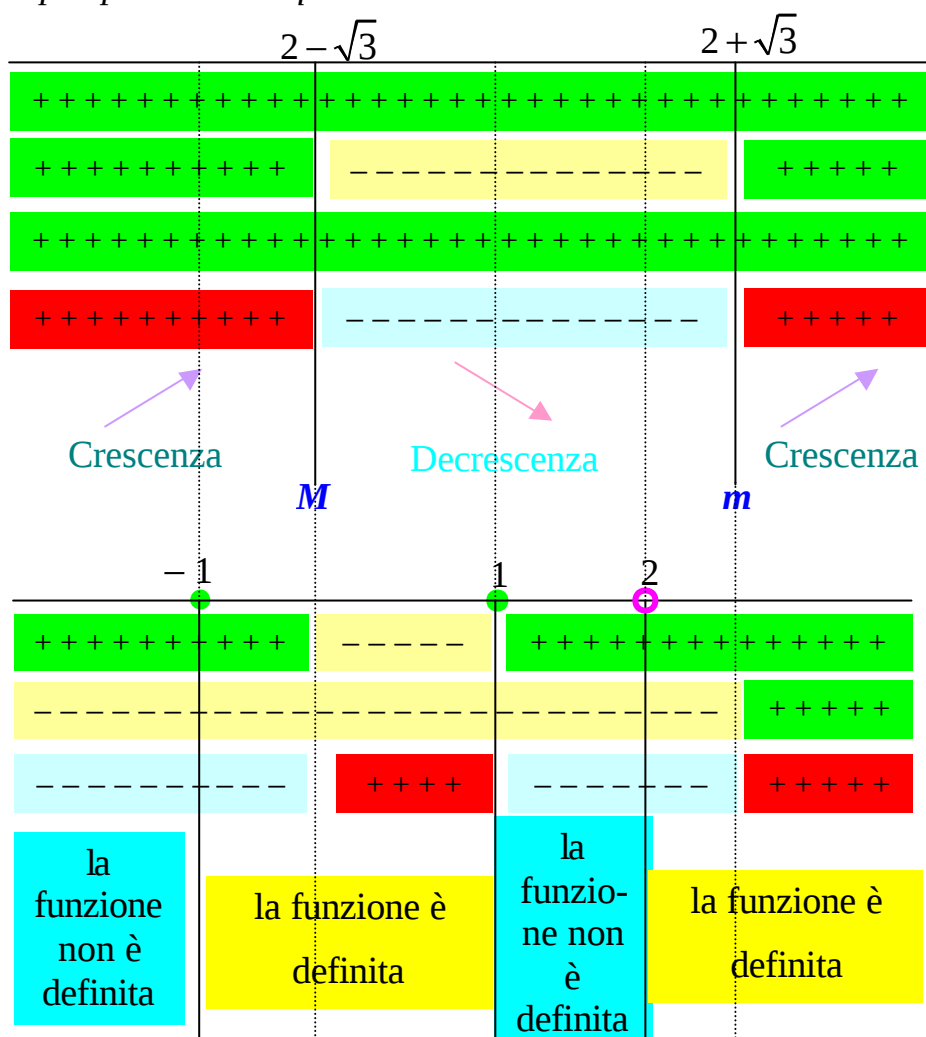
Risulta:

$$\begin{aligned} D\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}\right) &= \frac{D\left(\frac{x^2-1}{x-2}\right)}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} \cdot \frac{2x \cdot (x-2) - 1 \cdot (x^2-1)}{(x-2)^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} \cdot \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 1}{(x-2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} \cdot \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} \cdot \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} > 0 \\ \frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} > 0 \\ x^2-4x+1 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre nel campo di esistenza} \\ x^2-4x+1 > 0 \\ \text{sempre perchè è un quadrato} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre nel campo di esistenza} \\ x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-1}}{1} = 2 \pm \sqrt{3} \\ \text{sempre perchè è un quadrato} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre nel campo di esistenza} \\ x < 2 - \sqrt{3} \approx 0,26; x > 2 + \sqrt{3} \approx 3,73 \\ \text{sempre perchè è un quadrato} \end{cases}$$



Dall'unione dei due grafici (segno della derivata prima e campo di esistenza) ne segue che la funzione ha un massimo in $x = 2 - \sqrt{3}$ ed un minimo in $x = 2 + \sqrt{3}$.

