

CAPITOLO I

LO SPAZIO DEI VETTORI EUCLIDEI

1. VETTORI DELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE

Si consideri lo spazio euclideo tridimensionale ed in esso i *segmenti orientati* che denoteremo con AB , aventi come primo estremo A e come secondo estremo B . Un segmento non orientato di estremi A e B verrà indicato, in questo contesto, con $[AB]$.

Definizione 1.1.

Sia U una fissata unità di misura. Si chiama *modulo* del segmento orientato AB rispetto ad U , e lo si denota con $|AB|$, la misura (assoluta) del segmento in esame.

Definizione 1.2.

Due qualsiasi segmenti orientati AB e CD si dicono *equipollenti* se hanno:

- la stessa direzione (cioè sono situati sulla stessa retta o su due rette parallele)
- lo stesso verso
- lo stesso modulo

Definizione 1.3.

Si chiama *vettore* l'insieme di tutti i segmenti equipollenti ad un fissato segmento orientato.

Un vettore si indica solitamente con il simbolo $\overrightarrow{AB}$ oppure con una lettera latina sormontata da una freccia, come ad esempio $\vec{u}$. Risulta, pertanto, $\overrightarrow{AB} \in AB$ ed il segmento orientato AB è un *rappresentante* di $\overrightarrow{AB}$. Se $\vec{u}$ è un vettore allora il suo modulo, rispetto all'unità di misura considerata, si denota con $|\vec{u}|$ oppure semplicemente con la sola lettera u che dà il nome al vettore.

Si indica con V_* l'insieme di tutti i vettori così definiti.

Osservazione: intuitivamente un vettore può essere pensato come un segmento orientato libero di muoversi con il suo primo estremo, in modo da occupare ogni punto dello spazio conservando fissi la direzione, il verso ed il modulo; un segmento orientato è detto, quindi, anche *vettore applicato* in quanto “bloccato” nel suo primo estremo.

Definizione 1.4.

Un vettore di modulo unitario si dice *versore*; il versore che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{u}$ si indica con $\text{vers } \vec{u}$.

Definizione 1.5.

Si chiama *vettore nullo*, e lo si denota con $\vec{0}$, un oggetto astratto che si aggiunge formalmente all'insieme V_* dei vettori definiti in 1.3. Si pone:

$$1) \quad V := V_* \cup \{\vec{0}\}$$

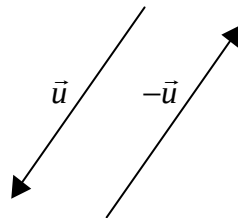
Si definisce un'addizione (+) tra un qualsiasi vettore (anche nullo) e $\vec{0}$ nel modo seguente:

$$2) \quad \forall \vec{u} \in V \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

(Esso si può pensare intuitivamente come la classe di un segmento ad estremi coincidenti, cioè un vettore avente modulo nullo, direzione e verso indeterminati).

Definizione 1.6.

Dato un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$, chiamiamo vettore *opposto* di $\vec{u}$ un vettore $-\vec{u}$ avente stessa direzione e stesso modulo di $\vec{u}$ ma verso opposto.



Osservazione: si definisce l'addizione tra $\vec{u}$ e $-\vec{u}$ come segue:

$$3) \quad \forall \vec{u} \in V \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

(Il vettore nullo si considera, quindi, opposto di se stesso).

N.B. Le definizioni 1), 2), 3) rappresentano, nel complesso, la definizione operativa del vettore $\vec{0}$.

Definizione 1.7.

Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non nulli si dicono *paralleli*, e si scrive $\vec{u} // \vec{v}$, se hanno la stessa direzione.

Osservazione: il vettore $\vec{0}$ si considera, per definizione, parallelo ad ogni vettore.

Definizione 1.8.

Tre o più vettori si dicono *complanari* se tre loro rappresentanti sono paralleli ad uno stesso piano.

Osservazione: due vettori sono sempre complanari; il vettore $\vec{0}$ si considera complanare ad ogni coppia di vettori.

Nel paragrafo seguente la nozione di addizione si estenderà ad ogni coppia di elementi di V .

2. LA STRUTTURA ALGEBRICA DELLO SPAZIO VETTORIALE V

Scopo di questo paragrafo è di definire alcune operazioni sull'insieme di tutti i vettori in modo da fornire a V quella che in letteratura si chiama struttura di spazio vettoriale.

