

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

Risoluzione
I Parziale - Compito B
19/11/2003
A. A. 2003 – 2004

1) $\vec{u}(0, 2, -1)$ $\vec{v}(1, 0, -5)$ $\vec{w}(4, 3, 0)$

a) Poiché si ha:

$$\vec{u}(0, 2, -1)$$

$$4\vec{v} = 4 \cdot (1, 0, -5) = (4, 0, -20)$$

$$2\vec{w} = 2 \cdot (4, 3, 0) = (8, 6, 0)$$

ne segue che:

$$\vec{u} - 4\vec{v} + 2\vec{w} = (0, 2, -1) - (4, 0, -20) + (8, 6, 0) = (4, 8, 19)$$

b) Poiché si ha:

$$(\vec{v} \bullet \vec{w}) = (1, 0, -5) \bullet (4, 3, 0) = (1) \cdot (4) + (0) \cdot (3) + (-5) \cdot (0) = 4 + 0 + 0 = 4$$

ne segue che

$$(\vec{v} \bullet \vec{w}) \cdot \vec{u} = 4 \cdot (0, 2, -1) = (0, 8, -4)$$

c) $|\vec{v}| = |(1, 0, -5)| = \sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

d) Poiché:

$$|\vec{w}| = |(4, 3, 0)| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2 + (0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$4\vec{v} + \vec{u} = (4, 0, -20) + (0, 2, -1) = (4, 2, -21)$$

si ha:

$$|\vec{w}| \cdot (4\vec{v} + \vec{u}) = 5 \cdot (4, 2, -21) = (20, 10, -105)$$

Osservazioni.

- Quando si moltiplica un vettore per uno scalare, ovvero per un numero, bisogna moltiplicare per quel determinato scalare tutte le componenti del vettore dato.
- Effettuando il prodotto scalare tra due vettori si ottiene uno scalare e non un vettore.
- Il modulo, o norma, di un vettore rappresenta proprio la lunghezza del vettore e si ottiene estraendo la radice quadrata della somma delle singole componenti, elevate al quadrato, del vettore.
- La somma, o differenza, tra due vettori si ottiene sommando, o sottraendo, tra di loro le componenti dei due vettori che si trovano nelle posizioni omonime.

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 11 \\ 9 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \det C = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 15 & 12 \end{vmatrix} = (5) \cdot (12) - (3) \cdot 15 = 60 - 45 = 15$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 11 \\ 9 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 9 \cdot 4 \cdot 4 + 7 \cdot 5 \cdot 0 + 11 \cdot 9 \cdot 2 - [11 \cdot 4 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \cdot 9 + 9 \cdot 7 \cdot 4] =$$

$$= +144 + 0 + 198 - (0 + 90 + 252) = 342 - (342) = 0$$

Osservazioni.

In questo caso le matrici A e B sono moltiplicabili in ambo i sensi e, pur essendo rettangolari, i loro prodotti, AB e BA , sono matrici quadrate di ordine tra di loro diverso. L'esercizio svolto prova ancora una volta l'anticommutatività, ovvero la non commutatività, del prodotto tra matrici.

3)

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, 1, sono esattamente ± 1 . Ma allora si ha:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow P(x = +1) = 2 \cdot (+1)^3 - 3 \cdot (+1) + 1 = +2 - 3 + 1 = 0$$

cioè per $x = -1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	2	-3	0	1
+1		2	-1	-1
	2	-1	-1	0

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)(2x^2 - x - 1)$$

Quindi risulta:

$$y = 2x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)(2x^2 - x - 1) = (x - 1)^2 \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

in quanto da $2x^2 - x - 1 = 0$ si ricavano le soluzioni:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1$$

È ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2x^3 - 3x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 1)$$

è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=2x^3-3x^2+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x-1)^2 \left(x+\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ (x-1)^2=0 \\ x+\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x-1=0 \\ x+\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow$$

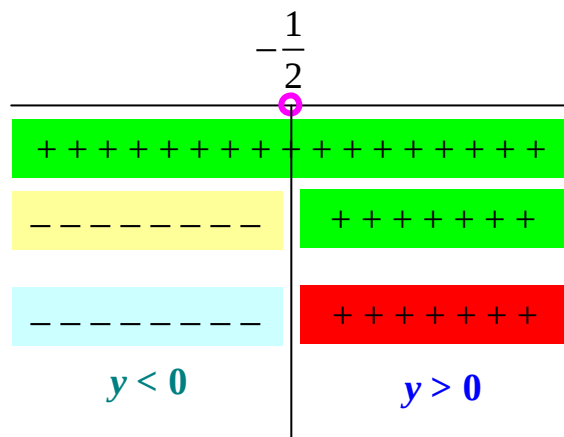
$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x_1=+1 \\ x_2=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=(+1, 0)} \quad \boxed{C=\left(-\frac{1}{2}, 0\right)}$$

sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow (x-1)^2 \left(x+\frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 > 0 \\ x+\frac{1}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$



cioè la funzione è positiva per $x > -\frac{1}{2}$.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3) = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = 2 \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} y} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 3x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3) = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = 2 \cdot (-\infty) = \boxed{-\infty}$$

