

Determinanti

1. Determinante di una matrice

In generale ad ogni matrice quadrata è possibile associare un numero reale detto **determinante**, indicato con il simbolo $|A|$ oppure con $\det A$ che permette anche di stabilire l'invertibilità della matrice. Diamo la seguente definizione.

Data una matrice quadrata di ordine n ($n \geq 2$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

si chiama **determinante** di ordine n corrispondente alla matrice, la somma algebrica di tutti i prodotti di n suoi elementi scelti in modo che due di essi non appartengano né alla stessa riga né alla stessa colonna.

Così se, ad esempio, si estraggono i fattori del prodotto ordinatamente dalla prima, dalla seconda, ..., dalla n -ennesima riga, ognuno di tali prodotti si può scrivere nella forma:

$$a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{nk_n}$$

dove $k_1, k_2, \dots, k_n$ è una qualunque permutazione dell'insieme $1, 2, \dots, n$. prendiamo poi ciascuno dei prodotti sopra indicati *col proprio segno* o *col segno opposto* a seconda che le due permutazioni dei primi e dei secondi indici dei suoi fattori sono della stessa classe o di classe diversa.

Quindi un determinante è la somma di $n!$ (si legge n fattoriale ed è uguale al prodotto $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, essendo $n!$ il numero delle permutazioni di n elementi), in ciascuno dei quali compare esattamente un elemento di ogni riga e di ogni colonna.

Consideriamo ora dei casi specifici.

Determinante di una matrice di ordine 1.

Dalla definizione segue subito che:

$$A_1 = [a_{11}] \quad \Rightarrow \quad \det A_1 = |A_1| = |a_{11}| = a_{11}$$

Quindi il determinante di una matrice di ordine 1 è dato direttamente dal valore espresso dal suo unico elemento.

Determinante di una matrice di ordine 2.

Si ha:

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_2 = |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Cioè il determinante di una matrice di ordine due si calcola sottraendo al prodotto degli elementi della diagonale principale, il prodotto degli elementi della diagonale secondaria.

Determinante di una matrice di ordine 3.

Per il calcolo del determinante di una matrice di ordine 3 ci si può avvalere di due metodi:

- 1) **Metodo di Sarrus** (valido esclusivamente per matrici con $n = 3$)
- 2) **Metodo generale** (secondo lo sviluppo di una linea della matrice).

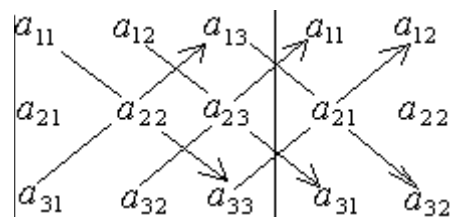
Calcoliamo $\det A_3$ mediante il **metodo di Sarrus**. Consideriamo la matrice del terzo ordine:

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

I prodotti associati ad A sono:

$$\begin{aligned} & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}, \quad a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}, \quad a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}, \\ & -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}, \quad -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}, \quad -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}. \end{aligned}$$

Da qui si deduce facilmente una regola pratica per il calcolo di un determinante del terzo ordine. Tale metodo consiste nel riportare, parallelamente alla terza colonna, le prime due, ed eseguire la somma dei prodotti degli elementi delle tre diagonali principali alla quale viene sottratta la somma dei prodotti dei fattori delle tre diagonali secondarie, cioè:



Esempio

Calcolare il determinante della matrice

$$B_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -6 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

Si ha:

$$|B_3| = \det B_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 2 & -3 \\ -6 & 5 & 1 & -6 & 5 \\ 7 & 3 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 8 + (-3) \cdot 1 \cdot 7 + 4 \cdot (-6) \cdot 3 - (7 \cdot 5 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 8 \cdot (-6) \cdot (-3)) = \\ = 80 - 21 - 72 - (140 + 6 + 144) = -303.$$

Il **Metodo generale** (metodo di Laplace, secondo lo sviluppo di una sua linea) per il calcolo di una determinante è valido per matrici di qualunque ordine. Esso è basato sulla scelta arbitraria di una linea (di solito si sceglie quella con il maggior numero di elementi nulli) considerando il cambio di segno oppure no a seconda della posizione, pari o dispari, dell'elemento nella matrice.

