

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

Risoluzione
I Parziale - Compito A
19/11/2003
A. A. 2003 – 2004

1) $\vec{u}(-1, 0, 2)$ $\vec{v}(3, -4, 0)$ $\vec{w}(2, 0, 1)$

a) Poiché si ha:

$$2\vec{u} = 2 \cdot (-1, 0, 2) = (-2, 0, 4)$$

$$\vec{v}(3, -4, 0)$$

$$3\vec{w} = 3 \cdot (2, 0, 1) = (6, 0, 3)$$

ne segue che:

$$2\vec{u} + \vec{v} - 3\vec{w} = (-2, 0, 4) + (3, -4, 0) - (6, 0, 3) = (-5, -4, 1)$$

b) Poiché si ha:

$$(\vec{u} \bullet \vec{v}) = (-1, 0, 2) \bullet (3, -4, 0) = (-1) \cdot (3) + (0) \cdot (-4) + (2) \cdot (0) = -3 + 0 + 0 = -3$$

ne segue che

$$(\vec{u} \bullet \vec{v}) \cdot \vec{w} = -3 \cdot (2, 0, 1) = (-6, 0, -3)$$

c) $|\vec{u}| = |(-1, 0, 2)| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

d) Poiché:

$$|\vec{v}| = |(3, -4, 0)| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$2\vec{u} + \vec{w} = (-2, 0, 4) + (2, 0, 1) = (0, 0, 5)$$

si ha:

$$|\vec{v}| \cdot (2\vec{u} + \vec{w}) = 5 \cdot (0, 0, 5) = (0, 0, 25)$$

Osservazioni.

- Quando si moltiplica un vettore per uno scalare, ovvero per un numero, bisogna moltiplicare per quel determinato scalare tutte le componenti del vettore dato.
- Effettuando il prodotto scalare tra due vettori si ottiene uno scalare e non un vettore.
- Il modulo, o norma, di un vettore rappresenta proprio la lunghezza del vettore e si ottiene estraendo la radice quadrata della somma delle singole componenti, elevate al quadrato, del vettore.
- La somma, o differenza, tra due vettori si ottiene sommando, o sottraendo, tra di loro le componenti dei due vettori che si trovano nelle posizioni omonime.

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \\ 5 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 5 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) \\ (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & (-3) \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 10 & -5 & 0 \\ -4 & 9 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + (-2) \cdot (-3) & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 23 & -5 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \det C = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 10 & -5 & 0 \\ -4 & 9 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-5) \cdot (-4) + (-5) \cdot 0 \cdot (-4) + 2 \cdot 10 \cdot 9 - [2 \cdot (-5) \cdot (-4) + 9 \cdot 0 \cdot 3 + 10 \cdot (-5) \cdot (-4)] =$$

$$= +60 + 0 + 180 - (40 + 0 + 200) = 240 - (240) = 0$$

$$\det D = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 23 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) - (-2) \cdot 23 = 5 + 46 = 51$$

Osservazioni.

In questo caso le matrici A e B sono moltiplicabili in ambo i sensi e, pur essendo rettangolari, i loro prodotti, AB e BA , sono matrici quadrate di ordine tra di loro diverso. L'esercizio svolto prova ancora una volta l'anticommutatività, ovvero la non commutatività, del prodotto tra matrici.

3)

a) $y = 4x^3 - 3x + 1$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, 1, sono esattamente ± 1 . Ma allora si ha:

$$P(x) = 4x^3 - 3x + 1 \Rightarrow P(x = -1) = 4 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = -4 + 3 + 1 = 0$$

cioè per $x = -1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	4	0	-3	1
-1		-4	4	-1
	4	-4	1	0

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = 4x^3 - 3x + 1 = (x + 1)(4x^2 - 4x + 1)$$

Quindi risulta:

$$y = 4x^3 - 3x + 1 = (x + 1)(4x^2 - 4x + 1) = (x + 1)(2x - 1)^2$$

È ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4x^3 - 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 1)$$

è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 4x^3 - 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x + 1)(2x - 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + 1 = 0 \\ (2x - 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

