

IL RENDIMENTO

Nell'accezione finanziaria più comune, il *rendimento* rappresenta l'indicatore sintetico per eccellenza della "prestazione" di un'attività finanziaria.

Consideriamo un contratto complesso costituito da n operazioni elementari, precisamente un'operazione a pronti, con decorrenza cioè immediatamente, ed $n-1$ operazioni a termine, con decorrenza cioè successiva alla stipula del contratto, caratterizzate tutte dal medesimo interesse I . Supponiamo, inoltre, che il prestito P , ottenuto all'istante t , possa essere restituito dopo $1, 2, 3, \dots, n-1, n$ anni con un pagamento di interesse calcolato aggiungendo ogni anno una somma uguale ad una percentuale prefissata del debito iniziale, ovvero:

$$I = jP \text{ (tasso per somma iniziale)}$$

Sia $C = P + I$ all'istante s . Così facendo, otteniamo una *funzione valore* W_k che, per $k = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$, è espressa dalle seguenti relazioni, tenendo conto che è $I_0 = 0$ e $I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_{n-1} = I_n = I$:

$$W_0 = P$$

$$W_1 = P + I_1 = P + jP = P(1 + j)$$

$$W_2 = P + I_1 + I_2 = P + jP + jP = P + 2jP = P(1 + 2j)$$

$$W_3 = P + I_1 + I_2 + I_3 = P + jP + jP + jP = P + 3jP = P(1 + 3j)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$W_k = P + I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_k = P + \underbrace{jP + jP + jP + \dots + jP}_{k \text{ volte}} = P + kjP = P(1 + kj)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$W_n = P + I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = P + \underbrace{jP + jP + jP + \dots + jP}_{n \text{ volte}} = P + njP = P(1 + nj)$$

Dunque, dopo k anni, il valore dell'investimento per il creditore, ovvero l'ammontare del passivo per il debitore, è dato da:

$$(1) \quad W_k = P(1 + kj) \quad \text{per} \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$$

con $W_0 = P$, o equivalentemente:

$$(1 \text{ bis}) \quad C = P[1 + j(s - t)]$$

Le relazioni (1) ed (1 bis) sono le *leggi o regimi degli interessi semplici* o *leggi di capitalizzazione lineare* e definiscono implicitamente il rendimento di un'operazione finanziaria elementare:

$$j = \frac{W_k - P}{kP} = \frac{C - P}{P(s - t)}$$

Definiamo, pertanto, il *tasso di interesse* relativo alla k -esima operazione elementare, per $k = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$, nel modo seguente:

$$j_k = \frac{I}{W_{k-1}} = \frac{I}{P[1 + (k-1)j]} = \frac{I}{P + (k-1)jP} = \frac{I}{P + (k-1)I}$$

In particolare, per $k = 1$, otteniamo j_1 , ovvero il tasso dell'operazione a pronti e, per $k > 1$, invece, otteniamo tutti i tassi a termine.

Esempio

Sia $P = €100$, $n = 4$ ed $I = 10$ (cioè $j = 0,1\%$). Allora otteniamo:

$$W_0 = P = 100$$

$$W_1 = P(1 + j) = 100 + 0,1 \times 100 = 100 + 10 = 110$$

$$W_2 = P(1 + 2j) = 100 + 0,2 \times 100 = 100 + 20 = 120$$

$$W_3 = P(1 + 3j) = 100 + 0,3 \times 100 = 100 + 30 = 130$$

$$W_4 = P(1 + 4j) = 100 + 0,4 \times 100 = 100 + 40 = 140$$

Ne segue che l'unico tasso a pronti sarà:

$$j_0 = \frac{10}{100} = 0,1\%$$

mentre i tassi a termine saranno:

$$j_1 = \frac{10}{110} = 0,09\%$$

$$j_2 = \frac{10}{120} = 0,08\%$$

$$j_3 = \frac{10}{130} = 0,07\%$$

$$j_4 = \frac{10}{140} = 0,07\%$$

È importante sottolineare, com'è facile dedurre dall'esempio precedente, che, nonostante la denominazione oramai consolidata nella prassi finanziaria, j non rappresenta proprio un tasso di interesse ma l'intensità di interesse periodale, ovvero il tasso di interesse periodale per unità di tempo. Si misura in $(tempo)^{-1}$ ed il suo valore numerico varia al variare dell'unità di misura temporale scelta.

Consideriamo adesso un contratto complesso costituito sempre da n operazioni elementari che abbiano tutte lo stesso tasso di interesse j . Supponiamo, quindi, che il debito P possa essere restituito dopo $1, 2, 3, \dots, n$ anni con un interesse calcolato aggiungendo ogni anno una somma pari ad una percentuale costante del debito accumulato all'inizio dell'anno precedente. La funzione valore W_k sarà ottenuta, per $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n$, dalle seguenti relazioni:

$$W_0 = P$$

$$W_1 = P + jP = P(1 + j)$$

$$W_2 = P(1 + j) + j[P(1 + j)] = P(1 + j)^2$$

$$W_3 = P(1 + j)^2 + j[P(1 + j)^2] = P(1 + j)^3$$

.....

