

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

III Parziale - Compito C
26/05/2005
A. A. 2004 – 2005

1) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

La funzione non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, 8, sono esattamente $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$. Ma allora si ha:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$$

da cui, procedendo per tentativi, risulta:

$$P(x = +1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 8 = 1 + 3 - 6 - 8 = -10 \neq 0$$

$$P(x = -1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 8 = -1 + 3 + 6 - 8 = 0$$

cioè per $x = +1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	1	3	-6	-8
-1		-1	-2	8
	1	2	-8	0

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x + 1)(x^2 + 2x - 8)$$

Inoltre è possibile scomporre il polinomio di secondo grado:

$$Q(x) = x^2 + 2x - 8$$

utilizzando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = -1 \pm \sqrt{9} = -1 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1 - 3 = -4 \quad \text{e} \quad x_2 = -1 + 3 = 2$$

Quindi risulta:

$$Q(x) = x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$$

da cui:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = (x + 1)(x^2 + 2x - 8) = (x + 1)(x - 2)(x + 4)$$

È ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A = (0, -8)$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^3 + 3x^2 - 6x - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x + 1)(x - 2)(x + 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -4 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

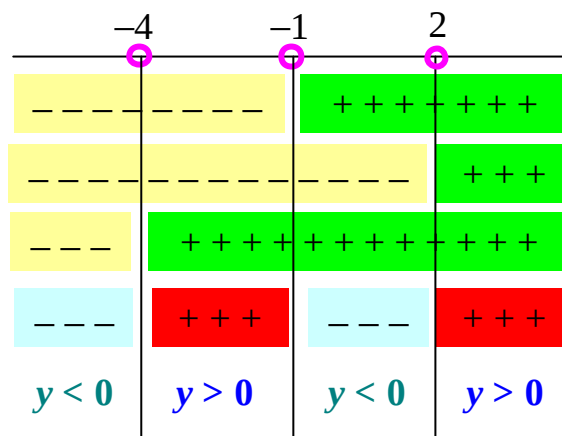
$\Rightarrow B = (-4, 0)$ $C = (-1, 0)$ $D = (2, 0)$ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 6x - 8 > 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 2)(x + 4) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x > -4 \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x^2 - 6x - 8) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D(x^3 + 3x^2 - 6x - 8) = 3x^2 + 6x - 6$$

da cui segue:

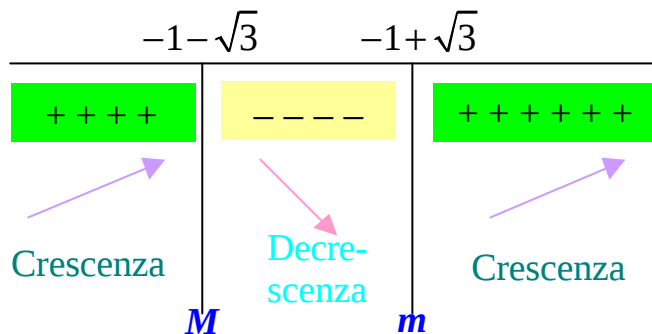
$$y' > 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 6 > 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 2 > 0$$

Troviamo, in primo luogo, le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{1} = -1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{3} \cong -2,73 \quad \text{e} \quad x_2 = -1 + \sqrt{3} \cong 0,73$$

da cui:

$$x^2 + 2x - 2 > 0 \Rightarrow x < -1 - \sqrt{3} \quad \text{e} \quad x > -1 + \sqrt{3}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = -1 - \sqrt{3}$ ed un minimo in $x = -1 + \sqrt{3}$.

In particolare:

$$x = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow y = (-1 - \sqrt{3})^3 + 3(-1 - \sqrt{3})^2 - 6(-1 - \sqrt{3}) - 8 \cong 10,39$$

