

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito A
5/04/2005
A. A. 2004 – 2005

1) Risolvere la seguente disequazione razionale intera di primo grado:

$$\frac{17-x}{2} + 2x > \frac{8-3x}{3} + \frac{25}{3}$$

Iniziamo con il trasportare al primo membro tutti i termini che compaiono al secondo membro:

$$(*) \quad \frac{17-x}{2} + 2x - \frac{8-3x}{3} - \frac{25}{3} > 0$$

Determiniamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{3(17-x) + 2x \cdot 6 - 2(8-3x) - 2 \cdot 25}{6} > 0$$

Moltiplichiamo ambo i membri per 6, ovvero per il minimo comune multiplo:

$$3(17-x) + 2x \cdot 6 - 2(8-3x) - 2 \cdot 25 > 0$$

Svolgiamo i calcoli:

$$51 - 3x + 12x - 16 + 6x - 50 > 0$$

Raccogliamo i termini simili:

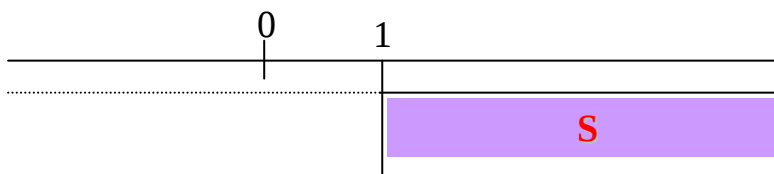
$$15x - 15 > 0$$

Semplifichiamo ambo i membri della disequazione per 15:

$$x - 1 > 0$$

La disequazione data (*), pertanto, ammette la seguente soluzione:

$$x > 1$$



$$S = \{x > 1\}$$

2) Risolvere la seguente disequazione razionale intera di secondo grado:

$$(2x-3)(2x+1) \geq \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Iniziamo con il trasportare al primo membro tutti i termini che compaiono al secondo membro:

$$(2x-3)(2x+1) - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$$

Eseguiamo il prodotto e sviluppiamo il quadrato del binomio:

$$4x^2 + 2x - 6x - 3 - \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) \geq 0$$

Eliminiamo la parentesi tonda cambiando di segno:

$$4x^2 + 2x - 6x - 3 - x^2 - x - \frac{1}{4} \geq 0$$

Determiniamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{16x^2 + 8x - 24x - 12 - 4x^2 - 4x - 1}{4} \geq 0$$

Moltiplichiamo ambo i membri per 4, ovvero per il minimo comune multiplo:

$$16x^2 + 8x - 24x - 12 - 4x^2 - 4x - 1 \geq 0$$

Raccogliamo i termini simili:

$$(*) \quad 12x^2 - 20x - 13 \geq 0$$

Scriviamo l'equazione associata alla disequazione (*):

$$12x^2 - 20x - 13 = 0$$

Troviamo le soluzioni dell'equazione associata utilizzando la formula risolutiva ridotta:

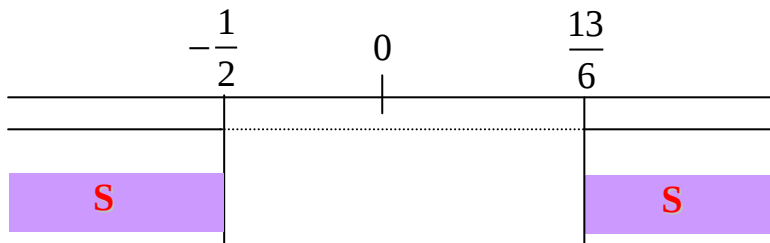
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a} = \frac{\frac{20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20}{2}\right)^2 - (12) \cdot (-13)}}{12} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 156}}{12} = \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{256}}{12} = \frac{10 \pm 16}{12} \end{aligned}$$

Ne segue, quindi:

$$x_1 = \frac{10-16}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{10+16}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}$$

