

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

II Parziale - Compito B
3/05/2005
A. A. 2004 – 2005

1) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 25 \\ x + y = 4 \\ 2x + 2y - z = 13 \end{cases}$$

con il metodo della matrice inversa e verificare che la soluzione trovata è esatta risolvendo lo stesso sistema con il metodo di Cramer.

Osserviamo in primo luogo che il sistema dato è un sistema quadrato di tre equazioni in tre incognite, precisamente x , y e z , ovvero di ordine 3×3 .

Tenendo conto che nella seconda equazione manca l'incognita z , la matrice dei coefficienti associata al sistema è la seguente:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mentre la colonna dei termini noti è data da:

$$N_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Metodo della matrice inversa

Poiché è ben noto che una matrice quadrata ammette l'inversa se e solo se il suo determinante è diverso da zero, dobbiamo innanzitutto verificare l'esistenza o meno dell'inversa di A . Calcoliamone, pertanto, il suo determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 6 + 6 + 1 = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}, \text{ inversa di } A$$

Dunque:

$$\det A = -1$$

Calcoliamo ora l'inversa di A utilizzando, ad esempio, il metodo dei complementi algebrici, ovvero la relazione:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^t$$

Dobbiamo quindi scrivere, in primo luogo, la matrice dei complementi algebrici A^* :

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Risulta allora:

$$\begin{aligned} A_{11} &= + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1; & A_{12} &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +1; & A_{13} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \\ A_{21} &= - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5; & A_{22} &= + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = +4; & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2; \\ A_{31} &= + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = +3; & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3; & A_{33} &= + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \end{aligned}$$

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^t = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché sappiamo che un sistema lineare può scriversi, in forma compatta, come $AX = N$ (A è la matrice dei coefficienti del sistema dato, X è il vettore colonna costituito dalle incognite del sistema, N è la colonna dei termini noti del sistema), moltiplicando a sinistra ambo i membri di tale equazione per A^{-1} , otteniamo:

$$A^{-1}AX = A^{-1}N \Rightarrow IX = A^{-1}N \Rightarrow X = A^{-1}N$$

da cui, sostituendo i valori di X , di A^{-1} e di N , nell'equazione $X_{3 \times 1} = (A^{-1})_{3 \times 3} N_{3 \times 1}$, segue:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

e, moltiplicando al secondo membro le righe di A^{-1} per le colonne di N , otteniamo una matrice di ordine 3×1 , precisamente:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 + 20 - 39 \\ -25 - 16 + 39 \\ 0 + 8 - 13 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Dunque la soluzione del nostro sistema, con il metodo della matrice inversa, è data dalla terna:

$$(x, y, z) = (6, -2, -5)$$

Metodo di Cramer

Poiché ci troviamo di fronte ad un sistema quadrato ed abbiamo verificato già in precedenza che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è diverso da zero, essendo $\det A = -1$, possiamo affermare che è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente imposta dal Teorema di Cramer (condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema quadrato ammetta soluzioni è che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema sia diverso da zero). Dunque, sempre per il Teorema di Cramer, il sistema dato ammette una ed una sola soluzione data da:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right)$$

dove:

- ❖ $\Delta = \det A = -1$;
- ❖ Δ_x è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti dell'incognita x con la colonna N dei termini noti;
- ❖ Δ_y è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti dell'incognita y con la colonna N dei termini noti;
- ❖ Δ_z è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna dei coefficienti dell'incognita z con la colonna N dei termini noti

Poiché:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ed} \quad N_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix}$$

risulta:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} N & y & z \\ 25 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 13 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -25 - 24 + 39 + 4 = -6$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} x & N & z \\ 2 & 25 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 13 & -1 \end{vmatrix} = -8 - 39 + 24 + 25 = 2$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} x & y & N \\ 2 & 1 & 25 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 26 + 8 + 50 - 50 - 16 - 13 = 5$$

da cui, applicando la regola di Cramer per il calcolo delle soluzioni, otteniamo:

$$(x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta} \right) = \left(\frac{-6}{-1}, \frac{2}{-1}, \frac{5}{-1} \right) = (6, -2, -5)$$

Dunque la soluzione del nostro sistema, con il metodo di Cramer, è data dalla terna:

$$(x, y, z) = (6, -2, -5)$$

che è esattamente la stessa trovata precedentemente con il metodo della matrice inversa.

2) Risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ x + y - 8z = 13 \\ 4x + y + z = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti associata al sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 32 - 2 + 8 + 24 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \det A = 0$$

Poiché il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema è nullo, dobbiamo verificare se il sistema ammette o meno soluzioni utilizzando il Teorema di Rouché-Capelli, ovvero calcolando i ranghi delle due matrici, quella incompleta e quella completa.