Definiamo, a tal proposito, le seguenti operazioni tra due vettori $\vec{u}, \vec{v} \in V$:

- *addizione (+)*

Distinguiamo i seguenti tre casi:

a) uno almeno dei due vettori è nullo; definiamo, allora, la somma, come in 2), ponendo:

$$\forall \vec{u} \in V \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

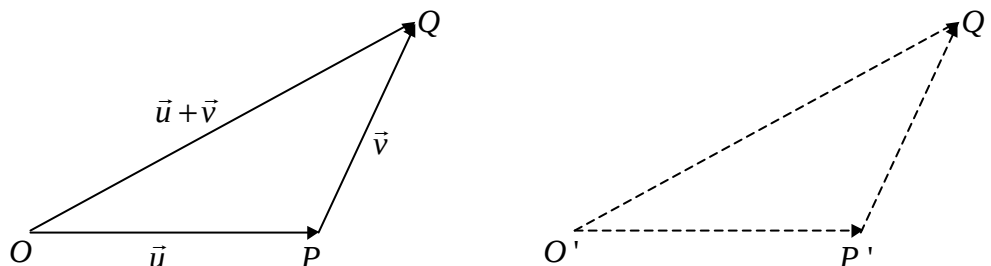
b) se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = -\vec{u}$ definiamo la somma, come in 3), ponendo:

$$\forall \vec{u} \in V \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

c) se $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ ed i due vettori non sono opposti definiamo un terzo vettore $\vec{w}$ che chiamiamo *somma* o *risultante* dei due vettori dati mediante la seguente costruzione: si fissa in modo arbitrario un punto O nello spazio e si considerano i segmenti orientati OP e PQ tali che:

$$OP \in \vec{u} \text{ oppure } \overrightarrow{OP} = \vec{u}, \quad PQ \in \vec{v} \text{ oppure } \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$$

Si ottiene così un nuovo vettore $\vec{w} = \overrightarrow{OQ}$ determinato dal segmento orientato non nullo OQ (essendo $Q \neq O$).



Osservazione: a prima vista potrebbe sembrare che, cambiando il punto di partenza, ad esempio O in O' , si ottiene un diverso segmento orientato, cioè che il vettore $\vec{w}$, somma di due vettori, dipende dalla scelta

di O ; si dimostra, invece, che il vettore $\vec{w}$ costruito non dipende dalla scelta del punto iniziale O . La dimostrazione è semplice: ripetendo la costruzione partendo da O' (ed ottenendo P' e Q') si ottengono due triangoli eguali per cui risulta $|OQ| = |O'Q'|$; la conservazione dei versi è ovvia.

L'operazione di addizione sopra definita gode delle seguenti proprietà:

1. *proprietà commutativa*

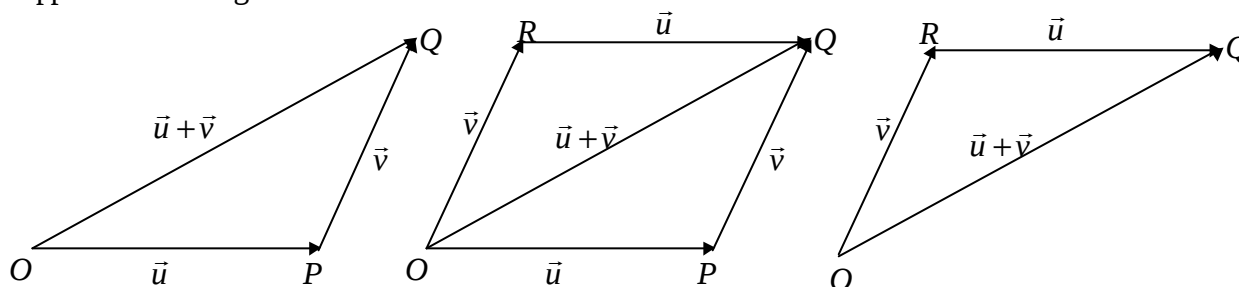
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

2. *proprietà associativa*

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

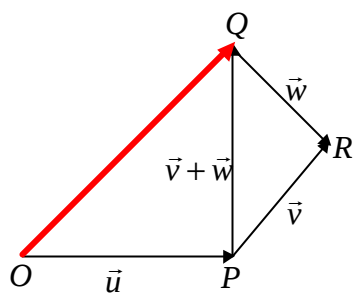
Per la prova notiamo che le relazioni sopra scritte sono ovvie se almeno uno dei due vettori è nullo.

Supponiamo allora gli elementi non nulli. Per la *commutativa* si ha:

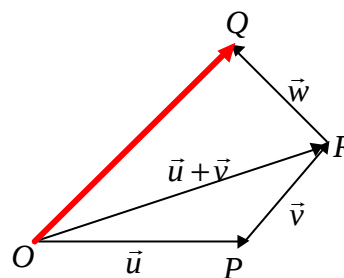


Dunque la cosiddetta *regola del parallelogramma* prova la proprietà commutativa.

