

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito B

5/04/2005

A. A. 2004 – 2005

1) Risolvere la seguente disequazione razionale intera di primo grado:

$$1 - \frac{7-3x}{5} - \frac{x+1}{2} > -\frac{6}{5}$$

Iniziamo con il trasportare al primo membro tutti i termini che compaiono al secondo membro:

$$(*) \quad 1 - \frac{7-3x}{5} - \frac{x+1}{2} + \frac{6}{5} > 0$$

Determiniamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{10 - 2(7-3x) - 5(x+1) + 2 \cdot 6}{10} > 0$$

Moltiplichiamo ambo i membri per 10, ovvero per il minimo comune multiplo:

$$10 - 2(7-3x) - 5(x+1) + 2 \cdot 6 > 0$$

Svolgiamo i calcoli:

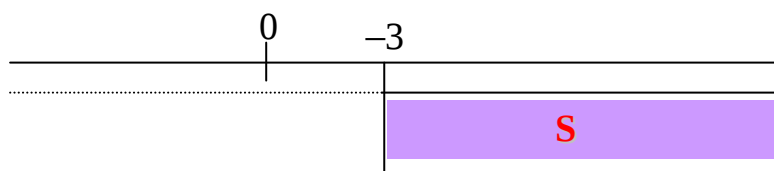
$$10 - 14 + 6x - 5x - 5 + 12 > 0$$

Raccogliamo i termini simili:

$$x + 3 > 0$$

La disequazione data (*), pertanto, ammette la seguente soluzione:

$$x > -3$$



$$S = \{x > -3\}$$

2) Risolvere la seguente disequazione razionale intera di secondo grado:

$$\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2x - \frac{1}{3}\right)(x+1) \leq 6x + \frac{7}{12}$$

Iniziamo con il trasportare al primo membro tutti i termini che compaiono al secondo membro:

$$\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2x - \frac{1}{3}\right)(x+1) - 6x - \frac{7}{12} \leq 0$$

Sviluppiamo il quadrato del binomio ed eseguiamo il prodotto:

$$9x^2 - 3x + \frac{1}{4} - \left(2x^2 + 2x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right) - 6x - \frac{7}{12} \leq 0$$

Eliminiamo la parentesi tonda cambiando di segno:

$$9x^2 - 3x + \frac{1}{4} - 2x^2 - 2x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - 6x - \frac{7}{12} \leq 0$$

Determiniamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{108x^2 - 36x + 3 - 24x^2 - 24x + 4x + 4 - 72x - 7}{12} \leq 0$$

Moltiplichiamo ambo i membri per 12, ovvero per il minimo comune multiplo:

$$108x^2 - 36x + \cancel{3} - 24x^2 - 24x + 4x + \cancel{4} - 72x - \cancel{7} \leq 0$$

Raccogliamo i termini simili:

$$(*) \quad 84x^2 - 128x \leq 0$$

Scriviamo l'equazione associata alla disequazione (*):

$$84x^2 - 128x = 0$$

Troviamo le soluzioni dell'equazione associata raccogliendo la x (manca il termine noto per cui non è necessario applicare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado!!!):

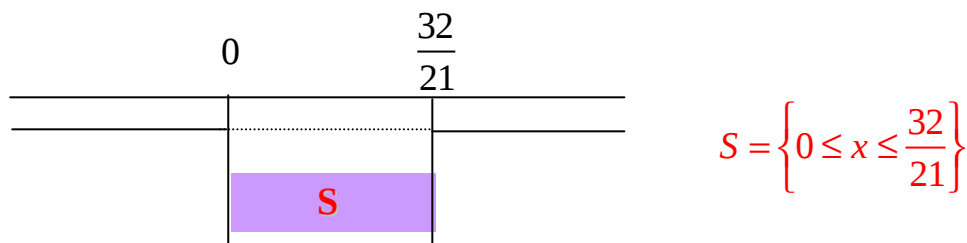
$$x(84x - 128) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto, quindi, segue:

$$x(84x-128)=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ 84x-128=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=\frac{128}{84}=\frac{32}{21} \end{cases}$$

Allora la (*), e di conseguenza la disequazione assegnata, ammette soluzioni, ovvero è negativa, per valori interni alle due radici appena determinate:

$$0 \leq x \leq \frac{32}{21}$$



3) Risolvere la seguente disequazione razionale fratta:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x+7}{x+1} \geq \frac{15}{x^2-1}$$