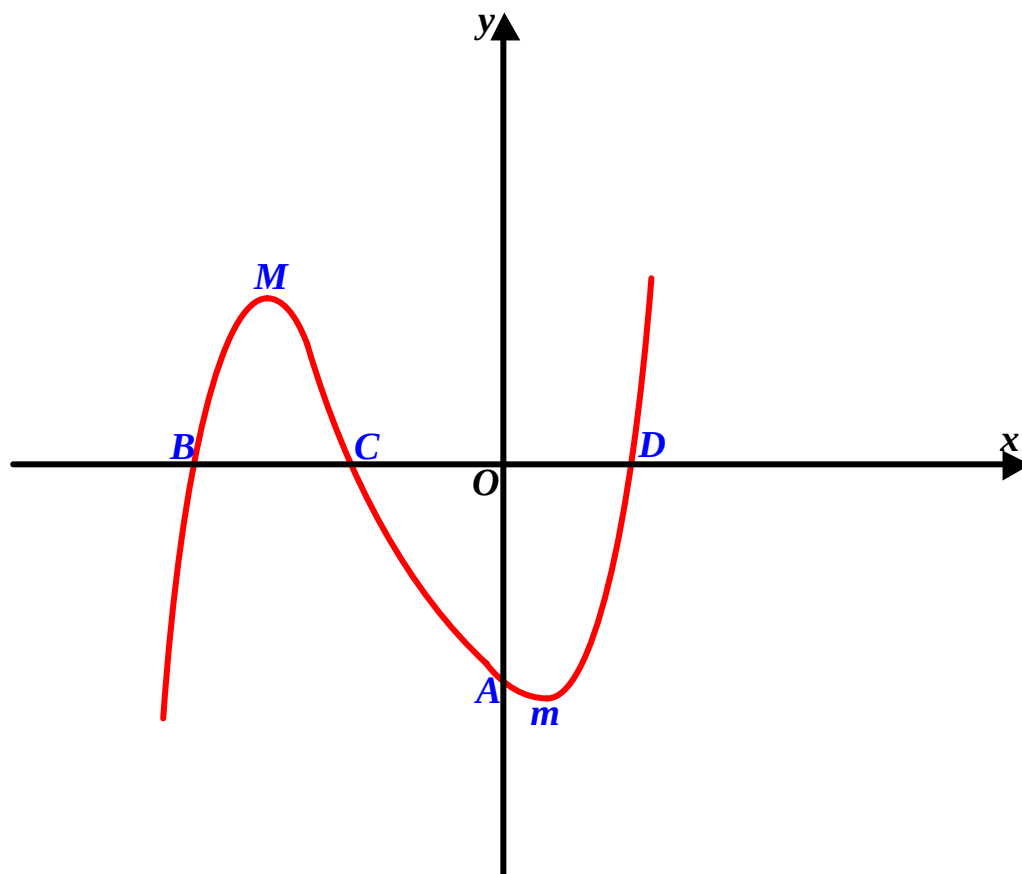
$$x = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow y = (-1 + \sqrt{3})^3 + 3(-1 + \sqrt{3})^2 - 6(-1 + \sqrt{3}) - 8 \cong -10,39$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,73; -10,39)$ è il punto di *minimo*

$M(-2,73; 10,39)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



2) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty\}$$

poiché $x^2 + 2$ è sempre diverso da zero (è la somma di due quadrati, essendo 2 il quadrato di $\sqrt{2}$).

La funzione non ha asintoti verticali!!!

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} = -0,5 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\frac{1}{2}\right) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

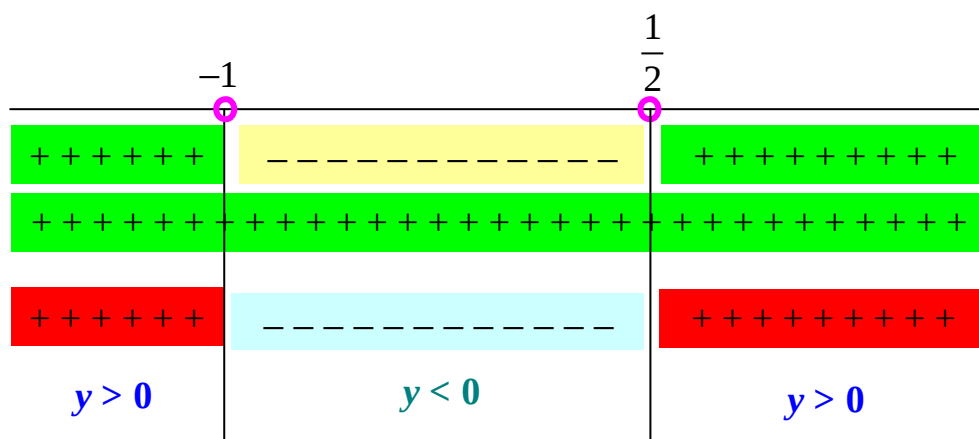
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = \frac{-1-3}{4} = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = (-1, 0) \quad C = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x^2 + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1, x > \frac{1}{2} \\ \text{sempre (somma di due quadrati)} \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} \right) = 2$$