In particolare si ha:

$$x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2 - 1}{(2 - \sqrt{3}) - 2}} \cong 0,73$$

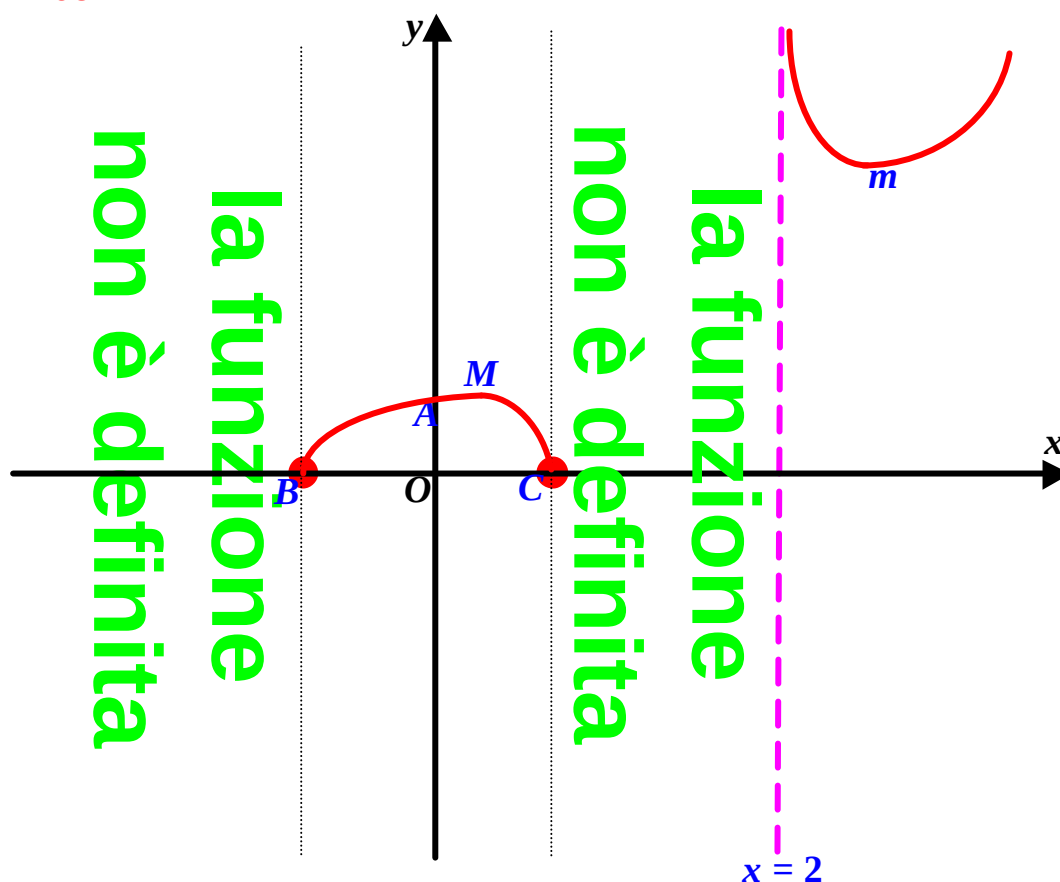
$$x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3})^2 - 1}{(2 + \sqrt{3}) - 2}} \cong 2,73$$

Ne segue, quindi, che:

$M(0,26;0,73)$ è il punto di *Massimo*

$m(3,73;2,73)$ è il punto di *minimo*

IL GRAFICO.



4) Studiare la seguente funzione esponenziale:

$$y = e^{\frac{x+1}{x^2+x}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione esponenziale, il cui esponente è una frazione, il suo campo di esistenza è rappresentato da tutto l'asse reale esclusi i punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$$\begin{aligned} \text{C.E.} &= \{x \in \mathbb{R}: x^2 + x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x+1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0, x+1 \neq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0, x \neq -1\} = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < -1, -1 < x < 0, 0 < x < +\infty\} \end{aligned}$$

Ne segue subito che le rette $x = -1$ ed $x = 0$ (asse y) sono due asintoti verticali per la funzione assegnata.

$$\text{A.V.: } x = -1, x = 0$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Osserviamo, in primo luogo, che la funzione non interseca l'asse y , perché in $x = 0$ essa presenta un asintoto verticale.

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x+1}{x^2+x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\frac{x+1}{x^2+x}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai} \end{cases} \Rightarrow \text{non ci sono intersezioni con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow e^{\frac{x+1}{x^2+x}} > 0 \Rightarrow \text{sempre in quanto si tratta di una funzione esponenziale, cioè:}$$

+++++

$$y > 0$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x+1}{x^2+x}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x+1}{x^2+x}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x^2+x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right)} = e^0 = 1$$

Ne segue che, per $x \rightarrow \pm \infty$, la $y \rightarrow 1$: dunque la retta $y = 1$ è un *Asintoto Orizzontale* sia *Destro* che *Sinistro* (la funzione, cioè ci tende sia da destra che da sinistra).