Iniziamo con il trasportare al primo membro tutti i termini che compaiono al secondo membro:

$$(*) \quad \frac{x}{x-1} + \frac{x+7}{x+1} - \frac{15}{x^2-1} \geq 0$$

Osserviamo che non tutti i denominatori sono polinomi di primo grado, per cui è necessario scomporre il polinomio di secondo grado, che risulta essere la differenza di due quadrati, nel prodotto di due polinomi di primo grado:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x+7}{x+1} - \frac{15}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Determiniamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{x(x+1) + (x+7)(x-1) - 15}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{x^2 + \cancel{x} + x^2 - \cancel{x} + 7x - 7 - 15}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Raccogliamo i termini simili:

$$(**) \quad \frac{2x^2 + 7x - 22}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Prima di studiare la disequazione occorre determinare il suo campo di esistenza, ovvero bisogna trovare quei valori della x per i quali il denominatore non si annulla:

$$(x-1)(x+1) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

La (**) allora è equivalente al seguente sistema (numeratore e denominatore devono essere concordi!!!):

$$\begin{cases} 2x^2 + 7x - 22 \geq 0 \\ (x-1)(x+1) > 0 \end{cases}$$

Studiamo la prima disequazione del sistema:

$$(***) \quad 2x^2 + 7x - 22 \geq 0$$

Scriviamo ora l'equazione associata:

$$2x^2 + 7x - 22 = 0$$

le cui soluzioni sono date da:

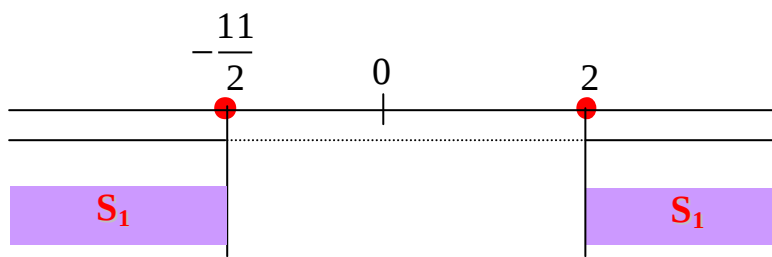
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(2) \cdot (-22)}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 176}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{225}}{4} = \frac{-7 \pm 15}{4}$$

Ne segue, quindi:

$$x_1 = \frac{-7-15}{4} = -\frac{22}{4} = -\frac{11}{2} \quad x_2 = \frac{-7+15}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

cioè la (***) ammette soluzioni, ovvero è positiva per valori esterni alle due radici appena determinate:

$$x \leq -\frac{11}{2}, x \geq 2$$



$$S_1 = \left\{ x \leq -\frac{11}{2}, x \geq 2 \right\}$$

Studiamo ora la seconda disequazione del sistema:

$$(\text{****}) \quad (x-1)(x+1) > 0$$

Scriviamo ora l'equazione associata:

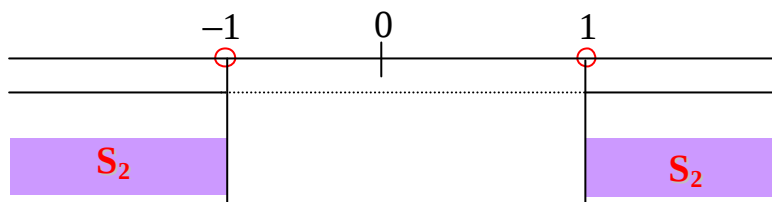
$$(x-1)(x+1) = 0$$

le cui soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} (x-1) = 0 \\ (x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