cioè la retta di equazione $y = 2$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\text{AO.: } y = 2$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2}\right) &= \frac{(4x + 1) \cdot (x^2 + 2) - (2x^2 + x - 1) \cdot (2x)}{(x^2 + 2)^2} = \\ &= \frac{4x^3 + 8x + x^2 + 2 - 4x^3 - 2x^2 + 2x}{(x^2 + 2)^2} = \frac{-x^2 + 10x + 2}{(x^2 + 2)^2} \end{aligned}$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 10x + 2}{(x^2 + 2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + 10x + 2 > 0 \\ (x^2 + 2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x - 2 < 0 \\ (x^2 + 2)^2 > 0 \end{cases}$$

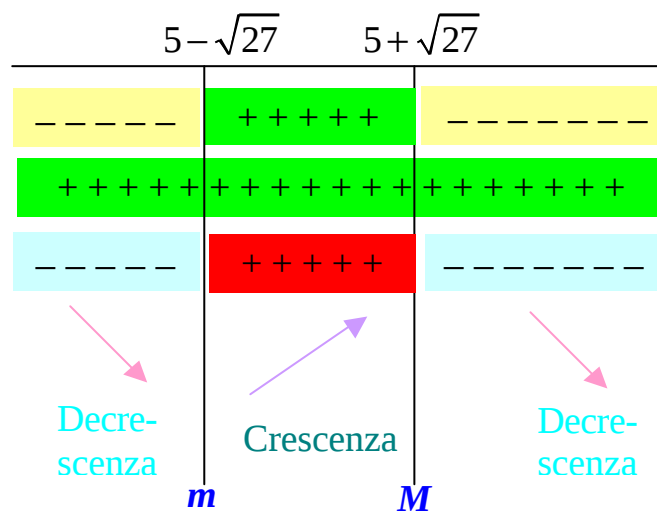
Poiché risulta:

$$x^2 - 10x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 2}}{1} = 5 \pm \sqrt{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 5 - \sqrt{27} \cong -0,19 \quad \text{e} \quad x_2 = 5 + \sqrt{27} \cong 10,19$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 10x - 2 < 0 \\ (x^2 + 2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - \sqrt{27} < x < 5 + \sqrt{27} \\ \text{sempre (è un quadrato)} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un minimo in $x = 5 - \sqrt{27}$ ed un massimo in $x = 5 + \sqrt{27}$.
In particolare si ha:

$$x = 5 - \sqrt{27} \Rightarrow y = \frac{2(5 - \sqrt{27})^2 + (5 - \sqrt{27}) - 1}{(5 - \sqrt{27})^2 + 2} \cong -0,54$$

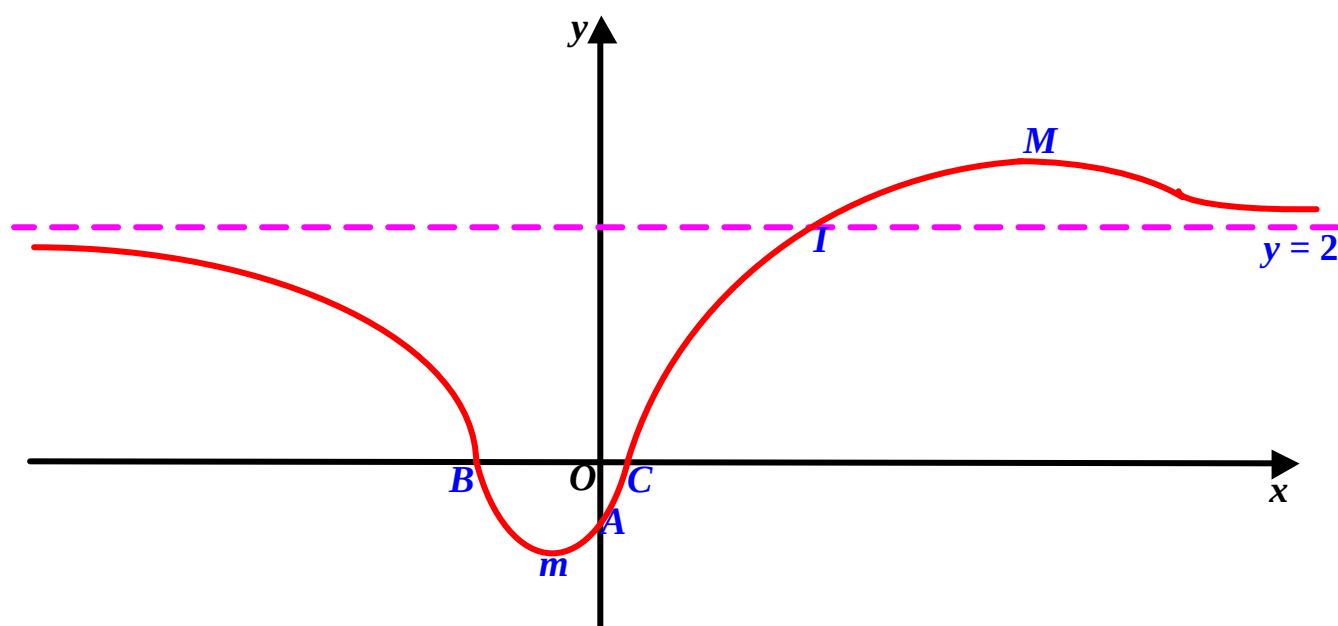
$$x = 5 + \sqrt{27} \Rightarrow y = \frac{2(5 + \sqrt{27})^2 + (5 + \sqrt{27}) - 1}{(5 + \sqrt{27})^2 + 2} \cong 2,04$$