$$W_k = P(1 + j)^{k-1} + j[P(1 + j)^{k-1}] = P(1 + j)^k$$

.....

$$W_n = P(1 + j)^{n-1} + j[P(1 + j)^{n-1}] = P(1 + j)^n$$

Dunque, dopo k anni, il valore dell'investimento per il creditore, ovvero l'ammontare del passivo per il debitore, è dato da:

$$(2) \quad W_k = P(1+j)^k \quad \text{per} \quad k=1,2,3,\dots,n-1,n$$

con $W_0 = P$ o, equivalentemente:

$$(2 \text{ bis}) \quad C = P(1+j)^{s-t}$$

Le relazioni (2) e (2 bis) sono dette *leggi o regimi degli interessi composti* o *leggi di capitalizzazione esponenziali* e definiscono implicitamente il rendimento di un'operazione finanziaria elementare:

$$j = \left(\frac{W_k}{P} \right)^{\frac{1}{k}} - 1 = \left(\frac{C}{P} \right)^{\frac{1}{s-t}} - 1$$

Anche in questo caso occorre sottolineare che, nonostante la denominazione oramai consolidata nella prassi finanziaria, j non rappresenta un tasso di interesse ed il suo valore numerico varia al variare dell'unità di misura temporale scelta.

Esempio

Sia $P = \text{€}100$, $n = 4$ ed $I = 10$ (cioè $j = 0,1\%$). Allora otteniamo:

$$W_0 = P = 100$$

$$W_1 = P(1+j) = 100 + 0,1 \times 100 = 100 + 10 = 110$$

$$W_2 = P(1+j)^2 = 100(1+0,1)^2 = 121$$

$$W_3 = P(1+j)^3 = 100(1+0,1)^3 = 133,1$$

$$W_4 = P(1+j)^4 = 100(1+0,1)^4 = 146,41$$

Fino ad ora abbiamo sempre considerato istanti di tempo discreti, avendo supposto che il debito doveva essere saldato ad ogni fine anno. Possiamo ora estendere le definizioni precedenti ad un qualsiasi istante temporale $t \geq 0$ considerando la funzione valore W_t su tutto l'asse reale positivo.

Risulta, quindi:

$$(3) \quad W_t = P(1+j)^t$$

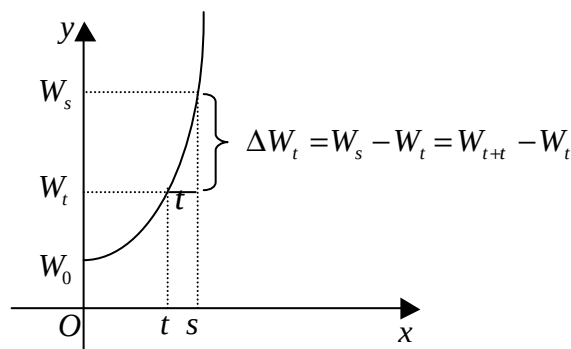
che può essere interpretata, in termini finanziari, come il risultato della composizione di un'infinità di operazioni elementari di durata infinitesima effettuate tutte allo stesso "tasso di interesse": basta, infatti, effettuare un'opportuna operazione di passaggio al limite!!!

La relazione (3), che rappresenta una vera e propria legge esponenziale, è nota anche come *legge di capitalizzazione continua a tasso costante*.

Osserviamo che la funzione valore (1) può essere considerata anche per un tempo continuo $t \geq 0$ ed espressa dalla seguente *legge lineare*:

$$(1') \quad W_t = P(1+tj)$$

Dunque una generica funzione valore W_t , per $t \geq 0$, può essere considerata monotona crescente come illustrato nel seguente grafico:



avendo indicato con t e $s = t + t$ due istanti di tempo arbitrari. Definiamo allora:

$$\Delta W_t = W_s - W_t = W_{t+t} - W_t$$

l'interesse nel periodo da t a $s = t + t$ subito dalla funzione valore nello stesso periodo di tempo.

Osserviamo che ΔW_t è una quantità positiva misurata in euro.

Il rapporto tra il valore della funzione valore nell'istante s e quello nell'istante t , precisamente:

$$\frac{W_{t+t}}{W_t} = m(t, t+t) = 1 + j(s-t) = \frac{C}{P}$$

è detto *fattore di capitalizzazione* o *fattore montante* relativo al periodo che va da t ad $s = t + t$.

In altre parole, per ottenere il valore capitalizzato, ovvero il *montante*, ovvero il valore di fine periodo, è sufficiente moltiplicare il fattore m per W_t . Occorre sottolineare che m è dimensionale, in quanto risultato del rapporto tra due grandezze aventi la stessa dimensione, essendo entrambe espresse in euro. Poiché, inoltre, abbiamo supposto W crescente risulta sempre $m > 1$.

Il reciproco di $m(t, t+t)$, ovvero:

$$\frac{W_t}{W_{t+t}} = v(t, t+t) = \frac{1}{m(t, t+t)} = \frac{1}{1 + j(s-t)} = \frac{P}{C}$$

è detto *fattore sconto*.

