

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

I Parziale - Compito C

5/04/2005

A. A. 2004 – 2005

1) Risolvere la seguente disequazione razionale intera di primo grado:

$$\frac{3x-1}{4} + \frac{5-x}{2} \leq x + \frac{2}{3} - \frac{1+2x}{4} + \frac{11}{6}$$

Iniziamo con il trasportare al primo membro tutti i termini che compaiono al secondo membro:

$$(*) \quad \frac{3x-1}{4} + \frac{5-x}{2} - x - \frac{2}{3} + \frac{1+2x}{4} - \frac{11}{6} \leq 0$$

Determiniamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{3(3x-1) + 6(5-x) - 12 \cdot x - 4 \cdot 2 + 3(1+2x) - 2 \cdot 11}{12} \leq 0$$

Moltiplichiamo ambo i membri per 12, ovvero per il minimo comune multiplo:

$$3(3x-1) + 6(5-x) - 12 \cdot x - 4 \cdot 2 + 3(1+2x) - 2 \cdot 11 \leq 0$$

Svolgiamo i calcoli:

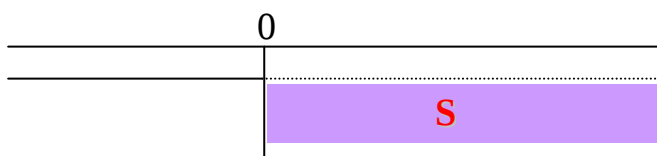
$$9x - \cancel{3} + \cancel{30} - \cancel{6x} - 12x - \cancel{8} + \cancel{3} + \cancel{6x} - \cancel{22} \leq 0$$

Raccogliamo i termini simili:

$$-3x \leq 0$$

Cambiando di segno ed invertendo il verso della disequazione, otteniamo che la (*), ammette la seguente soluzione:

$$x \geq 0$$



$$S = \{x \geq 0\}$$

2) Risolvere la seguente disequazione razionale intera di secondo grado:

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 > \left(x - \frac{1}{9}\right)(x - 3)$$

Iniziamo con il trasportare al primo membro tutti i termini che compaiono al secondo membro:

$$3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{9}\right)(x - 3) > 0$$

Sviluppiamo il quadrato del binomio:

$$3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) - \left(x - \frac{1}{9}\right)(x - 3) > 0$$

Eseguiamo i prodotti:

$$3x^2 + 2x + \frac{1}{3} - \left(x^2 - 3x - \frac{1}{9}x + \frac{1}{3}\right) > 0$$

Eliminiamo la parentesi tonda cambiando di segno:

$$3x^2 + 2x + \frac{1}{3} - x^2 + 3x + \frac{1}{9}x - \frac{1}{3} > 0$$

Determiniamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{27x^2 + 18x + 3 - 9x^2 + 27x + x - 3}{9} > 0$$

Moltiplichiamo ambo i membri per 9, ovvero per il minimo comune multiplo:

$$27x^2 + 18x + \cancel{3} - 9x^2 + 27x + x - \cancel{3} > 0$$

Raccogliamo i termini simili:

$$(*) \quad 18x^2 + 46x > 0$$

Scriviamo l'equazione associata alla disequazione (*):

$$18x^2 + 46x = 0$$

Troviamo le soluzioni dell'equazione associata raccogliendo la x (manca il termine noto per cui non è necessario applicare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado!!!):

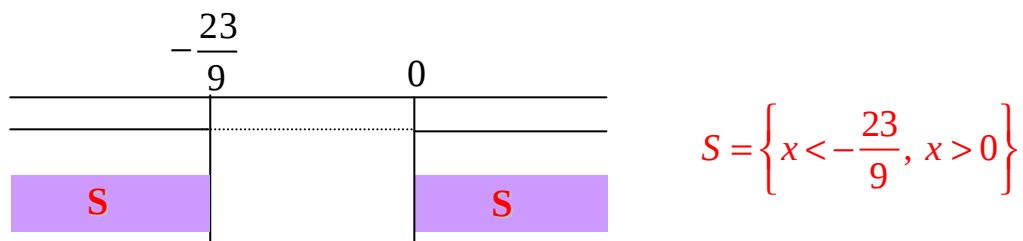
$$x(18x + 46) = 0$$

Per la legge di annullamento del prodotto, quindi, segue:

$$x(18x + 46) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 18x + 46 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{46}{18} = -\frac{23}{9} \end{cases}$$