Ne segue, quindi, che:

$M(10,19;2,04)$ è il punto di *Massimo*

$m(-0,19;-0,54)$ è il punto di *minimo*

IL GRAFICO.



Osservazione.

La funzione interseca l'asintoto orizzontale. Possiamo calcolare il punto di intersezione tra la funzione assegnata e la retta $y = 2$ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2} = 2 \quad \begin{array}{l} \text{(essendo uguali i primi membri delle due equazioni del sistema} \\ \text{dovranno necessariamente essere uguali anche i secondi membri)} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + x - 1 - 2x^2 - 4}{x^2 + 2} = 0 \Rightarrow \frac{x - 5}{x^2 + 2} = 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Dunque il punto di intersezione sarà $I = (5, 2)$.

3) Studiare la seguente funzione irrazionale:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Osserviamo in primo luogo che la funzione data è irrazionale: il suo indice di radice è dispari, pari a 3, ed il suo radicando è una frazione; poiché si tratta di una radice cubica, essa è definita su tutto l'asse reale, ma essendo il radicando una frazione bisogna considerare il denominatore diverso da zero. Risulta, pertanto:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq \pm 2\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, -2 < x < +2, +2 < x < +\infty\}$$

Ne segue subito che le rette $x = -2$, $x = +2$ sono due asintoti verticali per la funzione assegnata.

$$A.V.: x = -2, x = +2$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{-\frac{1}{4}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cong -0,62 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\sqrt[3]{\frac{1}{4}} \right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

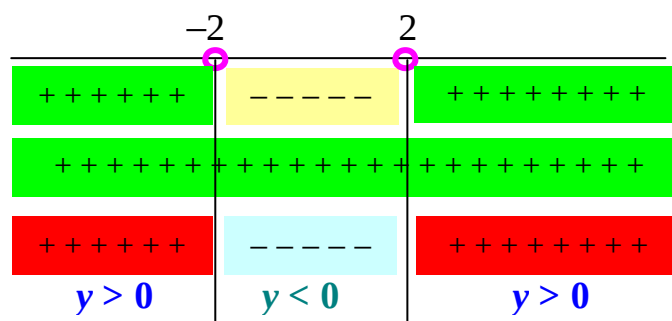
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai (somma di due quadrati)} \end{cases} \Rightarrow \text{non ci sono intersezioni con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (somma di due quadrati)} \\ x < -2, x > +2 \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-4}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)} = \sqrt[3]{1} = 1$$

Ne segue che, per $x \rightarrow \pm\infty$, la $y \rightarrow 1$: dunque la retta di equazione $y = 1$ è un *Asintoto Orizzontale*.