Allora la (*), e di conseguenza la disequazione assegnata, ammette soluzioni, ovvero è positiva, per valori esterni alle due radici appena determinate:

$$x \leq -\frac{1}{2}, x \geq \frac{13}{6}$$



$$S = \left\{ x \leq -\frac{1}{2}, x \geq \frac{13}{6} \right\}$$

3) Risolvere la seguente disequazione razionale fratta:

$$\frac{x+1}{x-1} + 1 \leq \frac{x-2}{x+2} + \frac{14}{5}$$

Iniziamo con il trasportare al primo membro tutti i termini che compaiono al secondo membro:

$$(*) \quad \frac{x+1}{x-1} + 1 - \frac{x-2}{x+2} - \frac{14}{5} \leq 0$$

Determiniamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{5(x+1)(x+2) + 5(x-1)(x+2) - 5(x-2)(x-1) - 14(x-1)(x+2)}{5(x-1)(x+2)} \leq 0$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{5(x^2 + 2x + x + 2) + 5(x^2 + 2x - x - 2) - 5(x^2 - x - 2x + 2) - 14(x^2 + 2x - x - 2)}{5(x-1)(x+2)} \leq 0$$

da cui:

$$\frac{5x^2 + 10x + 5x + 10 + 5x^2 + 10x - 5x - 10 - 5x^2 + 5x + 10x - 10 - 14x^2 - 28x + 14x + 28}{5(x-1)(x+2)} \leq 0$$

Raccogliamo i termini simili:

$$(**) \quad \frac{-9x^2 + 21x + 18}{5(x-1)(x+2)} \leq 0$$

Prima di studiare la disequazione occorre determinare il suo campo di esistenza, ovvero bisogna trovare quei valori della x per i quali il denominatore non si annulla:

$$5(x-1)(x+2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} 5 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sempre} \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

La (**) allora è equivalente al seguente sistema (numeratore e denominatore devono essere discordi!!):

$$\begin{cases} -9x^2 + 21x + 18 \leq 0 \\ 5(x-1)(x+2) > 0 \end{cases}$$

Studiamo la prima disequazione del sistema:

$$(***) \quad -9x^2 + 21x + 18 \leq 0$$

Cambiamo il segno ad ambo i membri ed invertiamo il verso della disequazione:

$$(1) \quad 9x^2 - 21x - 18 \geq 0$$

Dividiamo per 3 ambo i membri della disequazione:

$$3x^2 - 7x - 6 \geq 0$$

Scriviamo ora l'equazione associata:

$$3x^2 - 7x - 6 = 0$$

le cui soluzioni sono date da:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4(3) \cdot (-6)}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{121}}{6} = \frac{7 \pm 11}{6}$$

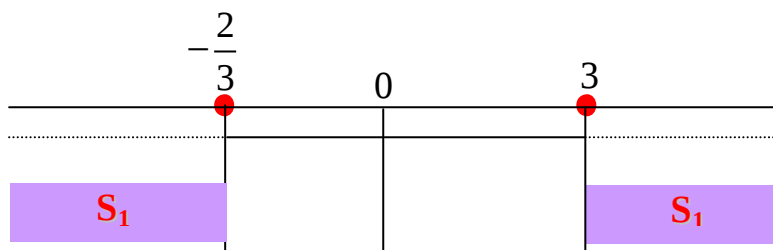
Ne segue, quindi:

$$x_1 = \frac{7-11}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \quad x_2 = \frac{7+11}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

cioè la (1) è soddisfatta per valori esterni alle due radici.

Allora la (***) ammette soluzioni, ovvero è negativa, dove la (1) è soddisfatta, ossia per valori esterni alle due radici appena determinate:

$$x \leq -\frac{2}{3}, x \geq 3$$



$$S_1 = \left\{ x \leq -\frac{1}{2}, x \geq \frac{13}{6} \right\}$$

Studiamo ora la seconda disequazione del sistema:

$$(***) \quad 5(x-1)(x+2) > 0$$

Scriviamo ora l'equazione associata, dividendo ambo i membri per 5:

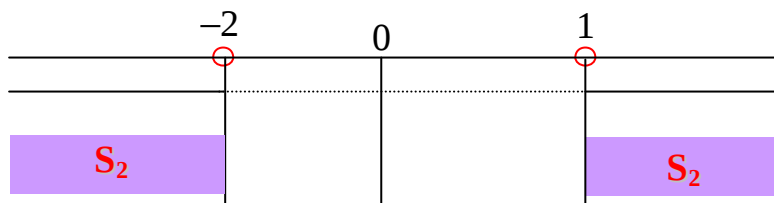
$$(x-1)(x+2) = 0$$

le cui soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} (x-1) = 0 \\ (x+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