Allora la (*), e di conseguenza la disequazione assegnata, ammette soluzioni, ovvero è positiva, per valori esterni alle due radici appena determinate:

$$x < -\frac{23}{9}, x > 0$$



3) Risolvere la seguente disequazione razionale fratta:

$$\frac{2x+8}{x+1} - \frac{x+7}{x-1} \geq \frac{x+4}{x^2-1} - 1$$

Iniziamo con il trasportare al primo membro tutti i termini che compaiono al secondo membro:

$$(*) \quad \frac{2x+8}{x+1} - \frac{x+7}{x-1} - \frac{x+4}{x^2-1} + 1 \geq 0$$

Osserviamo che non tutti i denominatori sono polinomi di primo grado, per cui è necessario scomporre il polinomio di secondo grado, che risulta essere la differenza di due quadrati, nel prodotto di due polinomi di primo grado:

$$\frac{2x+8}{x+1} - \frac{x+7}{x-1} - \frac{x+4}{(x+1)(x-1)} + 1 \geq 0$$

Determiniamo il minimo comune multiplo:

$$\frac{(2x+8)(x-1) - (x+7)(x+1) - (x+4) + 1(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\frac{2x^2 - 2x + 8x - 8 - (x^2 + x + 7x + 7) - x - 4 + (x^2 - 1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

da cui otteniamo:

$$\frac{2x^2 - 2x + 8x - 8 - x^2 - x - 7x - 7 - x - 4 + x^2 - 1}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Raccogliamo i termini simili:

$$(**) \quad \frac{2x^2 - 3x - 20}{(x-1)(x+1)} \geq 0$$

Prima di studiare la disequazione occorre determinare il suo campo di esistenza, ovvero bisogna trovare quei valori della x per i quali il denominatore non si annulla:

$$(x-1)(x+1) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

La (**) allora è equivalente al seguente sistema (numeratore e denominatore devono essere concordi!!!):

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 20 \geq 0 \\ (x-1)(x+1) > 0 \end{cases}$$

Studiamo la prima disequazione del sistema:

$$(***) \quad 2x^2 - 3x - 20 \geq 0$$

Scriviamo ora l'equazione associata:

$$2x^2 - 3x - 20 = 0$$

le cui soluzioni sono date da:

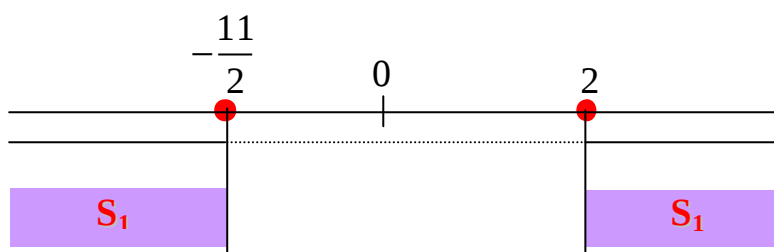
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2) \cdot (-20)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 160}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{3 \pm 13}{4}$$

Ne segue, quindi:

$$x_1 = \frac{3-13}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2} \quad x_2 = \frac{3+13}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

cioè la (***) ammette soluzioni, ovvero è positiva, per valori esterni alle due radici appena determinate:

$$x \leq -\frac{5}{2}, x \geq 4$$



$$S_1 = \left\{ x \leq -\frac{11}{2}, x \geq 2 \right\}$$

Studiamo ora la seconda disequazione del sistema:

$$(\text{****}) \quad (x-1)(x+1) > 0$$

Scriviamo ora l'equazione associata:

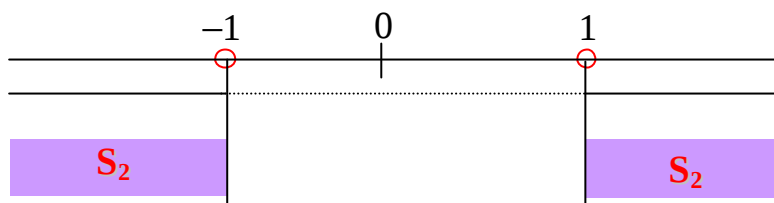
$$(x-1)(x+1) = 0$$

le cui soluzioni sono date da:

$$\begin{cases} (x-1) = 0 \\ (x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