Per meglio spiegare tale metodo premettiamo alcune definizioni.

Definizione 1. Fissati un elemento a_{ij} di una matrice A di ordine n e sopprese la riga e la colonna che in esso si incrociano (cioè la riga i -esima e la colonna j -esima), si ottiene una matrice quadrata di ordine $n-1$ il cui determinante si chiama **minore complementare** dell'elemento a_{ij} , e verrà indicato con M_{ij} .

Definizione 2. L'elemento a_{ij} si dice di **classe pari** o **dispari** a seconda che il numero $i+j$ sia pari o dispari.

Definizione 3. Si chiama **complemento algebrico** dell'elemento a_{ij} e si indica con A_{ij} , il minore complementare di a_{ij} , preceduto dal segno più o dal segno meno a seconda che a_{ij} sia di classe pari o dispari, cioè risulta:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Ad esempio, i complementi algebrici degli elementi a_{22} e a_{21} della matrice A_3 sono:

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Definizione 4. Si chiama determinante di una matrice A la somma dei prodotti degli elementi di una linea qualsiasi della matrice A per i rispettivi complementi algebrici.

Esempi

1) Sia

$$A_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Il suo determinante, considerando la prima riga, sarà:

$$|A_4| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}.$$

2) Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Scegliamo di sviluppare il determinante secondo gli elementi della prima riga. Si ha:

$$\begin{aligned} |A_4| &= 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} + \\ &+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} + (-5) \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Questi quattro determinanti di ordine 3 si possono ora calcolare con la regola di Sarrus, ottenendo:

$$\det A_4 = 3 \cdot (40) - 2 \cdot (6) + 1 \cdot (-41) + 5 \cdot (31) = 222.$$

3) Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 5 & -7 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Poiché nella terza riga vi è un elemento nullo, conviene sviluppare secondo gli elementi di questa riga, ottenendo così:

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-21 + 25) + 8 \cdot (5 - 6) = -4. \end{aligned}$$

2. Proprietà dei determinanti

Per i determinanti delle matrici quadrate valgono le seguenti proprietà:

- 1) Se gli elementi di una linea sono tutti nulli, il determinante è nullo;
- 2) Se cambiamo tra loro due linee parallele il determinante cambia segno;
- 3) Se gli elementi di due linee parallele sono uguali o proporzionali, il determinante è nullo;
- 4) Se gli elementi di una linea vengono moltiplicati per uno stesso numero λ , il determinante viene moltiplicato per λ ;
- 5) Due matrici quadrate trasposte hanno lo stesso determinante;
- 6) Se si moltiplicano gli elementi di una linea per i complementi algebrici di una linea parallela, il determinante è nullo;
- 7) Il determinante di una matrice non cambia quando ad una linea si aggiunge una linea parallela moltiplicata per λ ;
- 8) Date due matrici quadrate dello stesso ordine, il determinante della matrice prodotto è uguale al prodotto dei determinanti delle matrici date.

Per *somma o differenza di linee* si intenderemo ancora una linea che avrà come elementi la somma o la differenza dei rispettivi elementi; per moltiplicazione di uno scalare λ per una linea intenderemo ancora una linea che avrà come elementi il prodotto di λ per ogni elemento della linea.

Facciamo quindi vedere come, tramite queste operazioni e le proprietà sopra enunciate, come il calcolo di un determinante sia più semplice e veloce.

A tale scopo consideriamo la matrice:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dal momento che la scelta della linea è arbitraria, possiamo prendere una riga o una colonna qualsiasi. È conveniente considerare la terza riga poiché in essa vi è già un elemento nullo.

Per annullare, ad esempio, il quarto elemento (3) di questa riga, possiamo moltiplicare per (-3) gli elementi della quarta colonna. Si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 \\ 1 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Alla quarta colonna sostituiamo la somma di questa con la prima ottenendo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Moltiplichiamo ora la prima colonna per $(+2)$ e la terza per $(+3)$. Si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 9 & -5 \\ 2 & 4 & -3 & -5 \\ 6 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Alla terza colonna sostituiamo la somma di questa con la prima ottenendo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 11 & -5 \\ 2 & 4 & -1 & -5 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Da qui, applicando la regola di Laplace, possiamo calcolare il relativo determinante scegliendo evidentemente come linea arbitraria la terza riga. Avremo:

$$\det A_4 = 6 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 11 & -5 \\ 4 & -1 & -5 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 324.$$

Ora, ricordando che nei vari passaggi abbiamo moltiplicato complessivamente per $(-3) \cdot (2) \cdot (3) = -18$, per avere l'equivalenza divideremo tale risultato per -18 ottenendo infine 324: $(-18) = -18$.