Per l'*associativa* risulta:



$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$$

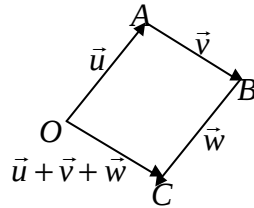


$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ}$$

Generalizzando quanto detto precedentemente è possibile definire la *somma di più vettori*.

Dati tre o più vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ la loro somma si ottiene sommando i primi due, quindi sommando al vettore $\vec{u} + \vec{v}$ il terzo vettore $\vec{w}$ e così via.

Graficamente il vettore somma di più vettori si ottiene riportando, a partire da un punto O , segmenti orientati, rappresentanti i vettori della somma, applicando il primo in O , il secondo nell'estremo A del primo vettore, il terzo nell'estremo B del secondo vettore e così via, cioè:



Si viene in tal modo a costruire una *poligonale* il cui lato di chiusura, orientato da O all'ultimo estremo della diagonale, rappresenta il vettore somma.

- *differenza* $(-)$

La differenza dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è uguale alla somma di $\vec{u}$ e dell'opposto di $\vec{v}$, cioè risulta:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Definiamo ora la moltiplicazione di un numero per un vettore, detta *moltiplicazione scalare*, cioè il prodotto, che indichiamo con $l \vec{u}$, di $\vec{u}$ per uno scalare (numero reale) l , distinguendo i seguenti tre casi:

- a) se $l = 0$ oppure $\vec{u} = \vec{0}$ oppure $l = 0$ e $\vec{u} = \vec{0}$, si pone $l \vec{u} = \vec{0}$
- b) se $l > 0$ ed $\vec{u} \neq \vec{0}$, allora la moltiplicazione scalare $l \vec{u}$ è un vettore avente la stessa direzione e lo stesso verso di $\vec{u}$ ma modulo dato dal prodotto $l u$ essendo u il modulo di $\vec{u}$
- c) se $l < 0$ ed $\vec{u} \neq \vec{0}$, allora $l \vec{u}$ è un vettore avente la stessa direzione di $\vec{u}$, verso opposto ad $\vec{u}$ e modulo dato dal prodotto del valore assoluto di l per il modulo di $\vec{u}$, cioè da $|l| u$

Osservazione: il valore $|l| u$ dipende solo dalla scelta dell'unità di misura di $\vec{u}$ essendo l un numero puro.

Proprietà importanti della moltiplicazione scalare, che non dimostriamo, sono le seguenti:

1. $\forall \vec{u} \in V \quad (\pm 1)\vec{u} = \pm \vec{u}$
2. $\forall \vec{u} \in V, \forall l, m \in \mathfrak{R} \quad (l + m)\vec{u} = l \vec{u} + m \vec{u}$
3. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall l \in \mathfrak{R} \quad l(\vec{u} + \vec{v}) = l \vec{u} + l \vec{v}$
4. $\forall \vec{u} \in V, \forall l, m \in \mathfrak{R} \quad l(m \vec{u}) = (l m) \vec{u}$

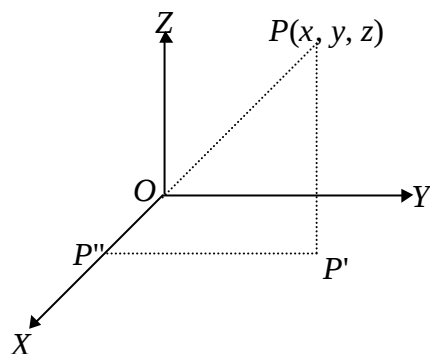
3. RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI

La geometria analitica del piano è un argomento ben noto dalle Scuole Secondarie. Si parla spesso di questo ponte tra la *geometria sintetica* e l'*algebra* e di quel naturale arricchimento che una disciplina fornisce all'altra. Ricordiamo che per introdurre un *riferimento cartesiano* nello spazio occorre fissare:

- 1) un punto O detto *origine*
- 2) tre rette orientate uscenti da O e, a due a due, non complanari (non appartenenti allo stesso piano) che si indicano con le lettere X, Y, Z e si chiamano *assi coordinati* o *assi cartesiani di riferimento*. Osserviamo che in generale due assi cartesiani formano tra loro un certo angolo; se i tre angoli XY, YZ ed XZ sono retti, cioè le tre rette sono a due a due perpendicolari, il riferimento cartesiano si dice *ortogonale*
- 3) tre unità di misura U_x, U_y, U_z , una per ciascun asse.

