

CAPITALIZZAZIONE ED ATTUALIZZAZIONE

Abbiamo già visto che, in generale, i calcoli finanziari si occupano di scambi tra somme di denaro con scadenze diverse.

Ad esempio, se supponiamo che un tesoriere d'impresa oggi compera un titolo pagandolo €1000 e, tra tre mesi, lo riscuote, a fronte dell'impiego, ricavando €1030, allora vuol dire che il tesoriere ha effettuato un'operazione di scambio: "euro oggi", infatti, sono stati scambiati con "euro a tre mesi", ovvero con "euro a scadenza futura". Il rapporto di scambio sarà, quindi:

$$\frac{1030}{1000} = 1,03$$

e l'operazione effettuata prende il nome di *capitalizzazione*, intesa come trasferimento di fondi in avanti nel tempo.

La somma C impiegata è detta *capitale investito*, mentre la somma M riscossa è detta *montante*. Inoltre, il rapporto f tra il montante ed il capitale investito è detto *fattore di capitalizzazione* o di *montante*, cioè risulta:

$$f = \frac{M}{C}$$

La differenza $M - C$ è l'*interesse* I , cioè:

$$I = M - C$$

Nell'esempio precedente, quindi, si ha:

$$C = 1000$$

$$M = 1030$$

$$f = \frac{M}{C} = 1,03$$

$$I = M - C = 30$$

Consideriamo ora la medesima operazione dal punto di vista del Tesoro, e non del tesoriere, che riscuote subito €1000 contro l'impegno a pagare €1030 a tre mesi. Si tratta di un'operazione di trasferimento di fondi indietro nel tempo, che prende il nome di *attualizzazione* o di *sconto*.

La somma futura S è detta *valore a scadenza* o *valore nominale*; la somma immediata A è detta *valore attuale* o *scontato*; il rapporto:

$$F = \frac{A}{S}$$

prende il nome di *fattore d'attualizzazione* o di *sconto*; la differenza:

$$D = S - A$$

è detta *sconto*.

Nell'esempio iniziale risulta, quindi:

$$S = 1030$$

$$A = 1000$$

$$F = \frac{A}{S} = 0,97087$$

$$D = S - A = 30$$

Osserviamo ora che:

- capitalizzazione ed attualizzazione sono operazioni di scambio perfettamente simmetriche;
- i rapporti di scambio f e F sono tra di loro collegati, nel senso che se applichiamo ad una somma C prima la capitalizzazione, che la porta avanti, e poi l'attualizzazione, che la porta indietro, otteniamo di nuovo C , considerando ovviamente lo stesso periodo temporale nei due processi simmetrici;

- f e F sono coniugati se $f \cdot F = 1$;
- f e F sono *fattori finanziari* che dipendono rispettivamente dalla durata dell'impiego e dalla distanza nel tempo di una somma futura, motivo per cui si ottengono le due funzioni $f(t)$ e $F(t)$. In particolare, il modo con cui il tempo agisce sui due fattori finanziari è regolato da due parametri, ovvero dal tasso di interesse e dal tasso di sconto rispettivamente: il primo governa la velocità con cui il passaggio del tempo fa crescere il montante, cioè $f(t, a)$; il secondo, invece, governa l'incidenza dell'allontanarsi nel tempo di una somma di denaro sul suo valore oggi, cioè $F(t, b)$.

Ricapitolando:

- 1) una funzione, $f(t, a)$ o $F(t, b)$, che dipende dal tempo e da un parametro, individua un *regime finanziario*, rispettivamente di capitalizzazione e di attualizzazione;
- 2) fissando il valore del parametro, si ricava una *legge finanziaria*, rispettivamente di capitalizzazione, $f(t)$, e di attualizzazione, $F(t)$.

Definiamo, inoltre:

- $i = f(1) - 1$ il *tasso di interesse*, ovvero l'interesse prodotto da un euro investito per un anno;
- $d = 1 - F(1)$ il *tasso di sconto*, ovvero il compenso trattenuto da chi anticipa la somma di un euro che scade tra un anno.