Consideriamo, in primo luogo, la matrice incompleta, ovvero quella dei coefficienti del sistema. Osserviamo subito che:

$$0 \leq r(A) \leq 3$$

Inoltre, essendo $\det A = 0$, risulta necessariamente $r(A) \neq 3$, da cui:

$$0 \leq r(A) \leq 2$$

ed essendo A diversa dalla matrice nulla, segue anche che $r(A) \neq 0$. Dunque:

$$0 < r(A) \leq 2$$

Verifichiamo ora se risulta $r(A) = 2$. Consideriamo, pertanto, un minore del secondo ordine estratto dalla matrice A diverso da zero:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$$

Scriviamo ora la matrice completa, aggiungendo alla matrice A (dei coefficienti del sistema) la colonna dei termini noti:

$$(A|N) = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \mid \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}}_N \right) \Rightarrow 0 < r(A|N) \leq 3$$

Per il calcolo del rango della matrice completa utilizziamo, per comodità, il Teorema di Kronecker. Consideriamo, a tal proposito, un minore del secondo ordine diverso da zero, ad esempio proprio M_1 , ed i suoi due minori orlati. Risulta:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \det A = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 13 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 52 + 5 - 20 - 39 - 1 = 0$$

Quindi, poiché tutti i minori orlati del terzo ordine sono nulli, segue che $r(A|N) = 2$.

È dunque soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente del Teorema di Rouché-Capelli, essendo $r(A) = r(A|N)$.

Il sistema dato ammette, pertanto, $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni ($n = 3$ è il numero delle incognite del sistema, $r = 2$ è il rango delle due matrici), che dipenderanno da $n - r = 1$ parametri.

Per determinare tali soluzioni scriviamo ora un sistema equivalente al dato, costituito proprio da quelle equazioni i cui coefficienti delle incognite sono stati considerati per trovare un minore del secondo ordine non nullo, ovvero M_1 ; dobbiamo poi tenere ben in mente il fatto che, nel calcolo del minore M_1 di ordine 2, sono stati tralasciati i coefficienti dell'incognita z , che diventerà, quindi, il nostro parametro. In virtù delle precedenti osservazioni possiamo quindi considerare il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ x + y - 8z = 13 \end{cases} \quad \text{con } z = t \in \mathbb{R}$$

che può essere scritto anche nel modo seguente:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 + 2t \\ x + y = 13 + 8t \end{cases}$$

che si può risolvere con Cramer, essendo il determinante della matrice dei coefficienti del sistema, rappresentato proprio da M_1 , diverso da zero.

Pertanto:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5+2t & 1 \\ 13+8t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{5+2t-13-8t}{2} = \frac{-6t-8}{2} = -3t-4$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5+2t \\ 1 & 13+8t \end{vmatrix}}{2} = \frac{39+24t-5-2t}{2} = \frac{22t+34}{2} = 11t+17$$

Al variare di t in $\mathbb{R}$, quindi, otteniamo le seguenti soluzioni del sistema:

$$(x, y, z) = (-3t - 4, 11t + 17, t)$$

3) Determinare, se esiste, l'inversa della seguente matrice utilizzando il metodo della matrice identità:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con il vedere se esiste o meno la matrice inversa di A calcolando il suo determinante. Risulta pertanto:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 42 - 8 - 24 - 14 = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1}$$

Affianchiamo ora alla matrice data, di ordine 3×3 , la matrice identità dello stesso ordine:

$$[A | I_3] = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_A \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \right)$$

Effettuiamo ora le operazioni elementari sulle righe, o sulle colonne, di $[A | I_3]$ in modo tale da ottenere, alla fine, una matrice della forma $[I_3 | B]$, dove la matrice B sarà proprio l'inversa A^{-1} di A :

$$\begin{aligned} [A | I_3] &= \left(\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \left(\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_3} \left(\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow 2R_1 - R_2} \left(\begin{pmatrix} 6 & -11 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow 3R_2 + R_1} \left(\begin{pmatrix} 6 & -11 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - 3R_2} \left(\begin{pmatrix} 6 & -11 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 14 \end{pmatrix} \right) \\ &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + 2R_2} \left(\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 24 & -33 & 42 \\ -2 & 3 & -4 \\ 8 & -9 & 14 \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 \rightarrow \frac{1}{12}R_1 \\ R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{4}R_3 \end{matrix}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -\frac{11}{4} & \frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{9}{4} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \right) \end{aligned}$$

Dunque risulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{11}{4} & \frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{9}{4} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

4) Individuare se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti:

$$\bar{v}_1 = (0,0,1), \quad \bar{v}_2 = (1,0,1), \quad \bar{v}_3 = (1,2,0)$$

Primo metodo

Sfruttiamo la definizione di lineare dipendenza o indipendenza di vettori.