Se le tre unità di misura sono tutte diverse allora si parlerà di riferimento *trimetrico*; se invece due di esse sono uguali si dirà *dimetrico*; se, infine, le tre unità di misura sono tutte uguali il riferimento è detto *monometrico*.

Fissiamo ora un riferimento nello spazio e consideriamo un qualsiasi punto P dello spazio. Tracciamo da P la parallela all'asse Z ottenendo, così, il punto P' sul piano XY ; la retta per P' parallela all'asse Y interseca l'asse X nel punto P'' . Fissate, dunque, le tre unità di misura U_x, U_y, U_z , possiamo associare al punto P le misure algebriche dei segmenti orientati OP (rispetto ad U_x), $P''P'$ (rispetto ad U_y), $P'P$ (rispetto ad U_z), come illustrato nella seguente figura:



ottenendo rispettivamente:

$$x = \text{mis alg } OP, \quad y = \text{mis alg } P''P', \quad z = \text{mis alg } P'P$$

I tre numeri x, y, z così trovati si chiamano *coordinate cartesiane* di P e precisamente x, y, z sono dette rispettivamente *ascissa*, *ordinata* e *quota* del punto P . L'insieme dei segmenti orientati $OP''P'P$ si dice *spezzata delle coordinate*. Viceversa dati tre numeri reali x, y, z è sempre possibile determinare uno ed un solo punto che abbia per ascissa x , per ordinata y e per quota z . Dunque tra i punti P dello spazio e le

terne ordinate di numeri reali x, y, z esiste una corrispondenza biunivoca detta *coordinazione* dello spazio. Per indicare che x, y, z sono le coordinate del punto P adotteremo talvolta la scrittura $P(x, y, z)$ dove va ricordato che (x, y, z) è una terna ordinata, cioè il primo numero, ossia x , indica sempre l'*ascissa*, il secondo, ossia y , l'*ordinata* ed il terzo, ossia z , la *quota* del punto in questione.

Consideriamo un sistema cartesiano qualsiasi. Ciascuna unità di misura individua un vettore avente lunghezza unitaria e direzione e verso pari ad uno dei tre assi X, Y, Z . Tali vettori sono chiamati *versori fondamentali* e si denotano con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rispettivamente. L'insieme formato da questi vettori si chiama *base* di V .

Dunque ogni vettore $\vec{u}$ dello spazio si può esprimere nel modo seguente:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

Tale relazione è detta *rappresentazione cartesiana* del vettore $\vec{u}$ ed i tre numeri u_x, u_y, u_z sono le *coordinate* o *componenti* del vettore $\vec{u}$, rispetto alla base fissata. Per indicare che $\vec{u}$ ha coordinate u_x, u_y, u_z scriveremo $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$.

Osservazione: la rappresentazione di un vettore $\vec{u}$ rispetto ad una base fissata $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è unica. Infatti se fosse:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} = u'_x \vec{i} + u'_y \vec{j} + u'_z \vec{k}$$

sarebbe:

$$(u_x - u'_x) \vec{i} + (u_y - u'_y) \vec{j} + (u_z - u'_z) \vec{k} = \vec{0}$$

da cui, essendo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ indipendenti, ovvero individuando una spezzata di coordinate che non si riduce ad un punto, risulta:

$$u_x = u'_x; \quad u_y = u'_y; \quad u_z = u'_z$$

Inoltre si ha:

$$|\vec{u}| = u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

$$-\vec{u} = (-u_x) \vec{i} + (-u_y) \vec{j} + (-u_z) \vec{k} \quad \Rightarrow \quad -\vec{u}(-u_x, -u_y, -u_z)$$

$$\vec{i} = (1, 0, 0); \quad \vec{j} = (0, 1, 0); \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$$

Siano dati ora due punti P e P' del piano ed un fissato vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$. Si chiama *traslazione* del vettore $\vec{u}$ una corrispondenza biettiva dello spazio in sè nella quale a P corrisponde P' se e solo se:

$$\overrightarrow{PP'} \in \vec{u} \quad \text{ovvero} \quad \overrightarrow{PP'} = \vec{u}$$

Costruiamo adesso le *equazioni di una traslazione* supponendo di avere un punto $P(x, y, z)$.

Si verifica subito che:

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Segue allora che:

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} + (z' - z)\vec{k}$$

Se si usa la rappresentazione di $\vec{u}$ e se:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

da $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$ si ha:

$$a) \quad \begin{cases} x' = x + u_x \\ y' = y + u_y \\ z' = z + u_z \end{cases}$$

Le *a)* si dicono *equazioni della traslazione*.

4. PRODOTTO SCALARE

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, cioè si supponga assegnata un'unica unità di misura e la base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ *ortonormale* (cioè i vettori sono unitari e, a due a due, ortogonali).

