

MATRICI, DETERMINANTI

SISTEMI LINEARI

Matrici

1. Teoria delle Matrici

Definizione1. Una matrice A è un insieme di $m \times n$ numeri, reali o complessi, disposti in m -righe ed n -colonne che, in generale indicheremo con la scrittura

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Gli indici m, n indicano quelle che chiameremo **dimensioni** della matrice.
In modo compatto una matrice può essere indicata con:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

In particolare il simbolo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

è una matrice 2×3 , cioè una matrice che contiene 2 righe e 3 colonne.

Le matrici, solitamente, si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino mentre i suoi elementi con la stessa lettera in minuscolo seguita da due indici che permettono di individuare la posizione che quell'elemento occupa nella matrice stessa:

$$B_{34} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}$$

La matrice B_{34} è formata quindi da 3 righe e 4 colonne, ossia è una matrice 3×4 ; l'elemento b_{23} si trova, dunque, sulla seconda riga e sulla terza colonna. In generale diremo che l'elemento b_{ij} si trova sulla i -esima riga e sulla j -esima colonna.

Definizione2. Una matrice avente lo stesso numero di righe e di colonne ($m = n$) si dice **matrice quadrata**. Se il numero delle righe non è uguale a quello delle colonne (cioè se è $m \neq n$) la matrice si dirà **rettangolare**.
Ad esempio la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

avendo il numero delle righe uguale a quello delle colonne, è una matrice quadrata. Gli elementi i cui indici sono uguali (a_{11}, a_{22}, a_{33}) costituiscono la **diagonale principale** mentre gli elementi (a_{13}, a_{22}, a_{31}) formano la **diagonale secondaria**.

In generale, in una matrice quadrata di dimensione $n \times n$ gli elementi a_{ij} della diagonale principale sono quelli per cui $i = j$; quelli della diagonale secondaria sono quelli per cui è $i + j = n + 1$.

Le più semplici matrici sono la matrice **nulla**, indicata con **0**, i cui elementi sono tutti nulli e la matrice **identità**, indicata con **I**, che è una matrice quadrata con tutti gli elementi nulli tranne quelli della diagonale principale. Ossia:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Definizione3. Una matrice $1 \times n$ è detta **vettore riga** di dimensione n . In modo analogo, una matrice $m \times 1$ è detta **vettore colonna** di dimensione m .

Le due seguenti matrici:

$$a = (1 \quad 2 \quad 4 \quad 6) \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

si possono considerare vettori: **a** vettore riga di dimensione 4 e **b** vettore colonna di dimensione 3.

Quando si indica un vettore riga si usa omettere l'indice della riga mentre nel vettore colonna si omette l'indice della colonna. Ad esempio nel vettore riga **a** il terzo componente del vettore (4) è a_{13} , ma si scrive semplicemente a_3 . In modo analogo per il vettore colonna.

Definizione4. Si chiama **linea** della matrice indifferentemente una riga o una colonna; si diranno **linee parallele** più righe o più colonne.

In due linee parallele si diranno **corrispondenti** due elementi di ugual posto (cioè l'elemento k-esimo dell'una e l'elemento k-esimo dell'altra, qualunque sia il numero k).

Due linee si dicono uguali (o proporzionali) quando gli elementi dell'una sono uguali (o proporzionali) ai corrispondenti dell'altra.

Definizione5. Due matrici si dicono simili quando hanno lo stesso numero di righe e di colonne, ed in due matrici simili si dicono **corrispondenti** gli elementi di ugual posto.

Definizione6. Due matrici si dicono **uguali** se sono dello stesso tipo ed hanno uguali gli elementi di ugual posto.

Definizione7. Sia $A = [a_{ij}]$ una qualunque matrice di ordine $m \times n$. Diremo **trasposta** di A la matrice A^T ottenuta da A scambiando le righe con le colonne. Dunque, posto $A^T = [b_{ij}]$, sussiste la relazione:

$$b_{ij} = a_{ji}$$

per ogni coppia di indici i e j . La trasposta di una matrice di tipo $m \times n$ è, ovviamente, una matrice di tipo $n \times m$; in particolare il trasposto di un vettore riga è un vettore colonna.

Così, ad esempio, data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{la sua trasposta è} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Definizione8. Si dice *opposta* di una matrice A, e si indica con il segno $-A$, la matrice ottenuta da A cambiando segno a tutti i suoi elementi. In altri termini si ha:

$$-A = [-a_{ij}].$$

Definizione9. Una matrice quadrata A si dice *diagonale* se $a_{ij}=0$ per ogni coppia $i \neq j$ e $a_{ii} \neq 0$ per ogni coppia $i=j$.

Definizione10. Sia A una matrice di ordine $m \times n$. Fissate ad arbitrio r righe ed s colonne ($r \leq m, s \leq n$), si chiama *sottomatrice estratta da A* quella formata dalle r righe ed s colonne.
Si consideri la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ottenuta eliminando la terza riga e la terza e quarta colonna è una sottomatrice di A.

2. Operazioni tra matrici

Somma e differenza. Siano $A_{m,n} = (a_{ij})$ e $B_{m,n} = (b_{ij})$ due matrici dello stesso tipo $m \times n$. Si chiama *somma (o differenza) di A e B*, e si denota con $A \pm B$, la matrice il cui elemento generico $a_{ij} \pm b_{ij}$ per ogni i e j , ossia la matrice $C_{m,n}$ così ottenuta:

$$C_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

N.B. La somma e la differenza di matrici è possibile se e solo se le matrici sono della stessa dimensione (stesso numero di righe, stesso numero di colonne).