Scriviamo una combinazione lineare dei tre vettori e la eguagliamo al vettore nullo, precisamente:

$$(*) \quad k_1 \bar{v}_1 + k_2 \bar{v}_2 + k_3 \bar{v}_3 = \bar{0}$$

dove i k_i ($i = 1, 2, 3$) sono degli scalari ovvero dei numeri reali.

Poniamo ora nella (*), al posto dei vettori, le terne assegnate:

$$k_1 (0,0,1) + k_2 (1,0,1) + k_3 (1,2,0) = (0,0,0)$$

Moltiplichiamo ciascuna componente del vettore per il corrispondente scalare:

$$(0,0,k_1) + (k_2,0,k_2) + (k_3,2k_3,0) = (0,0,0)$$

Sommiamo ora componente per componente:

$$(0 + k_2 + k_3, 0 + 0 + 2k_3, k_1 + k_2 + 0) = (0,0,0)$$

cioè:

$$(k_2 + k_3, 2k_3, k_1 + k_2) = (0,0,0)$$

Affinché l'equazione sopra scritta sia soddisfatta, i due membri devono essere uguali, ovvero i due vettori (quello che figura al primo membro e quello che figura al secondo membro) devono avere uguali le componenti che si trovano nella medesima posizione, precisamente deve risultare:

$$\begin{cases} k_2 + k_3 = 0 \\ 2k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

Resta quindi da risolvere il sistema sopra riportato, ovvero determinare i valori delle incognite k_i ($i = 1, 2, 3$), osservando che se sono tutti nulli allora i vettori assegnati sono linearmente indipendenti, mentre se ne esiste uno diverso da zero allora siamo nel caso della lineare dipendenza dei vettori.

Osserviamo, in primo luogo, che si tratta di un sistema quadrato di tre equazioni in tre incognite.

Dalla seconda equazione otteniamo:

$$k_3 = 0$$

Sostituiamo tale valore, ad esempio, nella prima equazione:

$$k_2 = 0$$

Sostituiamo i valori fino ad ora trovati nella terza equazione:

$$k_1 = 0$$

Abbiamo così ottenuto:

$$k_1 = 0$$

$$k_2 = 0$$

$$k_3 = 0$$

Dunque il sistema ammette solo la soluzione nulla data dalla terna:

$$(k_1, k_2, k_3) = (0, 0, 0)$$

Poiché gli scalari, soluzione del nostro sistema, sono tutti nulli i tre vettori assegnati risultano essere **linearmente indipendenti**.

Secondo metodo

Sfruttiamo la nozione di rango.

Consideriamo la matrice costituita dai quattro vettori riga assegnati:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Determiniamo il rango di A , sapendo che due o più vettori sono linearmente indipendenti se il rango della matrice ad essi associata è massimo.

Risulta, pertanto:

$$0 < r(A) \leq 3$$

Applichiamo Kronecker e consideriamo il seguente minore di ordine 2 diverso da zero:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 2$$

Calcoliamo adesso l'unico minore orlato di M_1 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Dunque, poiché tale minore è diverso da zero risulta $r(A) = 3$, cioè il rango di A è massimo. I vettori sono pertanto **linearmente indipendenti**.

5) Determinare il rango della seguente matrice utilizzando il metodo di Kronecker:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Iniziamo con l'osservare che la matrice A è rettangolare di ordine $m \times n = 3 \times 4$, per cui risulta:

$$0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\} = \min\{3, 4\} = 3$$

Poiché, inoltre, la matrice A non è la matrice nulla segue che $r(A) \neq 0$. Dunque:

$$0 < r(A) \leq 3$$

Consideriamo ora un minore del secondo ordine diverso da zero. Sia esso, ad esempio:

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) \geq 2$$

Calcoliamoci ora i minori orlati di M_1 , osservando che se sono tutti nulli allora è $r(A) = 2$, mentre se ne esiste almeno uno non nullo è $r(A) = 3$. Allora otteniamo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 45 + 36 + 6 + 45 - 36 = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 45 - 36 - 6 - 45 + 36 = 0$$

Poiché abbiamo trovato che tutti i minori orlati di M_1 del terzo ordine sono uguali a zero possiamo affermare che:

$$r(A) = 2$$