A.O.: $y = 1$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

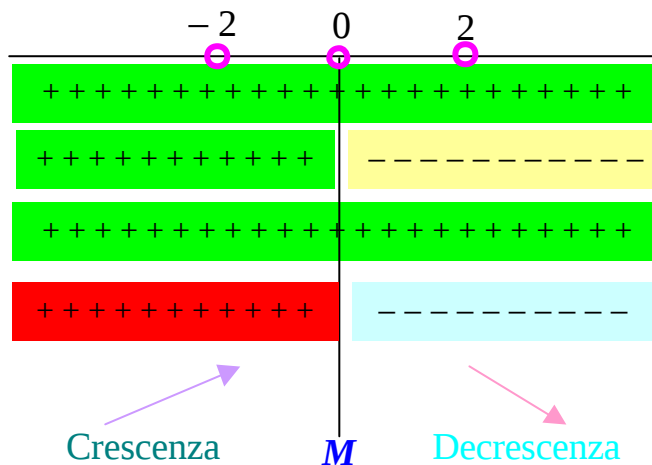
Si ottiene:

$$\begin{aligned} D \left(\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-4}} \right) &= \frac{D \left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)^2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)^2}} \cdot \frac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+1)}{(x^2-4)^2} = \\ &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)^2}} \cdot \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)^2}} \cdot \frac{-10x}{(x^2-4)^2} \end{aligned}$$

Ne segue:

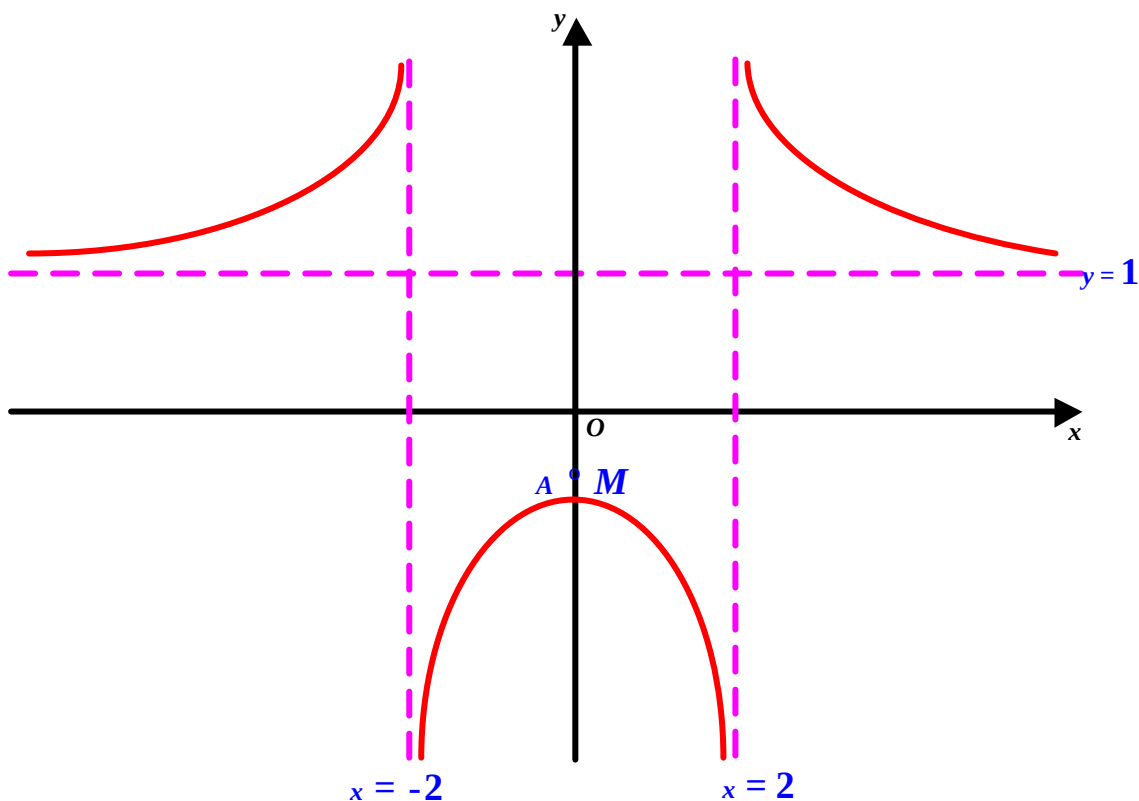
$$y' > 0 \Rightarrow \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)^2}} \cdot \frac{-10x}{(x^2-4)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)^2}} > 0 \\ \frac{-10x}{(x^2-4)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{\left(\frac{x^2+1}{x^2-4} \right)^2} > 0 \\ -10x > 0 \\ (x^2-4)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (il radicando è un quadrato e quindi sempre positivo)} \\ x < 0 \\ \text{sempre (somma di due quadrati)} \end{cases}$



Dunque il punto di massimo, ottenuto in $x = 0$, coincide esattamente con il punto di intersezione della funzione con l'asse y .