3. Matrice inversa di una matrice quadrata

Definizione. Si chiama *matrice inversa* di una matrice quadrata A , una matrice, che indichiamo con A^{-1} (se esiste) che moltiplicata a destra o a sinistra per A , dia per risultato la matrice identica I .

In altre parole, se la matrice B è la inversa della matrice A deve aversi:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Ogni matrice che ammette una inversa si dice *invertibile*.

Per calcolare l'inversa di una matrice (non singolare) si usa il seguente procedimento:

- 1) *Si scrive la trasposta di A_T di A ;*
- 2) *Si sostituisce ad ogni elemento di A_T il suo complemento algebrico;*
- 3) *Si divide la matrice così ottenuta per $\det A$.*

Così, data la matrice A_3 non singolare (cioè $\det A_3 \neq 0$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

consideriamo la sua trasposta

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dopo aver calcolato i complementi algebrici degli elementi a_{ij} di tale matrice, potremo scrivere la matrice inversa A^{-1} data da:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Esempio

Trovare la matrice inversa della matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $\det A = 70$ e che:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 63; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 49; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -28; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 14.$$

Pertanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{70} \begin{bmatrix} 63 & 49 & -28 \\ 0 & 10 & 0 \\ -14 & -12 & 14 \end{bmatrix}.$$

Ricordiamo che se una matrice viene moltiplicata per un numero λ ogni sua riga è moltiplicata per λ . Nel nostro caso abbiamo una matrice del terzo ordine moltiplicata per $\frac{1}{70}$, per cui il suo determinante risulta moltiplicato per $\left(\frac{1}{70}\right)^3$ e quindi il determinante della matrice inversa è:

$$\det A^{-1} = \left(\frac{1}{70}\right)^3 \cdot [10 \cdot (63 \cdot 14 - 28 \cdot 14)] = \left(\frac{1}{70}\right)^3 \cdot 10 \cdot 490 = \frac{1}{70}.$$

4. Rango (o caratteristica) di una matrice

consideriamo una matrice di tipo qualunque $m \times n$. Diremo che una matrice non nulla A ha **rango** o **caratteristica** r se contiene un minore $P_r \neq 0$ di ordine r e se sono tutti nulli i minori di ordine superiore ad r . In altre parole, *il rango di una matrice $A \neq 0$ è l'ordine massimo dei minori non nulli che si possono estrarre da A* . Se A è la matrice nulla diremo che ha **rango zero**.

Il rango di una matrice non cambia se si esegue su A una qualunque delle seguenti operazioni:

- 1) Scambiare le righe con le colonne;
- 2) Scambiare tra loro due linee parallele;
- 3) Moltiplicare una linea per un numero diverso da zero;
- 4) Sommare ad una linea una combinazione lineare di linee parallele.

Esempio

Determinare il rango della matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Essendo la matrice A di dimensione 3×4 , la massima dimensione di una sua sottomatrice quadrata è 3 e quindi $r(A) \leq 3$.

In generale se A è del tipo $m \times n$, si ha che:

$$r(A) = \min\{m, n\}.$$

Poiché la matrice data possiede almeno un elemento diverso da zero, la sua caratteristica è sicuramente ≥ 1 ; in particolare, in questo caso avremo:

$$1 \leq r(A) \leq 3.$$

Per stabilire se $r(A) = 3$ si devono calcolare i determinanti di tutte le sottomatrici 3×3 che sono le seguenti:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix};$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcolando questi determinanti con la regola di Sarrus si trova che:

$$\det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = \det A_4 = 0.$$

Poiché tutte le sottomatrici di dimensione 3×3 hanno determinante nullo, si ha che:

$$1 \leq r(A) \leq 2.$$

Si passa quindi ad esaminare le sottomatrici di dimensione 2×2 fino a che se ne trova, se esiste, una con determinante diverso da zero. Nel caso attuale, poiché, ad esempio, è:

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2.$$