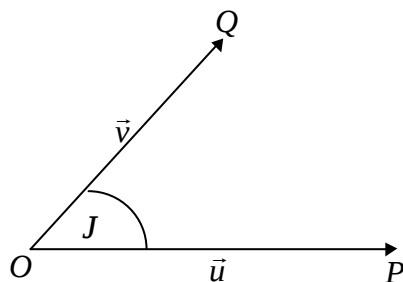
Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori non nulli di modulo rispettivamente u e v .

Definizione 4.1.

Si chiama *prodotto scalare* o *interno* dei due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non nulli, e lo si denota con $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (si legge *u scalare v*), il numero reale

$$u v \cos J$$

essendo J l'angolo convesso formato dalle semirette uscenti da O e contenenti P e Q dove $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$ ed $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$.



Osservazione: fissati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, il prodotto scalare dipende dall'angolo J , cioè risulta:

$$J = 0 \Rightarrow \cos J = 1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = uv$$

$$0 < J < \frac{p}{2} \Rightarrow 0 < \cos J < 1 \Rightarrow 0 < \vec{u} \cdot \vec{v} < uv$$

$$J = \frac{p}{2} \Rightarrow \cos J = 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{p}{2} < J < p \Rightarrow -1 < \cos J < 0 \Rightarrow -uv < \vec{u} \cdot \vec{v} < 0$$

$$J = p \Rightarrow \cos J = -1 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -uv$$

In particolare notiamo che

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

cioè due vettori non nulli sono *perpendicolari* o *ortogonali* se il loro prodotto scalare è nullo.

Se invece uno almeno dei due vettori è nullo, il prodotto scalare vale 0 (zero), cioè:

$$\vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

Le seguenti tre proprietà, che non dimostriamo, sono caratteristiche del prodotto scalare:

$$1. \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

commutatività

$$2. \forall l \in \mathbb{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad (l \vec{u}) \cdot \vec{v} = l (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot l \vec{v}$$

passeggio dello scalare

$$3. \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

distributività del prodotto rispetto alla somma

Si dimostra, delle tre proprietà fondamentali, il seguente

Teorema (di rappresentazione): se due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, rispetto ad una base ortonormale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, sono rappresentati rispettivamente da

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad e \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

allora risulta:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

detta *espressione cartesiana del prodotto scalare*, ovvero il prodotto scalare di due vettori eguaglia la somma dei prodotti delle componenti omonime dei vettori stessi.

Dimostrazione:

Risulta:

$$\vec{v} \cdot \vec{i} = v_x \vec{i} \cdot \vec{i} + v_y \vec{i} \cdot \vec{j} + v_z \vec{i} \cdot \vec{k} = v_x$$

Analogamente si ha:

$$\vec{v} \cdot \vec{j} = v_y; \quad \vec{v} \cdot \vec{k} = v_z$$

Segue allora:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \cdot \vec{v} = u_x \vec{v} \cdot \vec{i} + u_y \vec{v} \cdot \vec{j} + u_z \vec{v} \cdot \vec{k} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Osservazione: dal teorema precedente segue che:

$$|\vec{u}|^2 = u^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

detta *espressione cartesiana del modulo*.

Così facendo abbiamo dato una definizione *geometrica* e molto *intuitiva* di prodotto scalare. Potremmo, in alternativa, definire il prodotto scalare anche in modo formale (come si fa attualmente in diversi testi) nel modo seguente.

Definizione 4.2.

Chiamiamo *prodotto scalare* un'applicazione

$$(\cdot) : V \times V \rightarrow \mathfrak{R}$$

che ad ogni coppia $(\vec{u}, \vec{v})$ di vettori di V associa il numero reale $\vec{u} \cdot \vec{v}$ soddisfacente le proprietà 1., 2. e 3.

5. PRODOTTO VETTORIALE

Si consideri una qualsiasi coppia di vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Definizione 5.1