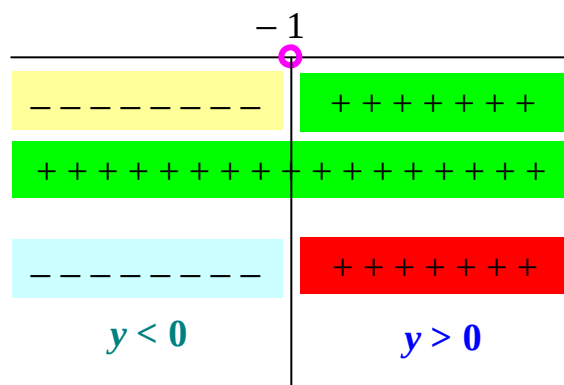
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = -1 \Rightarrow B = (-1, 0) \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad C = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow 4x^3 - 3x + 1 > 0 \Rightarrow (x + 1)(2x - 1)^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ (2x - 1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



cioè la funzione è positiva per $x > -1$.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3) = 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = 4 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3) = 4 \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = 4 \cdot (-\infty) = -\infty$$

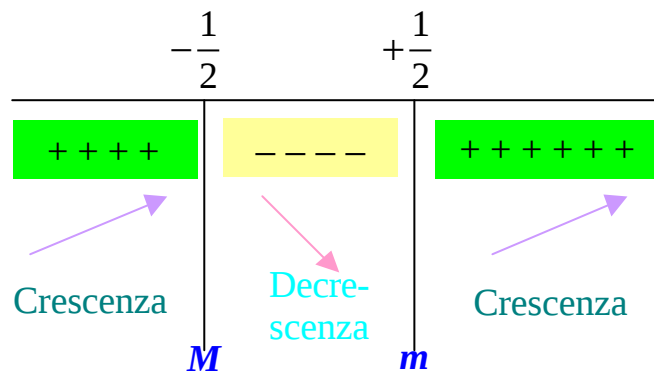
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D(4x^3 - 3x + 1) = 12x^2 - 3$$

da cui segue:

$$12x^2 - 3 > 0 \Rightarrow 4x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}, x > +\frac{1}{2}$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = -\frac{1}{2}$ ed un minimo in $x = +\frac{1}{2}$.

In particolare si ha:

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 4\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{-1+3+2}{2} = 2$$