Esempio

Si considerino le matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

risulta:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} (1-1) & (0+3) & (6+7) \\ (-2-1) & (3+2) & (4+9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 13 \\ -3 & 5 & 13 \end{bmatrix}.$$

Per la somma delle matrici valgono le seguenti proprietà:

- i) $A + B = B + A$ (*proprietà commutativa*)
- ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (*proprietà associativa*)
- iii) $A + 0 = A$
- iv) $A + (-A) = 0$
- v) $(A + B)^T = A^T + B^T$

Prodotto di una matrice per uno scalare Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$ a valori reali e λ anch'esso un numero reale. Chiameremo prodotto di λ per A la matrice:

$$C = (\lambda a_{ij}) \quad \forall i=1, \dots, m \text{ e } \forall j=1, \dots, n.$$

In altre parole la matrice $C = \lambda A$ è la matrice ottenuta moltiplicando ogni elemento di A per il numero λ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempio

Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ e lo scalare $\lambda = 3$. Si ha:

$$\lambda A = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 15 \\ 12 & 21 & 18 \end{vmatrix}$$

Osserviamo che $(-1)A = -A$, ovvero che il prodotto dello scalare -1 per la matrice A dà come risultato l'opposta di A .

Il prodotto *matrice per scalare* gode delle seguenti proprietà:

- i) $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A)$ (proprietà associativa)
- ii) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (proprietà distributiva)
- iii) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (proprietà distributiva)
- iv) $1 \cdot A = A$

Prodotto di matrici. Date due matrici $A_{m \times p} = (a_{ij})$ e $B_{p \times n} = (b_{ij})$ intenderemo come prodotto (righe per colonne) delle due matrici $A \times B$, una matrice $C_{m \times n}$ che avrà lo stesso numero di righe di A e lo stesso numero di colonne di B ed il cui elemento generico c_{ij} è la somma dei prodotti degli elementi della i -esima riga di A per gli elementi della j -esima colonna di B . In altre parole è:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} \quad (\clubsuit)$$

Poiché $i = 1, 2, \dots, m$ e $j = 1, 2, \dots, n$ la matrice $A \times B$ risulta del tipo $m \times n$. Dalla $(\clubsuit)$ risulta evidente che per poter calcolare c_{ij} il numero delle colonne di A deve coincidere con il numero delle righe di B . In tal caso diremo che A è **conformabile** con B .

Esempio

Si considerino le matrici

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Poiché A ha dimensione (2×3) e B (3×4) , è possibile eseguire il prodotto tra queste due matrici e la dimensione di $C = A \times B$ è (2×4) . Vediamo come si determina tale matrice. L'elemento di posto c_{11} è dato dal prodotto scalare tra la prima riga di A e la prima colonna di B , ovvero:

$$c_{11} = [2 \quad 1 \quad -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)) = 5$$

c_{12} è il risultato del prodotto della prima riga di A per la seconda colonna di B, cioè:

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = (2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1)) = 0$$

$$c_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = (2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 5) = 0$$

$$c_{14} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2) = 5$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = ((-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1)) = 0$$

$$c_{22} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} = ((-2) \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1)) = -15$$

$$c_{23} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = ((-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 5) = 19$$

$$c_{24} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = ((-2) \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2) = 13$$

e quindi si ha:

$$C = A \times B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -15 & 19 & 13 \end{bmatrix}.$$

Con riferimento a questo esempio non è possibile effettuare il prodotto $B \times A$ in quanto, considerando le dimensioni, gli interni non coincidono e quindi, in generale, possiamo dire che $A \times B \neq B \times A$ come prova anche il seguente

Esempio

Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Risulta:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi $A \times B \neq B \times A$.

Le matrici di questo esempio mostrano anche che per le matrici non vale la *legge dell'annullamento del prodotto*: infatti si ha che $B \times A = 0$ mentre A e B sono entrambe diverse da zero. Due matrici entrambe non nulle che abbiano il prodotto nullo prendono il nome di **divisori dello zero**.

Per le matrici valgono le seguenti proprietà:

$$i) \quad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \quad (\text{proprietà associativa})$$

Se A e B sono matrici di dimensione $m \times n$ e C è una matrice di dimensione $n \times p$, allora si ha:

$$ii) \quad (A+B) \times C = A \times C + B \times C \quad (\text{proprietà distributiva a sinistra})$$

Se invece A è una matrice di dimensione $m \times n$ e B e C sono matrici $n \times p$, allora

$$iii) \quad A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (\text{proprietà distributiva a destra})$$

$$iv) \quad \lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

Inversa di una matrice. Come è noto, nell'insieme dei numeri reali si definisce l'inverso (o reciproco) di un numero a quel numero che, moltiplicato per a , dà come risultato 1.

In modo del tutto analogo si può definire l'inversa di una matrice quadrata.

Sia A una matrice quadrata di ordine n . Si definisce **matrice inversa** di A (o più semplicemente **inversa** di A) e si indica con A^{-1} la matrice quadrata (se esiste) di ordine n tale che:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I.$$

Se una matrice A ha inversa, allora A è detta *invertibile* o *non singolare*.

Esempio

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Risulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Infatti è:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I.$$