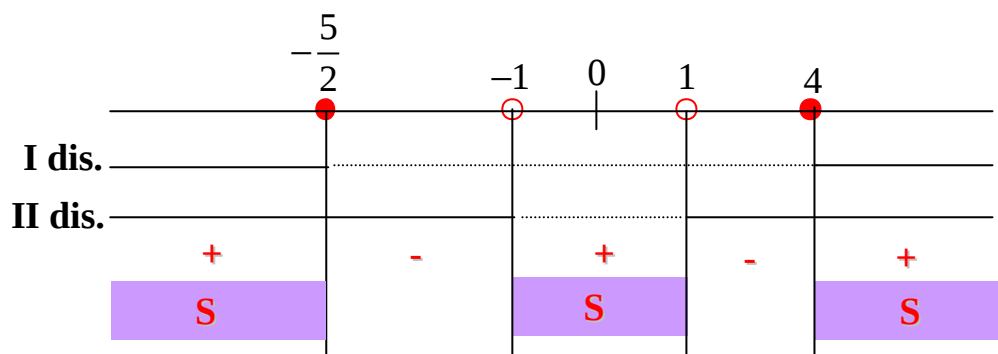
Allora la (****) ammette soluzioni, ovvero è positiva, per valori esterni alle due radici appena determinate:

$$x < -1, x > 1$$



$$S_2 = \{ x < -1, x > 1 \}$$

Le soluzioni della (*) si ottengono, quindi, riportando in un unico grafico le soluzioni S_1 ed S_2 , facendo il prodotto dei segni e considerando le soluzioni positive (bisogna tenere in considerazione il verso della disequazione assegnata!!!):



$$S = \left\{ x \leq -\frac{5}{2}, -1 < x < 1, x \geq 4 \right\}$$

4) Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

Essendo A una matrice quadrata di ordine 4, risulta possibile calcolare il suo determinante utilizzando il metodo di Laplace, sviluppandolo rispetto alla prima o seconda o terza riga (è più conveniente scegliere una di tali righe in quanto in ciascuna vi è un elemento nullo, a differenza della quarta riga costituita da elementi non nulli!!!). Consideriamo, ad esempio, la prima riga.

Per la regola dei segni otteniamo:

$$A = \begin{pmatrix} 3^+ & -1^- & 0^+ & 1^- \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora il determinante di A:

$$\begin{aligned}
 \det A &= +3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 9 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \\
 &= +3 \cdot [0 + 14 + 0 - (0 + 72 - 10)] + 1 \cdot [0 + 2 + 0 - (36 + 2)] + \\
 &+ 0 \cdot [-20 + 8 + 0 - (0 + 28 + 8)] - 1 \cdot [90 + 0 - 7 - (5 + 0 - 36)] = \\
 &= +3 \cdot (14 - 62) + 1 \cdot (2 - 38) + 0 \cdot (-12 - 36) - 1 \cdot (83 + 31) = \\
 &= +3 \cdot (-48) + 1 \cdot (-36) + 0 \cdot (-48) - 1 \cdot (114) = -144 - 36 - 114 = -294
 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\det A = -294$$

5) Date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$$

dire se sono moltiplicabili e, in caso affermativo, calcolare la matrice prodotto AB oppure BA .

In primo luogo osserviamo che la matrice A ha ordine 3×3 e la matrice B ha ordine 3×2 . Poiché il numero delle colonne della matrice A , ovvero 3, è uguale al numero delle righe della matrice B , ovvero 3, ne segue che è possibile eseguire il prodotto AB e, moltiplicando le due matrici righe per colonne, risulta:

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 4 \cdot (-8) \\ 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 6 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-8) \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 11 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + 5 \cdot (-1) + 11 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 + 12 & -1 - 2 - 32 \\ 6 + 2 + 9 & -6 - 1 - 24 \\ 2 + 10 + 33 & -2 - 5 - 88 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 17 & -35 \\ 17 & -31 \\ 45 & -95 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Dunque:

$$AB = \begin{pmatrix} 17 & -35 \\ 17 & -31 \\ 45 & -95 \end{pmatrix}$$

è la matrice prodotto di ordine 3×2 (il numero delle sue righe è pari a quello delle righe di A ed il numero delle sue colonne è uguale a quello delle colonne di B).

Sapendo che il prodotto tra matrici non è commutativo, dobbiamo vedere se è anche possibile svolgere il prodotto BA . Osserviamo, a riguardo, che il numero delle colonne della matrice B , ovvero 2, non è uguale al numero delle righe della matrice A , ovvero 3, motivo per cui non risulta affatto possibile eseguire il prodotto BA .