Inoltre, se f e F sono coniugati, cioè se è $f \cdot F = 1$, allora risulta:

$$1 = f \cdot F = (1+i)(1-d) = 1 - d + i - id \Rightarrow 1 = 1 - d + i - id \Rightarrow d - i + id = 0 \Rightarrow$$

$$1) \quad d(1+i) = i \Rightarrow d = \frac{i}{i+1}$$

$$2) \quad i(d-1) = -d \Rightarrow i = \frac{d}{i-d}$$

Dal punto di vista pratico, il tasso di interesse è l'incremento percentuale nel primo anno di un capitale impiegato; il tasso di sconto, invece, è la riduzione percentuale di un capitale anticipato per un anno. Poiché $f = \frac{M}{C}$ e $F = \frac{A}{S}$, ne segue che esiste un legame di proporzionalità tra montante e capitale, precisamente $M = f \cdot C$, e tra valore scontato e valore nominale, ovvero $A = F \cdot S$. Tali proporzionalità valgono anche tra interesse e capitale e tra sconto e valore nominale. Nella pratica, però, esistono varie formule che generano i fattori finanziari e che definiscono i cosiddetti *regimi finanziari usuali*, ovvero:

- 1) **la capitalizzazione semplice o dello sconto razionale**: è caratterizzata dal fatto che l'ammontare degli interessi è proporzionale, non solo a C , ma anche alla durata t dell'operazione di capitalizzazione, cioè risulta:

$$\frac{I}{Ct} = \text{costante}$$

Per $C = 1$ e $t = 1$ risulta $I = \text{costante} = i$ (tasso di interesse). Ne segue che $i = \text{costante}$, ovvero:

$$I = iCt \Rightarrow M = C + I = C + iCt = C(1+it) \Rightarrow f(t) = 1+it$$

Esempio

Se $C = 1000$, $i = 12\% = 0,12$ e $t = \frac{3}{12} = 3 \text{ mesi} = 0,25 \text{ anni}$, risulterà:

$$M = C(1 + it) = 1000 \left(1 + 0,12 \times \frac{3}{12} \right) = 1030$$

Dunque il fattore di montante $f(t) = 1 + it$ definisce il regime di capitalizzazione semplice.

Il fattore di sconto coniugato $F(t) = \frac{1}{1 + it}$ definisce il regime dello sconto razionale o dello sconto

semplice. Il tasso è detto *tasso di interesse semplice*.

Se ora consideriamo il tempo espresso in mesi, invece che in anni, otteniamo:

$$1 + it = 1 + i_{12} \cdot 12t$$

avendo indicato con i_{12} il tasso mensile e con l'indice 12 il mese come dodicesima parte di un anno.

Segue, quindi:

$$i_{12} = \frac{i}{12}$$

In generale, cioè, il tasso $i_m = \frac{1}{m}$, relativo alla frazione di anno $\frac{1}{m}$, è detto *tasso periodale*, mentre i

tassi i ed i_m sono detti *tassi equivalenti*¹ in capitalizzazione semplice. Ad esempio, il tasso trimestrale che equivale al 12% annuo dell'esempio precedente è:

$$i_4 = \frac{12\%}{4} = 3\%$$

È ora facile verificare che, calcolando il montante, si ottiene sempre il medesimo risultato:

$$M = 1000(1 + 3\% \times 1) = 1030$$

un'applicazione della capitalizzazione semplice è rappresentata dai BOT (Buoni Ordinari del Tesoro) i cui calcoli vengono effettuati generalmente in capitalizzazione semplice. Cosa succede allora nella pratica? Vengono assegnati il prezzo d'acquisto P ed il valore di rimborso $C > P$ di un

¹ Nei calcoli finanziari l'unità di misura maggiormente usata è l'anno ma si può utilizzare anche il trimestre, il semestre, il mese, ... In molti casi, infatti, può risultare più conveniente calcolare i rendimenti utilizzando unità di misura temporali diverse dall'anno. Ciò comporta che alla fine, dato che tipicamente i risultati vanno espressi su base annuale, occorra convertire il rendimento da una base temporale ad un'altra. La conversione può essere fatta direttamente, in quanto esistono formule semplici che consentono di calcolare proprio i *tassi equivalenti*, ovvero di convertire i tassi da una base temporale ad un'altra all'interno di una determinata legge. Ad esempio se $s - t$ è l'ampiezza del solito intervallo temporale in cui si effettua lo scambio di un'operazione finanziaria elementare espressa in un'opportuna base temporale e se indichiamo con $s' - t'$ l'ampiezza del medesimo intervallo temporale in cui si effettua lo scambio di un'operazione finanziaria elementare espressa nella nuova unità temporale, risulta:

$$s - t = q(s' - t')$$

ove q rappresenta proprio il parametro di scala. Ad esempio, se è $s - t = 2 \text{ anni}$ e se volessimo esprimere tutto in semestri, otterremo $s' - t' = 4 \text{ semestri}$, cioè $q = \frac{1}{2}$. In maniera del tutto analoga, se è $s - t = 1 \text{ trimestre}$ e se volessimo esprimere tutto in anni, otterremo $s' - t' = 0,25 \text{ anni}$, cioè $q = 4$. In particolare, nel regime degli interessi semplici, si ha $i' = qi$, ovvero il tasso semestrale si ricava da quello annuale dividendo quest'ultimo per due così come il tasso annuale si ottiene da quello trimestrale moltiplicandolo per quattro, e così via. Nel regime dello sconto commerciale, analogamente, si ha $k' = qk$, ovvero il tasso di sconto semestrale si ricava da quello annuale dividendo quest'ultimo per due così come il tasso annuale si ottiene da quello quadrimestrale moltiplicandolo per tre, e così via. Nel regime degli interessi composti, invece, si ha $i' = (1 + i)^q - 1$.