In altre parole, per ottenere il valore scontato, ovvero lo *sconto*, ovvero il valore di inizio periodo, è sufficiente moltiplicare il fattore v per W_{t+t} .

In maniera analoga, osserviamo che le equazioni (2) e (2 bis) individuano il *fattore montante* relativo al periodo che va da t ad $s = t + t$, precisamente:

$$m(t, t+t) = (1 + j)^{s-t}$$

da cui, passando al reciproco, otteniamo:

$$v(t, t+t) = \frac{1}{m(t, t+t)} = \frac{1}{(1 + j)^{s-t}} = (1 + j)^{-(s-t)} = (1 + j)^{t-s}$$

è detto *fattore sconto*.

Nella prassi finanziaria è consentito l'utilizzo della legge lineare per il calcolo dei rendimenti annuali delle operazioni finanziarie elementari con vita a scadenza inferiore ad un anno, mentre si utilizza la legge esponenziale in tutti gli altri casi.

Se ora consideriamo l'istante t di tempo come attualmente corrente, la funzione valore W_t prende il nome di *valore attuale*, in t , di $W(t+t)$ secondo il fattore di sconto $v(t, t+t)$. Anche il fattore di sconto è dimensionale come il fattore montante, ma risulta $v(t, t+t) < 1$.

Sempre in riferimento all'intervallo di tempo $[t, t+t]$ definiamo:

1) il *tasso di interesse* o *tasso di rendimento* il rapporto tra l'interesse maturato nel periodo ed il valore all'istante iniziale, ovvero:

$$j(t, t+t) = \frac{\Delta W_t}{W_t}$$

Ne segue che:

$$j(t, t+t) = \frac{\Delta W_t}{W_t} = \frac{W_{t+t} - W_t}{W_t} = \frac{W_{t+t}}{W_t} - \frac{W_t}{W_t} = \frac{W_{t+t}}{W_t} - 1 = m(t, t+t) - 1 = \frac{1}{v(t, t+t)} - 1$$

2) il *tasso di interesse anticipato* o *tasso di sconto* il rapporto tra l'interesse ed il valore di fine periodo, ovvero:

$$\frac{\Delta W_t}{W_{t+t}} = 1 - v(t, t+t) = j(t, t+t) \cdot v(t, t+t)$$

Il tasso di interesse e quello di sconto rappresentano degli incrementi percentuali, sono dimensionali e sono espressi in termini percentuali.

Se ora rapportiamo il tasso, sia di interesse che di sconto, alla lunghezza del periodo di riferimento, ovvero se lo dividiamo per $t = s - t$, otteniamo:

$$g(t, t+t) = \frac{\Delta W_t}{t W_t} = \frac{j(t, t+t)}{t} \quad \text{l'intensità di interesse}$$

$$\frac{\Delta W_t}{t W_{t+t}} \quad \text{l'intensità di sconto}$$

In generale l'intensità è una grandezza positiva avente per dimensione il reciproco di un tempo, quale, ad esempio, $(\text{anni})^{-1}$.

Esempio

Se la funzione valore fissata al tempo $t_0 = 0$ è tale che risulti:

$W_1 = 96\text{€}$ dopo un anno

$W_{1,5} = 100\text{€}$ dopo un anno e mezzo

allora, in base al contratto, possiamo affermare che i 96 euro disponibili dopo un anno corrispondono, ovvero equivalgono, a 100 euro disponibili dopo un anno e mezzo. L'interesse, nell'intervallo di tempo da $t_1 = 1$ a $t_2 = 1,5$ è, quindi:

$$\Delta W_1 = W_{1,5} - W_1 = 100 - 96 = 4\text{€}$$

Allora $W_{1,5} = 100\text{€}$ rappresenta il valore capitalizzato, ovvero il montante, dopo sei mesi dei 96 euro disponibili dopo un anno dalla stipula del contratto.

Analogamente, $W_1 = 96\text{€}$ rappresenta il valore scontato per un periodo di tempo pari a sei mesi dei 100 euro pagabili un anno e mezzo dopo la stipula del contratto.

Inoltre, risulta:

$$v(t, t+t) = v(1, 1,5) = \frac{W_t}{W_{t+t}} = \frac{96}{100} = 0,96 \quad \text{fattore di sconto}$$

$$m(t, t+t) = m(1; 1,5) = \frac{W_{t+t}}{W_t} = \frac{100}{96} = 1,04167$$

fattore di capitalizzazione

$$j(t, t+t) = j(1; 1,5) = \frac{\Delta W_t}{W_t} = \frac{4}{96} = 0,0417 = 4,17\%$$

tasso di interesse

$$\frac{\Delta W_t}{W_{t+t}} = \frac{4}{100} = 0,04 = 4\%$$

tasso di sconto

$$g(t, t+t) = g(1; 1,5) = \frac{\Delta W_t}{t W_{t+t}} = \frac{4}{0,5 \times 96} = \frac{4}{48} = 0,083 (\text{anni})^{-1}$$

intensità di interesse

$$\frac{\Delta W_t}{t W_{t+t}} = \frac{4}{0,5 \times 100} = \frac{4}{50} = 0,08 (\text{anni})^{-1}$$

intensità di sconto