IL GRAFICO.



4) Studiare la seguente funzione esponenziale:

$$y = e^{\frac{x^2-2x}{x+1}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione esponenziale, il cui esponente è una frazione, il suo campo di esistenza è rappresentato da tutto l'asse reale esclusi i punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1, -1 < x < +\infty\}$$

Ne segue subito che la retta $x = -1$ è un asintoto verticale per la funzione assegnata.

$$A.V.: x = -1$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=e^{\frac{0+0}{0+1}} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A=(0,1) \text{ è il punto di intersezione della funzione con l'asse } y$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \text{mai} \end{cases} \Rightarrow \text{non ci sono intersezioni con l'asse } x$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} > 0 \Rightarrow \text{sempre in quanto si tratta di una funzione esponenziale, cioè:}$$

+++++

$$y > 0$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-2x}{x+1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2-2x}{x+1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ne segue che, per $x \rightarrow -\infty$, la $y \rightarrow 0$: dunque la retta $y = 0$ è un *Asintoto Orizzontale Sinistro* (la funzione, cioè ci tende solo da sinistra).

A.O.S.: $y = 0$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$\begin{aligned} D\left(e^{\frac{x^2-2x}{x+1}}\right) &= e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} \cdot D\left(\frac{x^2-2x}{x+1}\right) = e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} \cdot \left(\frac{(2x-2)(x+1) - (x^2-2x) \cdot 1}{(x+1)^2}\right) = \\ &= e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} \cdot \left(\frac{2x^2 + 2x - 2x - 2 - x^2 + 2x}{(x+1)^2}\right) = e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} \cdot \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

da cui:

$$y' > 0 \Rightarrow e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} \cdot \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} > 0 \\ \frac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{\frac{x^2-2x}{x+1}} > 0 \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases}$$

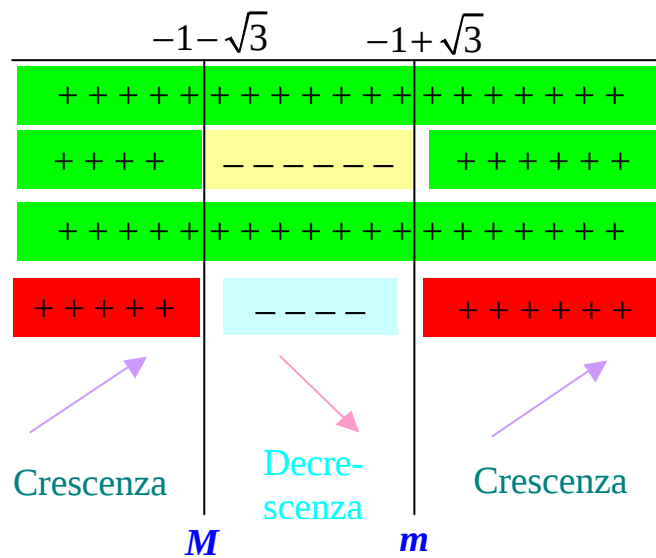
Troviamo, pertanto, le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione che figura nel sistema. Poiché risulta:

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{1} = -1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 - \sqrt{3} \cong -2,73 \quad \text{e} \quad x_2 = -1 + \sqrt{3} \cong 0,73$$

segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre (in quanto funzione esponenziale)} \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \\ \text{sempre (in quanto è un quadrato)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x < -1 - \sqrt{3}, x > -1 + \sqrt{3} \\ \text{sempre} \end{cases}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = -1 - \sqrt{3}$ ed un minimo in $x = -1 + \sqrt{3}$.
In particolare si ha:

$$x = -1 - \sqrt{3} \Rightarrow y = e^{\frac{(-1-\sqrt{3})^2 - 2(-1-\sqrt{3})}{(-1-\sqrt{3})+1}} \cong 0,00005$$