È importante sottolineare che le formule che definiscono i tassi equivalenti valgono soltanto per le trasformazioni all'interno di uno stesso regime finanziario per effetto di una variazione dell'unità di misura temporale: non è possibile, cioè, definire tassi equivalenti tra regimi diversi.

titolo, con scadenza t anni più tardi dell'acquisto, senza pagamento di cedole ovvero di interessi: si tratta proprio dei *titoli di puro sconto a cedola nulla* o *zero-coupon bonds*. Si diffusero inizialmente per sfruttare le imperfezioni del sistema americano: non essendovi, infatti, alcun pagamento di interesse, non vi era neanche alcuna transazione. Ciò era vantaggioso sia per l'emittente, che doveva sottostare a condizioni meno onerose, sia per il sottoscrittore, cui spettava l'esenzione fiscale nonché la differenza $C - P$. Nonostante tali interessi siano tassati ancora oggi, i titoli a cedola nulla sono tutt'ora emessi per la loro semplicità strutturale: rappresentano, infatti, degli autentici pilastri su cui poter costruire i moderni strumenti finanziari. Per un titolo di puro sconto, quindi, il rendimento semplice a scadenza è dato dal tasso di interesse semplice, in modo tale che sia soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$C = P(1 + rt) \Rightarrow C = P + Prt$$

dove:

C è il valore di rimborso;

$P(1 + rt)$ è il montante del prezzo d'acquisto;

r è il rendimento.

Ne segue che:

$$r = \frac{C - P}{Pt}$$

$$P = \frac{C}{1 + rt}$$

Se poi tale titolo viene assunto dopo t_1 anni al prezzo P_1 e con rendimento r_1 , allora risulta:

$$P_1 = \frac{C}{1 + r_1(t - t_1)}$$

Nell'arco temporale $[0, t_1]$, quindi, il rendimento totale sarà:

$$r_2 = \frac{P_1 - P}{Pt_1} = \frac{\frac{C}{1 + r_1(t - t_1)} - \frac{C}{1 + rt}}{\frac{C}{1 + rt}t_1} = \frac{\frac{C(1 + rt) - C[1 + r_1(t - t_1)]}{[1 + r_1(t - t_1)](1 + rt)}}{\frac{Ct_1}{1 + rt}} =$$

$$= \frac{C(1 + rt) - C[1 + r_1(t - t_1)]}{\frac{Ct_1[1 + r_1(t - t_1)](1 + rt)}{1 + rt}} = \frac{C\{(1 + rt) - [1 + r_1(t - t_1)]\}}{Ct_1[1 + r_1(t - t_1)]} =$$

$$= \frac{C\{(1 + rt) - [1 + r_1(t - t_1)]\}}{Ct_1[1 + r_1(t - t_1)]} = \frac{C(1 + rt - 1 - r_1t + r_1t_1)}{Ct_1[1 + r_1(t - t_1)]} = \frac{rt - r_1t + r_1t_1}{t_1[1 + r_1(t - t_1)]}$$

Dunque:

$$r_2 = \frac{rt - r_1t + r_1t_1}{t_1[1 + r_1(t - t_1)]}$$

In particolare se il tasso d'ingresso coincide con quello d'uscita, cioè se risulta $r = r_1$, otteniamo:

$$r_2 = \frac{rt - rt + r_1t_1}{t_1[1 + r(t - t_1)]} = \frac{r_1t_1}{t_1[1 + r(t - t_1)]} = \frac{r}{1 + r(t - t_1)} < r$$

Dunque, se $r = r_1$, il rendimento realizzato attraverso acquisto e vendita non sarebbe uguale ma minore di r .

2) la capitalizzazione composta: è caratterizzata dal fatto che gli interessi che maturano in un periodo diventano capitale e, a loro volta, dal successivo producono interessi. Ad esempio, se prestiamo un capitale di un euro per un anno a tasso di interesse i , allora il nostro credito

diverrà, dopo un anno, $1+i$, dopo due anni, $(1+i)+i(1+i)=1+i+i^2=(1+i)^2$ e, dopo n anni, $(1+i)^n$.

Dunque, per durate di finanziamento pari a t , possiamo considerare il fattore di capitalizzazione:

$$f(t) = (1+i)^t$$

cioè il fattore di montante $f(t)$ definisce il regime di capitalizzazione composta. Il fattore di sconto coniugato $F(t) = (1+i)^{-t}$ corrisponde al regime di sconto composto.