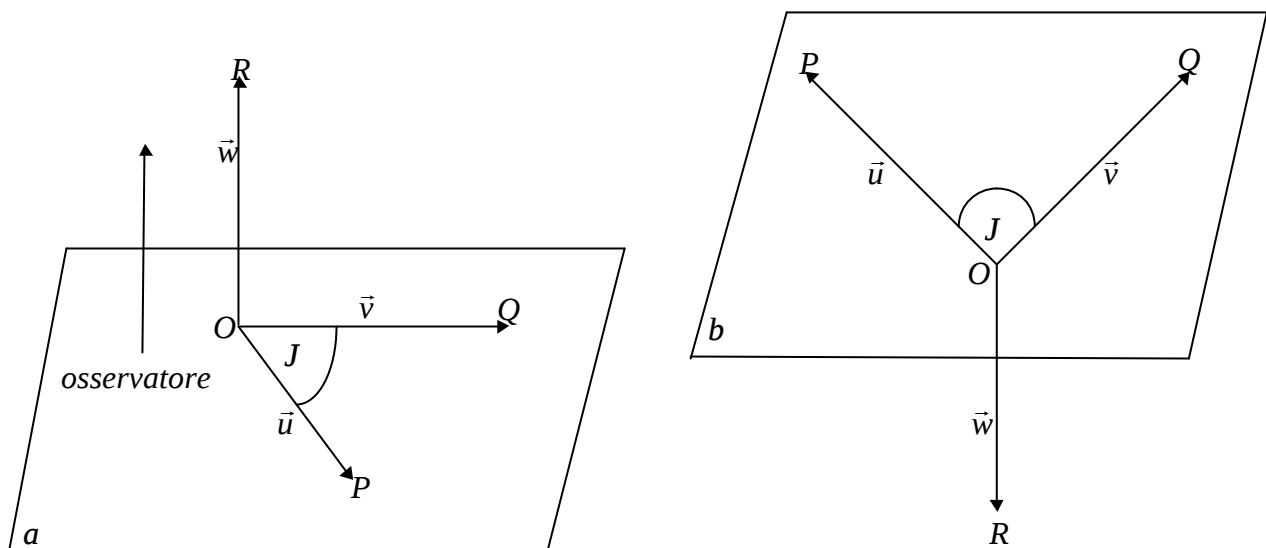
Chiamiamo *prodotto vettoriale* di $\vec{u}$ per $\vec{v}$, e lo si denota con $\vec{u} \wedge \vec{v}$, il vettore $\vec{w}$ definito come segue:

a) se uno almeno dei due vettori è nullo oppure se i due vettori sono paralleli, si pone:

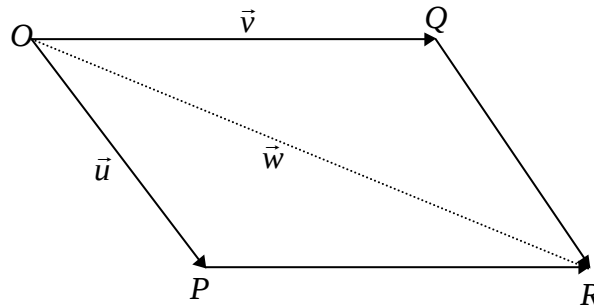
$$\vec{u} \wedge \vec{v} := \vec{0}$$

b) se i due vettori sono nulli e non paralleli, allora il nuovo vettore $\vec{w}$ ha, per definizione, le seguenti caratteristiche:

- la direzione del vettore $\vec{w}$ è ortogonale a quella di un piano α contenente due qualsiasi rappresentanti, uscenti da un medesimo punto, di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (si ricordi che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono non nulli e non paralleli)
- per la determinazione del verso di $\vec{w}$ ci sono innumerevoli regole pratiche; una di queste è la *regola dell'omino*: il verso del prodotto vettoriale, lungo la direzione perpendicolare a quella che va dai piedi alla testa di un osservatore che, posto con i piedi nel punto di applicazione dei due vettori, vede il primo vettore del prodotto sul suo braccio destro ed il secondo sul suo braccio sinistro; così il vettore $\vec{u}$ per sovrapporsi a $\vec{v}$ descrive in senso antiorario un angolo orientato J minore di π , nella faccia del piano in esame
- c) il modulo w di $\vec{w}$ è pari a $u v \sin J$



Osservazione: posto $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OR} = \vec{w}$ si noti che w eguaglia l'area del parallelogramma $OPRQ$ costruito sui vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Le seguenti proprietà sono caratteristiche del prodotto vettoriale:

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$ *anticommutatività*
2. $\forall l \in \mathfrak{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \quad (l \vec{u}) \wedge \vec{v} = l (\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u} \wedge (l \vec{v})$ *passeggio dello scalare*
3. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \quad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$ *distributività rispetto all'addizione vettoriale a destra e a sinistra*

Osservazione: in alcuni testi il prodotto vettoriale è definita come un'operazione astratta interna:

$$(\wedge) : V \times V \rightarrow V$$

tale che siano soddisfatte le proprietà 1., 2., 3.

Si dimostra, inoltre, il seguente

Teorema (di rappresentazione): sia data una base ortogonale $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ e siano date le componenti (u_x, u_y, u_z) di $\vec{u}$ e (v_x, v_y, v_z) di $\vec{v}$; allora risulta:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

cioè nella prima riga del *determinante simbolico* compaiono i versori, nella seconda riga le componenti del primo vettore e nella terza riga quelle del secondo vettore.