A.O.: $y = 1$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$\begin{aligned} D\left(e^{\frac{x+1}{x^2+x}}\right) &= e^{\frac{x+1}{x^2+x}} \cdot D\left(\frac{x+1}{x^2+x}\right) = e^{\frac{x+1}{x^2+x}} \cdot \left(\frac{1 \cdot (x^2+x) - (x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2}\right) = \\ &= e^{\frac{x+1}{x^2+x}} \cdot \left(\frac{x^2+x-2x^2-x-2x-1}{(x^2+x)^2}\right) = e^{\frac{x+1}{x^2+x}} \cdot \frac{-x^2-2x-1}{(x^2+x)^2} \end{aligned}$$

da cui:

$$y' > 0 \Rightarrow e^{\frac{x+1}{x^2+x}} \cdot \frac{-x^2-2x-1}{(x^2+x)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x^2+x}} > 0 \\ \frac{-x^2-2x-1}{(x^2+x)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x^2+x}} > 0 \\ -x^2-2x-1 > 0 \\ (x^2+x)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x+1}{x^2+x}} > 0 \\ x^2+2x+1 < 0 \\ (x^2+x)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ x^2+2x+1 < 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases}$$

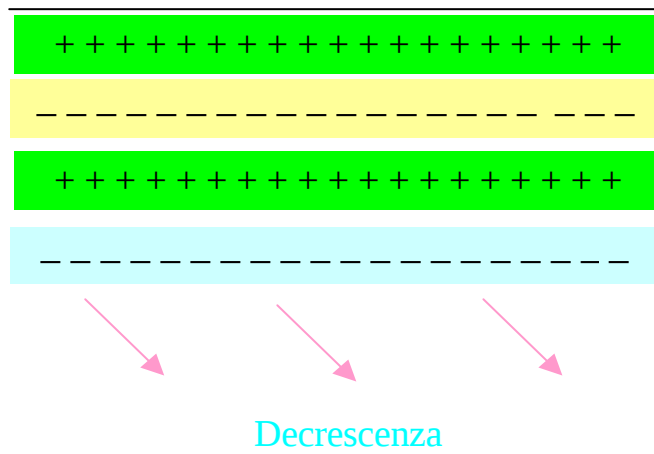
Troviamo, pertanto, le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione che figura nel sistema. Poiché risulta:

$$x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$$

segue:

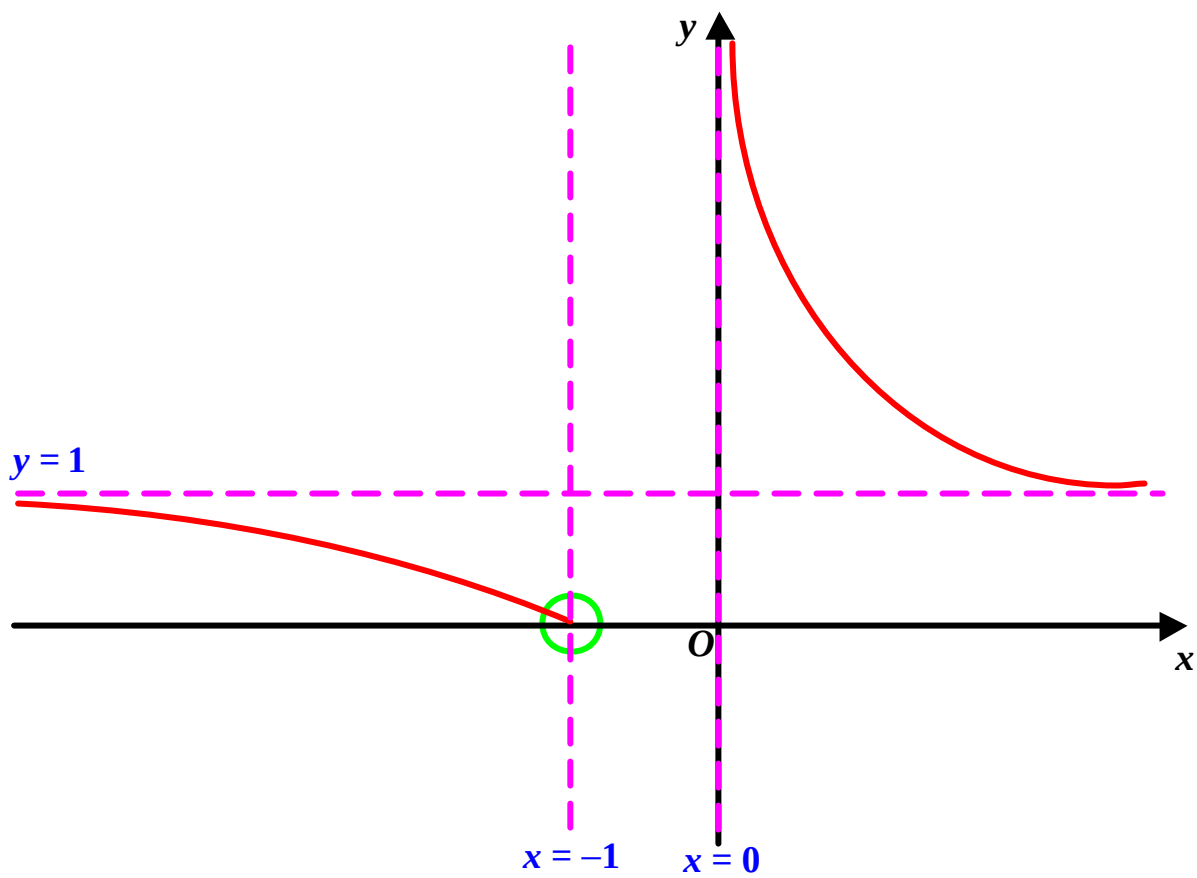
$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ x^2+2x+1 < 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ (x+1)^2 < 0 \\ \text{sempre} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ \text{mai (è un quadrato)} \\ \text{sempre} \end{cases}$$