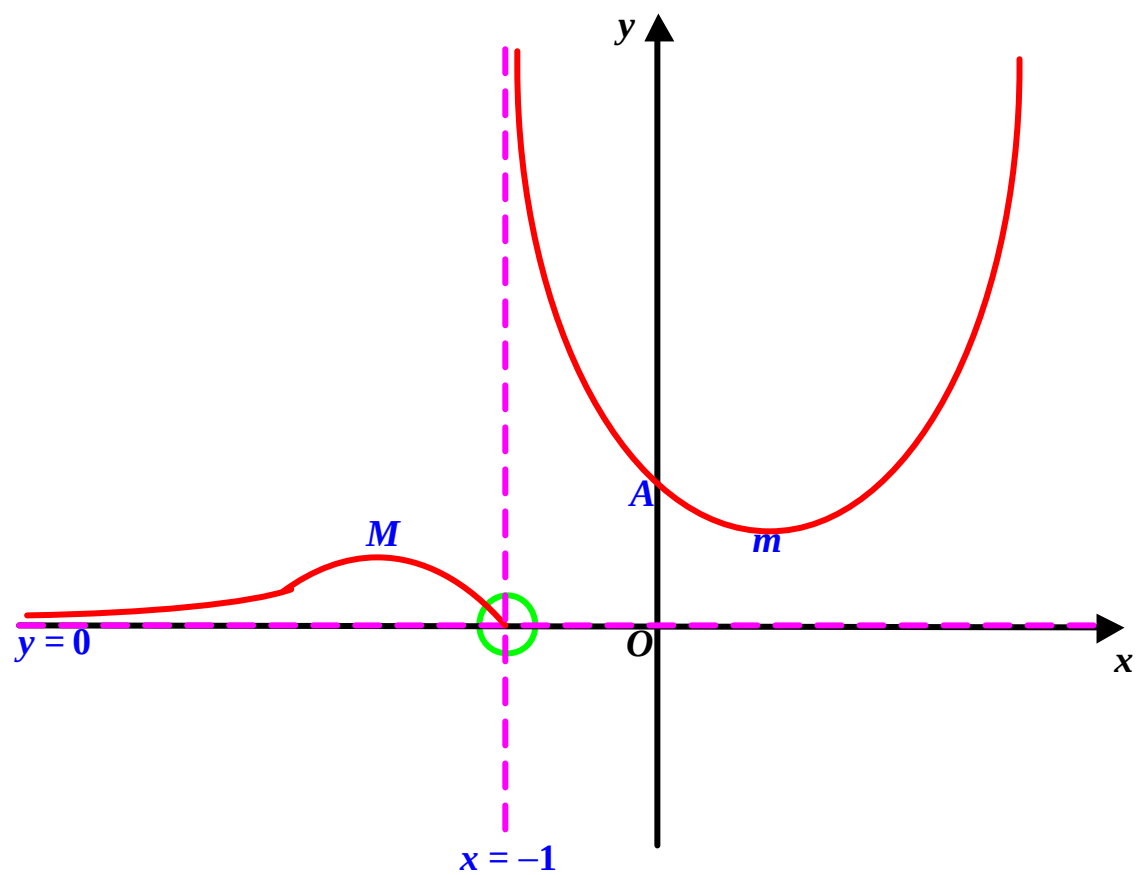
$$x = -1 + \sqrt{3} \Rightarrow y = e^{\frac{(-1+\sqrt{3})^2 - 2(-1+\sqrt{3})}{(-1+\sqrt{3})+1}} \cong 0,58$$

Ne segue, quindi, che:

$m(0,73;0,58)$ è il punto di *minimo*

$M(-2,73;0,00005)$ è il punto di *Massimo*

IL GRAFICO.



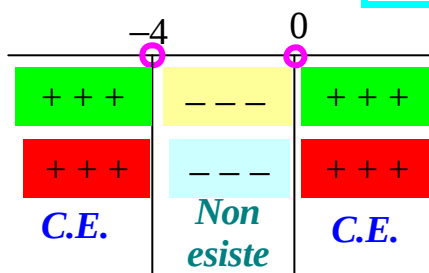
5) Studiare la seguente funzione logaritmica:

$$y = \ln(x^2 + 4x)$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione logaritmica il cui argomento è un polinomio di secondo grado con termine noto nullo, il campo di esistenza si ottiene esclusivamente imponendo che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo (il polinomio, infatti, è definito su tutto l'asse reale!!!) . Allora risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 4x > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(x + 4) > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < -4, x > 0\}$$



cioè le rette $x = -4$ ed $x = 0$ sono due asintoti verticali per la funzione assegnata.

$$A.V.: x = -4, x = 0$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Osserviamo che in $x = 0$ la funzione non è definita, per cui essa non interseca l'asse y .