Osservazioni (cfr. Appendice cap. II):

- nella struttura algebrica $(V, \wedge)$ non esiste un *vettore neutro* $\vec{u}$ tale che

$$\forall \vec{x} \in V \quad \vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{x}$$

- il prodotto vettoriale non è associativo, cioè in generale risulta:

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \quad \text{dati } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$$

Per completezza diamo anche la seguente

Definizione 5.2.

Dati tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ definiamo *prodotto misto*, e lo indichiamo con $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$, quel numero reale che si ottiene moltiplicando vettorialmente il vettore $\vec{u}$ per il vettore $\vec{v}$ ed il vettore risultante scalarmente per $\vec{w}$.

Osservazione: non si può calcolare prima il prodotto scalare perchè $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ è un numero reale (prodotto misto) mentre l'espressione $\vec{u} \wedge (\vec{v} \cdot \vec{w})$ è priva di senso in quanto il secondo membro non è un vettore.

Si dimostra ora il seguente

Teorema (di rappresentazione): supposta nota la rappresentazione cartesiana dei vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$, si ha:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

ESERCIZI PROPOSTI

1) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi modulo $u = 12$ e $v = 10$, determinare il modulo del vettore somma $\vec{w}$ nel caso in cui l'angolo α da essi formato assuma i seguenti valori:

- $\alpha = 0^\circ$ $[w = 22]$
- $\alpha = 180^\circ$ $[w = 2]$
- $\alpha = 90^\circ$ $[w = 2\sqrt{61}]$
- $\alpha = 120^\circ$ $[w = 2\sqrt{31}]$

2) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi modulo $u = v = 8$ e formanti un angolo $\alpha = 120^\circ$, determinare i moduli dei vettori $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$.

$$[z = 8, w = 8\sqrt{3}]$$

3) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi modulo $u = 8$ e $v = 4$, determinare i moduli dei vettori $\vec{z} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, nel caso in cui l'angolo α da essi formato assuma i seguenti valori:

- $\alpha = 0^\circ$ $[z = 12, w = 4]$
- $\alpha = 90^\circ$ $[z = w = 4\sqrt{5}]$
- $\alpha = 180^\circ$ $[z = 4, w = 12]$
- $\alpha = 60^\circ$ $[z = 4\sqrt{7}, w = 4\sqrt{3}]$

4) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi modulo $u = 14$ e $v = 20$, determinare il modulo dei vettori $\vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{t} = -2\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{z} = \vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{r} = -5(\vec{u} - \vec{v})$ nel caso in cui l'angolo α da essi formato assuma i seguenti valori:

- $\alpha = 0^\circ$ $[w = 48, t = 48, z = 74, r = 30]$
- $\alpha = 180^\circ$ $[w = 8, t = 8, z = 46, r = 170]$
- $\alpha = 90^\circ$ $[w = 4\sqrt{74}, t = 4\sqrt{74}, z = 2\sqrt{949}, r = 10\sqrt{149}]$

5) Siano $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tre vettori aventi ugual modulo e formanti ognuno con il successivo un angolo $\alpha = 120^\circ$. Determinare il vettore somma $\vec{t} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

$$[\vec{t} = \vec{0}]$$

6) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ con $u = 12$ e $v = 10$, determinare il prodotto scalare supponendo che l'angolo J da essi formato assuma i seguenti valori:

- $J = 0^\circ$ $[\vec{u} \cdot \vec{v} = 120]$

- $J = \frac{p}{4}$ $[\vec{u} \cdot \vec{v} = 60 \sqrt{2}]$
- $J = \frac{p}{3}$ $[\vec{u} \cdot \vec{v} = 60]$
- $J = \frac{2}{3} p$ $[\vec{u} \cdot \vec{v} = -60]$
- $J = p$ $[\vec{u} \cdot \vec{v} = -120]$
- $J = \frac{5}{6} p$ $[\vec{u} \cdot \vec{v} = -60 \sqrt{3}]$

7) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ calcolare il modulo del vettore $\vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$ sapendo che $u = 8$ e $v = 5$.

$$[w = 320]$$

8) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ aventi lo stesso modulo e formanti un angolo $J = 90^\circ$, calcolare $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$.

$$[0]$$

9) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formanti un angolo $J = \frac{p}{3}$, calcolare il modulo del vettore $\vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{v}) (-3\vec{u})$

sapendo che $u = 10$ e $v = 6$.