Il tasso i è detto *tasso annuo di interesse composto*.

Se, ad esempio, impieghiamo un capitale di 1000 euro per due anni ad interessi composti con tasso annuo di interesse $i = 10\%$, allora il montante sarà:

$$M = Cf = C(1+i)^2 = 1000(1+10\%)^2 = 1000(1+0,1)^2 = 1210$$

Il valore scontato ad interessi composti di un capitale $S = 1000$, calcolato sei mesi prima con tasso di interesse annuo $i = 10\%$ sarà:

$$A = FS = 1000 \cdot \frac{1}{(1+10\%)^{\frac{1}{2}}} = 953,46$$

dove l'esponente $\frac{1}{2}$ sta ad indicare mezzo anno.

Nella capitalizzazione composta il tasso periodale i_m , relativo ad $\frac{1}{m}$ di anno, deve soddisfare la seguente relazione:

$$(1+i_m)^{mt} \equiv (1+i)^t \quad \text{per ogni } t$$

dove $1+i_m$ rappresenta il fattore di montante f in termini di tasso periodale.

Osserviamo che:

$$\left[(1+i_m)^m\right]^t \equiv (1+i)^t \Leftrightarrow (1+i_m)^m \equiv (1+i) \Leftrightarrow i_m = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

Nella pratica, però, esistono ancora due tassi, quello *annuo nominale* e quello *istantaneo*, utili per descrivere le varie condizioni finanziarie. Se consideriamo $f(t) = (1+i_m)^{mt}$, allora definiamo *tasso annuo nominale* il rapporto tra il tasso periodale e l'ampiezza del periodo, ovvero:

$$j_m = \frac{i_m}{\frac{1}{m}} = mi_m$$

Osserviamo che la dipendenza da m deriva dal fatto che viene dichiarato il tasso convertibile m volte l'anno oppure ogni $\frac{1}{m}$ di anno.

Ad esempio, nel caso del 10% semestrale, otteniamo:

$$j_2 = 2 \times 10\% = 20\%$$

Inoltre possiamo constatare che se i è il tasso effettivo ovvero il tasso di interesse annuo effettivamente prodotto da un euro esso risulta diverso dal tasso annuo nominale, cioè $i \neq j_m$.

Poiché si ha $i_m = \frac{j_m}{m}$, il fattore di capitalizzazione può essere scritto in termini di tasso nominale nel modo seguente:

$$f(t) = \left(1 + \frac{j_m}{m}\right)^{mt}$$

3) **lo sconto commerciale o degli interessi semplici anticipati**: oramai poco usata nella pratica operativa, regola essenzialmente le operazioni di sconto delle cambiali (*commercial paper*) presso gli istituti bancari. Ad esempio, se consideriamo il valore nominale $C=100$ con scadenza ad un anno e supponiamo che il detentore del titolo possa convertire in contratti la cambiale presso una banca ottenendo il valore attuale dei 100€ calcolato con uno sconto pari a $k=5\%$

$$P = 100 - 100k = 95$$

Se la cambiale, però, avesse avuto scadenza a due anni, per la determinazione del valore attuale, avremmo dovuto considerare un ulteriore sconto del 5% per il secondo anno, per cui sarebbe risultato:

$$P = 100 - 2 \times 100k = 90$$

Risulta allora facile generalizzare le precedenti considerazioni nel caso di una cambiale di valore nominale C scontata al tasso k (annuale) su un intervallo temporale $s-t$ anni. Tenendo conto del fatto che per ogni anno lo sconto è pari a Ck , il valore attuale sarà dato da:

$$P = C[1 - k(s-t)]$$

che prende il nome di *legge dello sconto commerciale* o *legge di capitalizzazione iperbolica*. Possiamo, quindi, definire:

- $d(t, s) = \frac{C-P}{P}$ il *tasso di sconto periodale*
- $h(t, s) = \frac{d(t, s)}{s-t}$ l'*intensità di sconto periodale*

Osserviamo, infine, che la legge dello sconto commerciale si configura come l'unica legge caratterizzata da un'intensità di sconto costante, cioè:

$$h(t, s) = k = \text{costante}$$

dove il parametro k , ovvero il *tasso di sconto* della legge dello sconto commerciale, si misura in $[\text{tempo}]^{-1}$ ed il suo valore numerico varia al variare dell'unità di misura temporale scelta.

Possiamo infine definire il *fattore montante*:

$$m(t, s) = \frac{1}{1 - k(s-t)}$$

ed il *fattore di sconto*:

$$v(t, s) = 1 - k(s-t)$$