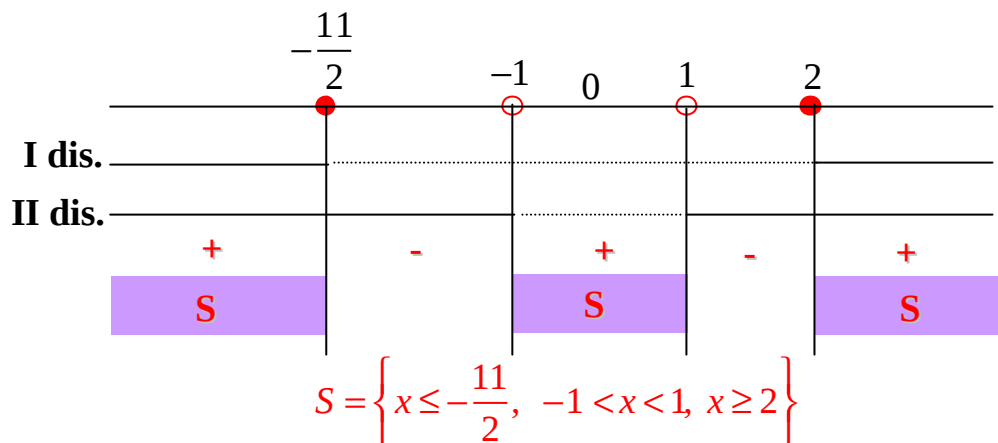
Allora la (****) ammette soluzioni, ovvero è positiva, per valori esterni alle due radici appena determinate:

$$x < -1, x > 1$$



$$S_2 = \{ x < -1, x > 1 \}$$

Le soluzioni della (*) si ottengono, quindi, riportando in un unico grafico le soluzioni S_1 ed S_2 , facendo il prodotto dei segni e considerando le soluzioni positive (bisogna tenere in considerazione il verso della disequazione assegnata!!!):



$$S = \left\{ x \leq -\frac{11}{2}, -1 < x < 1, x \geq 2 \right\}$$

4) Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Essendo A una matrice quadrata di ordine 4, risulta possibile calcolare il suo determinante utilizzando il metodo di Laplace, sviluppandolo rispetto alla prima o terza o quarta riga (è più conveniente scegliere una di tali righe in quanto in ciascuna vi è un elemento nullo, a differenza della seconda riga costituita da elementi non nulli!!!).

Consideriamo, ad esempio, la prima riga.

Per la regola dei segni otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix} 2^{+} & 3^{-} & 0^{+} & 2^{-} \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 8 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora il determinante di A :

$$\begin{aligned} \det A &= +2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -6 & 0 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & -6 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= +2 \cdot [-108 + 0 + 32 - (0 + 0 - 72)] - 3 \cdot [-54 + 0 + 4 - (-72 + 0 - 9)] + \\ &+ 0 \cdot [72 + 0 + 0 - (96 + 0 + 18)] - 2 \cdot [8 - 36 + 0 - (-24 + 0 + 2)] = \\ &= +2 \cdot (-108 + 32 + 72) - 3 \cdot (-50 + 81) + 0 \cdot (72 - 114) - 2 \cdot (-28 + 22) = \\ &= +2 \cdot (-4) - 3 \cdot (31) + 0 \cdot (-42) - 2 \cdot (-6) = -8 - 93 + 12 = -101 + 12 = -89 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\det A = -89$$

5) Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

dire se sono moltiplicabili e, in caso affermativo, calcolare la matrice prodotto AB oppure BA .

In primo luogo osserviamo che la matrice A ha ordine 3×2 e la matrice B ha ordine 3×3 . Poiché il numero delle colonne della matrice A , ovvero 2, non è uguale al numero delle righe della matrice B , ovvero 3, ne segue che non è possibile eseguire il prodotto AB .

Sapendo, però, che il prodotto tra matrici non è commutativo, dobbiamo vedere se è possibile svolgere il prodotto BA . Osserviamo, a riguardo, che il numero delle colonne della matrice B , ovvero 3, è uguale al numero delle righe della matrice A , ovvero 3, motivo per cui risulta possibile eseguire il prodotto BA .

Moltiplicando le due matrici righe per colonne, risulta:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 \\ 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 5 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \\ 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 9 \cdot (-1) & 7 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 9 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 2 - 3 & 6 + 8 + 18 \\ 10 + 3 - 1 & 30 + 12 + 6 \\ 14 + 6 - 9 & 42 + 24 + 54 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 32 \\ 12 & 48 \\ 11 & 120 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque:

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 32 \\ 12 & 48 \\ 11 & 120 \end{pmatrix}$$

è la matrice prodotto di ordine 3×2 (il numero delle sue righe è pari a quello delle righe di B ed il numero delle sue colonne è uguale a quello delle colonne di A).