$$[w = 1080]$$

10) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ con $u = 4$ e $v = 20$ ed angolo fra essi compreso $J = \frac{p}{6}$, calcolare:

- $\text{vers } \vec{u} \cdot \vec{u}$ $[4]$
- $\text{vers } \vec{u} \cdot \vec{v}$ $[10 \sqrt{3}]$
- $\text{vers } \vec{u} \cdot \text{vers } \vec{v}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
- $(-2\vec{u}) \cdot \vec{v}$ $[-80 \sqrt{3}]$
- $\vec{v} \cdot \vec{v}$ $[400]$

11) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tali che $u = 15$ e $v = 6$, determinare il modulo del vettore $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, supponendo che l'angolo J da essi formato assuma i seguenti valori:

- $J = 0^\circ$ $[w = 0]$
- $J = \frac{p}{2}$ $[w = 90]$
- $J = \frac{5}{6} p$ $[w = 45]$

- $J = \frac{p}{6}$ $[w = 45]$

- $J = p$ $[w = 0]$

12) Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tali che $u = 4$ e $v = 20$, sapendo che l'angolo fra essi compreso è $J = \frac{p}{6}$,

calcolare:

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{u})$ $[-1600]$

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v}$ $[0]$

- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ $[0]$

- $(\text{vers } \vec{u} \wedge \text{vers } \vec{v}) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ $[20]$

- $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ $[0]$

13) Calcolare i moduli dei seguenti vettori (nel piano OXY):

- $\vec{u}(-2, 5)$ $[u = \sqrt{29}]$

- $\vec{v}(-3, 4)$ $[v = 5]$

- $\vec{w}(0, -2)$ $[w = 2]$

- $\vec{z}(-6, 0)$ $[z = 6]$

14) Dati, nel piano OXY , i vettori $\vec{u}(1, 5)$ e $\vec{v}(3, 7)$, calcolare le coordinate dei vettori $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ed

$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$. $[\vec{w}(4, 12); \vec{z}(-2, -2)]$

15) Dati, nel piano OXY , i vettori $\vec{u}(-2, -3)$ e $\vec{v}(0, 9)$, calcolare:

- il modulo del vettore $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ $[w = 18]$

- $\vec{u} \cdot \vec{v}$ $[-27]$

16) Calcolare il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ nei seguenti casi:

- $\vec{u}(2, 3)$ e $\vec{v}(5, 7)$ $[31]$

- $\vec{u}(-2, 4)$ e $\vec{v}(1, 0)$ $[-2]$

- $\vec{u}\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ e $\vec{v}(0, 8)$ $[0]$

- $\vec{u}\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ e $\vec{v}(-7, 0)$ $\left[-\frac{35}{4}\right]$

17) Dati i vettori $\vec{u} \left(\frac{3}{4}, 0 \right)$, $\vec{v} (-3, 1)$ e $\vec{w} \left(-\frac{1}{3}, -7 \right)$, calcolare:

- $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$ $\left[\frac{9}{4} \right]$
- $(-\vec{v}) \cdot (-\vec{u})$ $\left[-\frac{9}{4} \right]$
- $\vec{i} \cdot \vec{w}$ $\left[-\frac{1}{3} \right]$
- $\vec{v} \cdot \vec{j}$ $[1]$
- $\vec{u} \cdot \vec{w}$ $\left[-\frac{1}{4} \right]$
- $(\vec{i} + \vec{j}) \cdot \vec{v}$ $[-2 \sqrt{2}]$

18) Nel piano OXY sono dati i vettori $\vec{u} (2, 2 \sqrt{3})$ e $\vec{v} (3 \sqrt{3}, 3)$. Calcolare:

- i moduli dei due vettori $[u = 4; v = 6]$
- le coordinate dei vettori $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{t} = \vec{u} - \vec{v}$ $[\vec{w} (2 + 3 \sqrt{3}, 3 + 2 \sqrt{3}); \vec{t} (2 - 3 \sqrt{3}, 2 \sqrt{3} - 3)]$
- il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ $[12 \sqrt{3}]$
- il modulo del vettore $\vec{z} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ $[12]$

19) Nel piano OXY sono dati i vettori $\vec{u} (-2, 2 \sqrt{3})$ e $\vec{v} (6, 2 \sqrt{3})$. Calcolare:

- i moduli dei due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ $[u = 4; v = 4 \sqrt{3}]$
- le coordinate dei vettori $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{t} = \vec{v} - \vec{u}$ $[\vec{w} (4, 4 \sqrt{3}); \vec{t} (8, 0)]$
- il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$ $[0]$
- il modulo del vettore $\vec{z} = \vec{v} \wedge \vec{u}$ $[16 \sqrt{3}]$