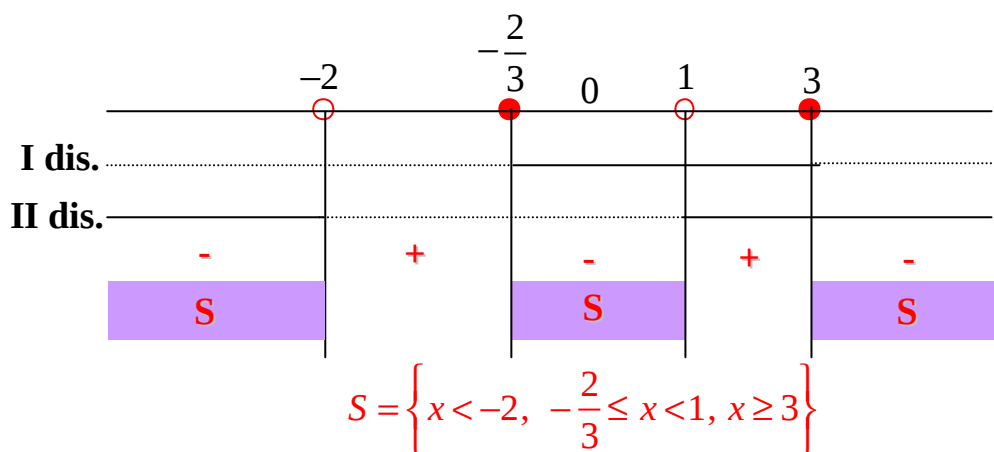
Allora la (****) ammette soluzioni, ovvero è positiva, per valori esterni alle due radici appena determinate:

$$x < -2, x > 1$$



$$S_2 = \{ x < -2, x > 1 \}$$

Le soluzioni della (*) si ottengono, quindi, riportando in un unico grafico le soluzioni S_1 ed S_2 , facendo il prodotto dei segni e considerando le soluzioni negative (bisogna tenere in considerazione il verso della disequazione assegnata!!!):



4) Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo A una matrice quadrata di ordine 4, risulta possibile calcolare il suo determinante utilizzando il metodo di Laplace, sviluppandolo rispetto alla seconda o terza o quarta riga (è più conveniente scegliere una di tali righe in quanto in ciascuna vi è un elemento nullo, a differenza della prima riga costituita da elementi non nulli!!!).

Consideriamo, ad esempio, la terza riga (i conti sono più semplici poiché gli elementi non nulli sono tutti uguali ad 1!!!).

Per la regola dei segni otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix} 1^+ & 1 & 2 & 5 \\ 2^- & -1 & -1 & 0 \\ 1^+ & 1^- & 0^+ & 1^- \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora il determinante di A:

$$\begin{aligned}
 \det A &= +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
 &= +1 \cdot [0 + 0 - 10 - (-5 - 0 - 0)] - 1 \cdot [0 + 0 + 20 - (-20 - 0 - 0)] + \\
 &+ 0 \cdot [0 + 0 + 10 - (-20 + 0 + 0)] - 1 \cdot [-2 - 4 + 4 - (-8 - 1 + 4)] = \\
 &= +1 \cdot (-10 + 5) - 1 \cdot (20 + 20) + 0 \cdot (10 + 20) - 1 \cdot (-2 + 5) = \\
 &= +1 \cdot (-5) - 1 \cdot (40) + 0 \cdot (30) - 1 \cdot (3) = -5 - 40 + 0 - 3 = -45 - 3 = -48
 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\det A = -48$$

5) Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 11 & -22 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

dire se sono moltiplicabili e, in caso affermativo, calcolare la matrice prodotto AB oppure BA .

In primo luogo osserviamo che la matrice A ha ordine 3×3 e la matrice B ha ordine 3×2 . Poiché il numero delle colonne della matrice A , ovvero 3, è uguale al numero delle righe della matrice B , ovvero 3, ne segue che è possibile eseguire il prodotto AB e, moltiplicando le due matrici righe per colonne, risulta:

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 3 & 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \\ 5 \cdot 2 + 11 \cdot (-1) + (-22) \cdot 3 & 5 \cdot 1 + 11 \cdot 4 + (-22) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + 6 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 + 6 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 1 - 6 & 4 + 4 + 2 \\ 10 - 11 - 66 & 5 + 44 + 22 \\ 2 + 3 + 18 & 1 - 12 - 6 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -67 & 71 \\ 23 & -17 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dunque:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -67 & 71 \\ 23 & -17 \end{pmatrix}$$

è la matrice prodotto di ordine 3×2 (il numero delle sue righe è pari a quello delle righe di A ed il numero delle sue colonne è uguale a quello delle colonne di B).

Sapendo che il prodotto tra matrici non è commutativo, dobbiamo vedere se è anche possibile svolgere il prodotto BA . Osserviamo, a riguardo, che il numero delle colonne della matrice B , ovvero 2, non è uguale al numero delle righe della matrice A , ovvero 3, motivo per cui non risulta affatto possibile eseguire il prodotto BA .