Dunque la funzione è sempre decrescente, ovvero non presenta né massimi né minimi.

IL GRAFICO.



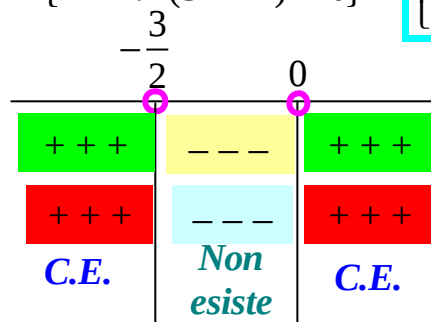
5) Studiare la seguente funzione logaritmica:

$$y = \ln(3x + 2x^2)$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione logaritmica il cui argomento è un polinomio di secondo grado con termine noto nullo, il campo di esistenza si ottiene esclusivamente imponendo che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo (il polinomio, infatti, è definito su tutto l'asse reale!!!) . Allora risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : 3x + 2x^2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(3 + 2x) > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{3}{2} = -1,5, x > 0\right\}$$



cioè le rette $x = -\frac{3}{2}$ ed $x = 0$ sono due asintoti verticali per la funzione assegnata.

$$A.V.: x = -\frac{3}{2}, x = 0$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Osserviamo che in $x = 0$ la funzione non è definita, per cui essa non interseca l'asse y .

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \ln(3x + 2x^2) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \ln(3x + 2x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\ln(3x + 2x^2)} = e^0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x + 2x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 8}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \cong -1,78 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4} \cong 0,28 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{-3 - \sqrt{17}}{4}, 0 \right) \quad B = \left(\frac{-3 + \sqrt{17}}{4}, 0 \right) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

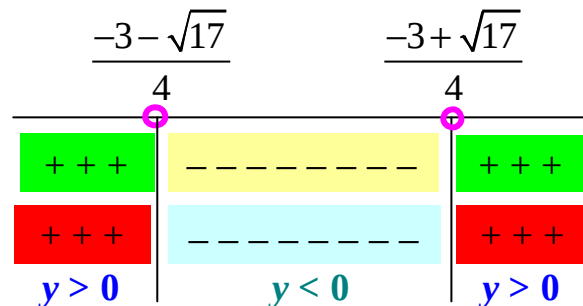
SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \ln(3x + 2x^2) > 0 \Rightarrow e^{\ln(3x + 2x^2)} > e^0 \Rightarrow 3x + 2x^2 > 1 \Rightarrow 3x + 2x^2 - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 3x - 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}, x > \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

avendo già calcolato precedentemente (nelle intersezioni con l'asse x) le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione di secondo grado.



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(3x + 2x^2)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 2x^2) \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 3x) \right] = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(3x + 2x^2)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 2x^2) \right] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 3x) \right] = \ln(+\infty) = +\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D[\ln(3x + 2x^2)] = \frac{1}{3x + 2x^2} \cdot (3 + 4x)$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{3 + 4x}{3x + 2x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 + 4x > 0 \\ 3x + 2x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{4} \\ x(3 + 2x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{3}{4} \cong -0,75 \\ x < -\frac{3}{2}, x > 0 \end{cases}$$