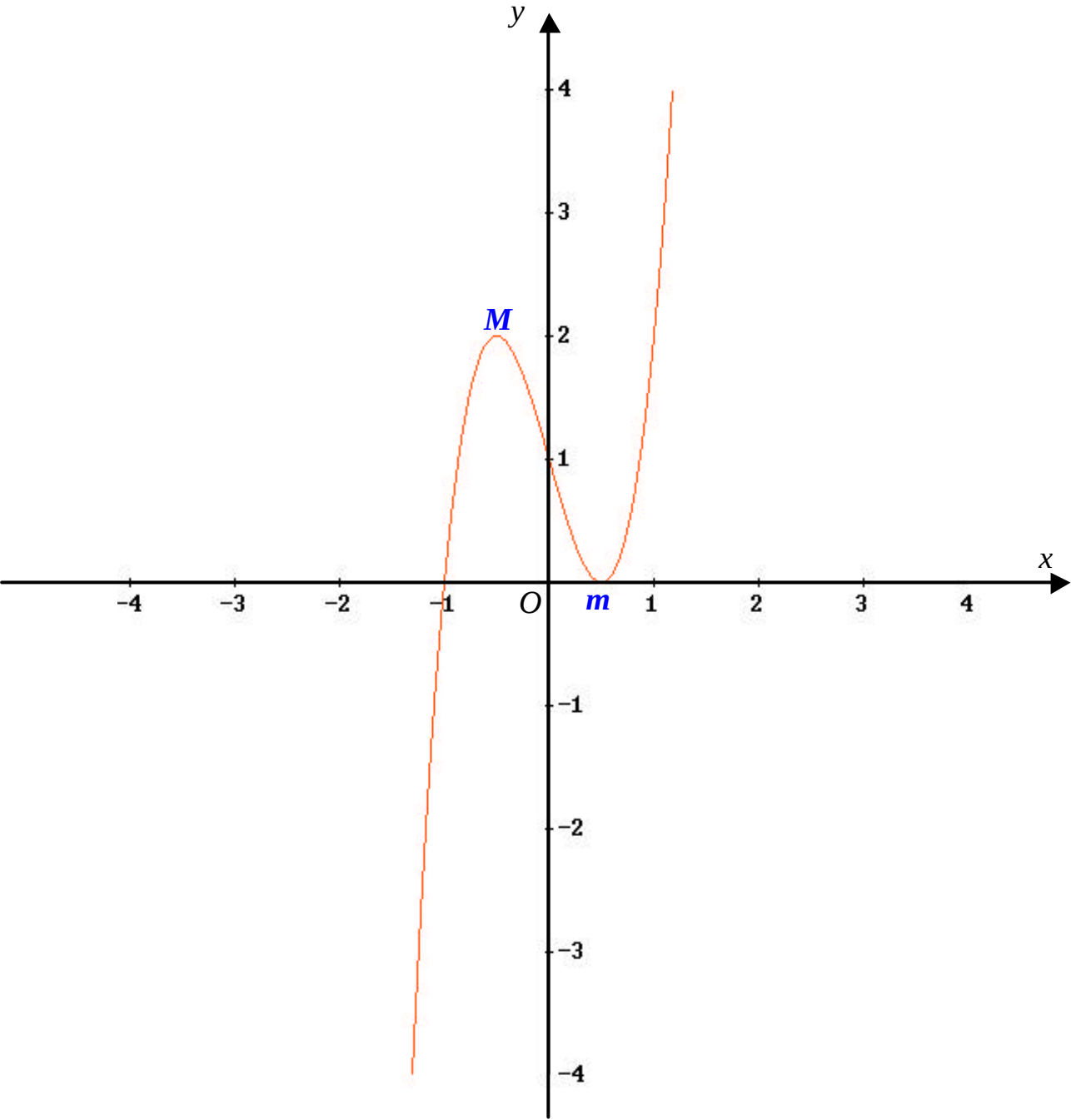
$x = +\frac{1}{2} \Rightarrow$ non è necessario fare tutti i calcoli in quanto tale punto coincide con una delle intersezioni della funzione con l'asse delle x , per cui sappiamo già a priori che la sua ordinata è $y = 0$.

Ne segue, quindi, che:

$m\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ è il punto di minimo

$M\left(+\frac{1}{2}, 0\right) \equiv C$ è il punto di massimo

IL GRAFICO.



$$b) y = \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - x}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$\begin{aligned} C.E. &= \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x(2x - 1) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, 2x - 1 \neq 0\} = \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, x \neq \frac{1}{2}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x < +\infty\right\} \end{aligned}$$

Ne segue che le rette di equazione $x = 0$ ed $x = \frac{1}{2}$ sono due asintoti verticali per la funzione.

$$A.V.: x = 0, x = \frac{1}{2}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{non esistono intersezioni della funzione con l'asse } y \\ \text{poiché in } x = 0 \text{ la funzione stessa non è definita} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - x} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = -4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ \Rightarrow B = (-4, 0) & \quad C = (1, 0) \end{aligned}$$

sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

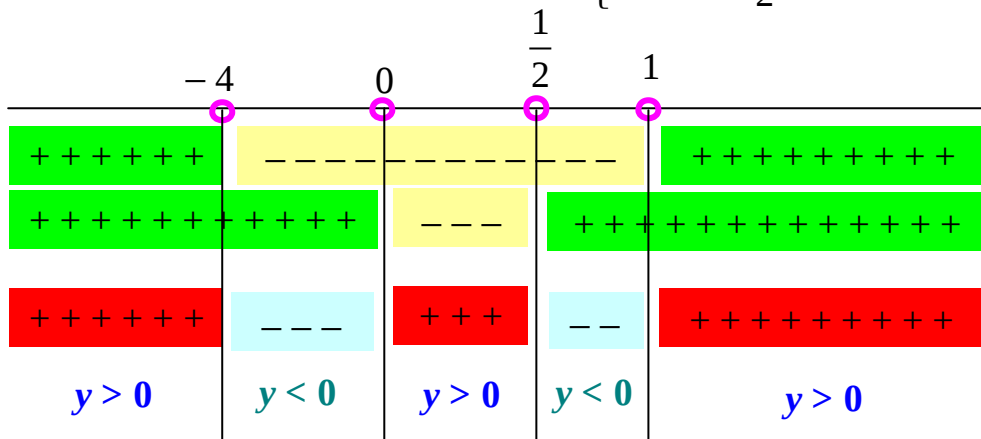
Infatti si ha:

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ 2x^2 - x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -4, x > 1 \\ x < 0, x > \frac{1}{2} \end{cases}$$



cioè la funzione è positiva per $-\infty < x < -4$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $1 < x < +\infty$.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{2x^2} \right) = \frac{1}{2}$$

cioè la retta di equazione $y = \frac{1}{2}$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$A.O.: y = \frac{1}{2}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 - x}\right) &= \frac{(2x + 3) \cdot (2x^2 - x) - (x^2 + 3x - 4) \cdot (4x - 1)}{(2x^2 - x)^2} = \\ &= \frac{4x^3 - 2x^2 + 6x^2 - 3x - 4x^3 + x^2 - 12x^2 + 3x + 16x - 4}{(2x^2 - x)^2} = \frac{-7x^2 + 16x - 4}{(2x^2 - x)^2} \end{aligned}$$

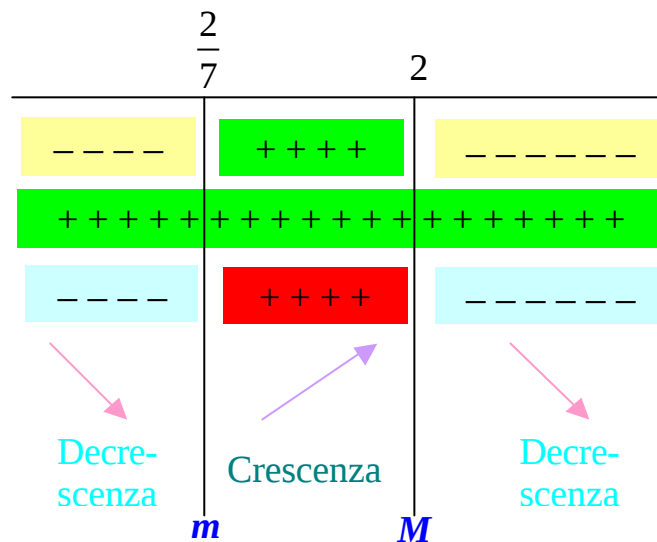
da cui segue:

$$\frac{-7x^2 + 16x - 4}{(2x^2 - x)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -7x^2 + 16x - 4 > 0 \\ (2x^2 - x)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x^2 - 16x + 4 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{7} < x < 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Infatti:

$$7x^2 - 16x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{7} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{7} = \frac{8 \pm 6}{7} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = 2$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = 2$ ed un minimo in $x = \frac{2}{7}$.

In particolare si ha:

$$x = \frac{2}{7} \Rightarrow y = \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{7}\right) - 4}{2\left(\frac{2}{7}\right)^2 - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{4}{49} + \frac{6}{7} - 4}{\frac{8}{49} - \frac{2}{7}} = \frac{\frac{4 + 42 - 196}{49}}{\frac{8 - 14}{49}} = \frac{-150}{-6} = \frac{150}{6} = 25$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{(2)^2 + 3 \cdot 2 - 4}{2(2)^2 - 2} = \frac{4 + 6 - 4}{8 - 2} = 1$$

Ne segue, quindi, che:

$m\left(\frac{2}{7}, 25\right)$ è il punto di minimo

$M(2, 1)$ è il punto di massimo

IL GRAFICO.