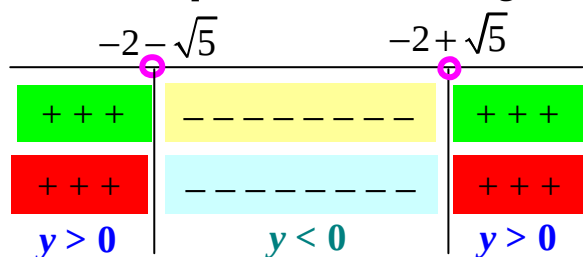
$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \ln(x^2 + 4x) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \ln(x^2 + 4x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{\ln(x^2 + 4x)} = e^0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 4x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 4x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+1}}{1} = -2 \pm \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = -2 - \sqrt{5} \cong -4,23 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = -2 + \sqrt{5} \cong 0,23 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{A = (-2 - \sqrt{5}, 0)} \quad \boxed{B = (-2 + \sqrt{5}, 0)} \text{ sono i punti di intersezione} \\ &\quad \quad \quad \text{della funzione con l'asse } x \end{aligned}$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$\begin{aligned} y > 0 &\Rightarrow \ln(x^2 + 4x) > 0 \Rightarrow e^{\ln(x^2 + 4x)} > e^0 \Rightarrow x^2 + 4x > 1 \Rightarrow x^2 + 4x - 1 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x < -2 - \sqrt{5}, x > -2 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

avendo già calcolato precedentemente (nelle intersezioni con l'asse x) le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione di secondo grado.



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^2 + 4x)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4x) \right] = \ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(x^2 + 4x)] = \ln \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 4x) \right] = \ln(+\infty) = +\infty$$

La funzione non ha asintoti orizzontali!!!

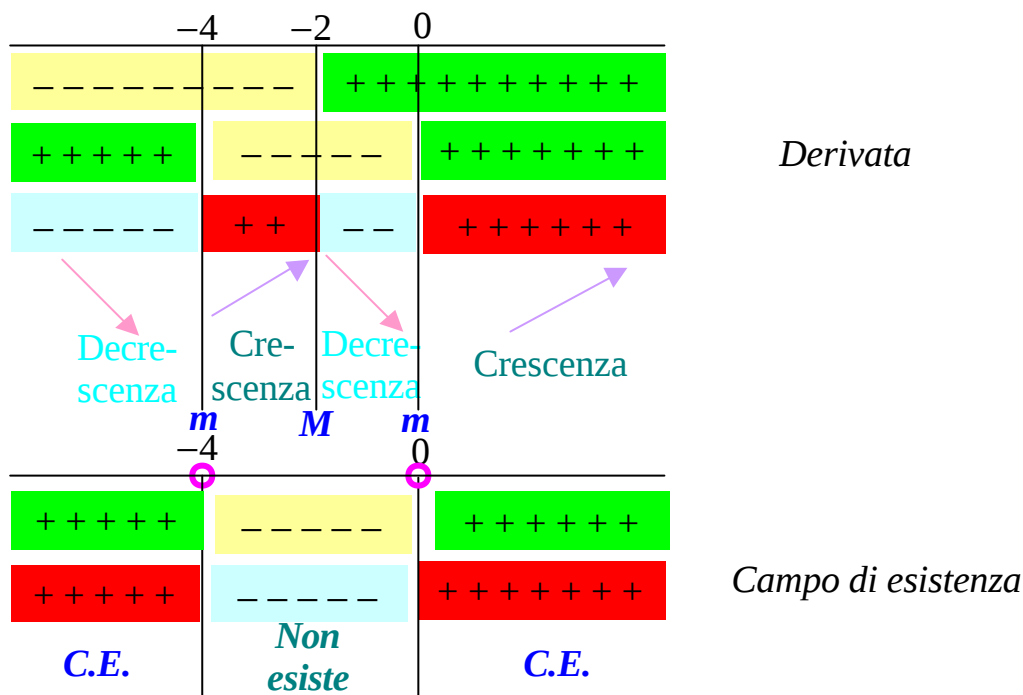
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D[\ln(x^2 + 4x)] = \frac{1}{x^2 + 4x} \cdot (2x + 4)$$

da cui segue:

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{2x + 4}{x^2 + 4x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x^2 + 4x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x(x + 4) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x < -4, x > 0 \end{cases}$$



Dunque, tenendo conto dei due grafici contemporaneamente, segue che la funzione non ha né massimi né minimi: le rette $x = -4$ ed $x = 0$ sono, infatti, due asintoti verticali della funzione!!!

IL GRAFICO.