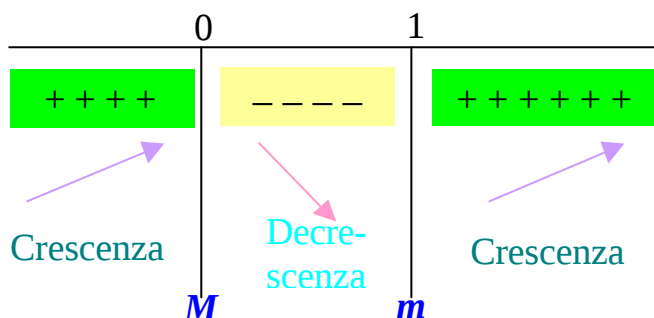
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D(2x^3 - 3x^2 + 1) = 6x^2 - 6x$$

da cui segue:

$$6x^2 - 6x > 0 \Rightarrow x^2 - x > 0 \Rightarrow x(x - 1) > 0 \Rightarrow x < 0, x > 1$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = 0$ ed un minimo in $x = 1$.

In particolare si ha:

$x = 0 \Rightarrow$ non è necessario fare tutti i calcoli in quanto tale punto coincide con l'intersezione della funzione con l'asse delle y , per cui sappiamo già a priori che la sua ordinata è $y = 1$

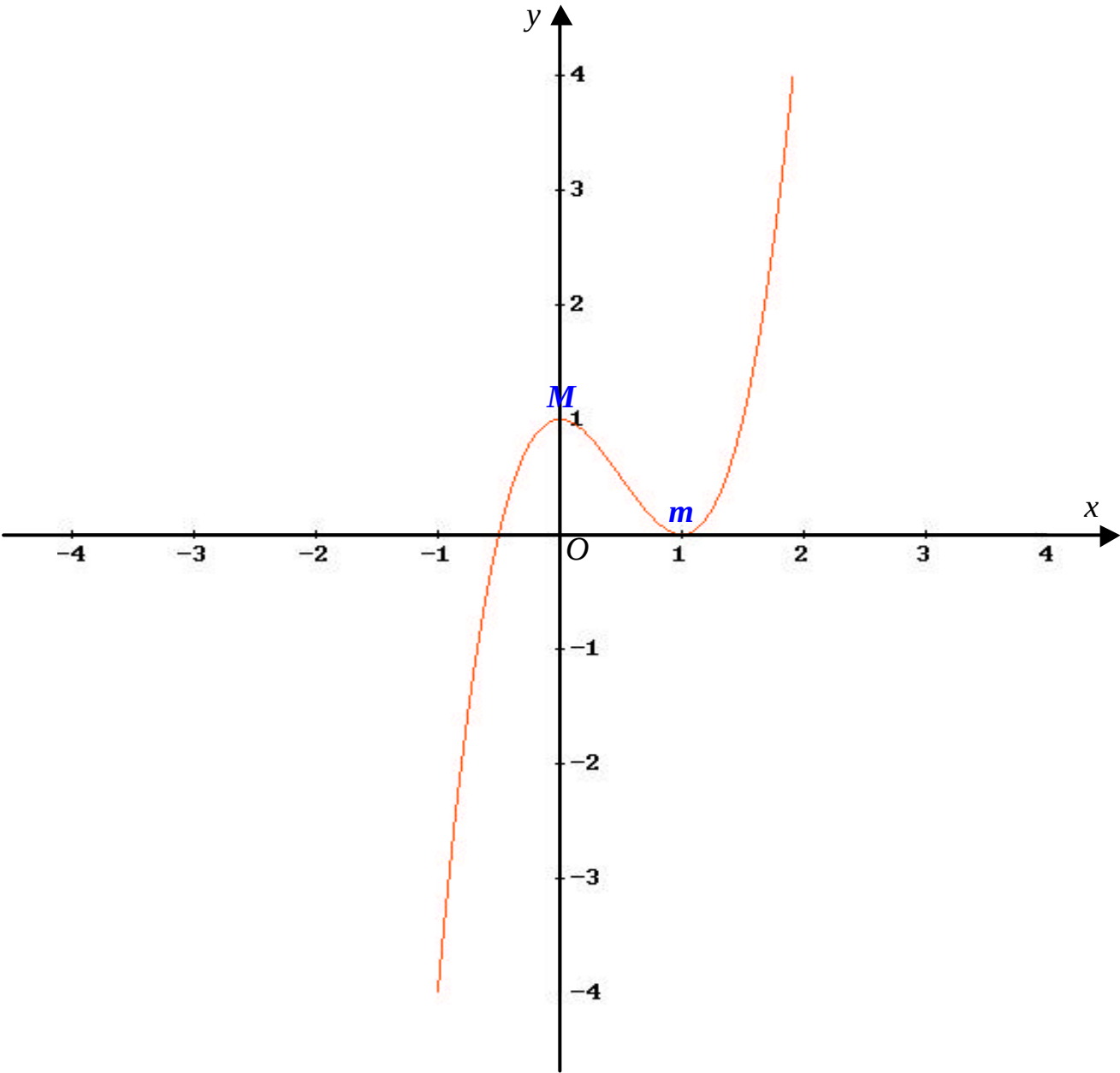
$x = 1 \Rightarrow$ non è necessario fare tutti i calcoli in quanto tale punto coincide con l'intersezione della funzione con l'asse delle x , per cui sappiamo già a priori che la sua ordinata è $y = 0$

Ne segue, quindi, che:

$m(1, 0) \equiv B$ è il punto di minimo

$M(0, 1) \equiv A$ è il punto di massimo

IL GRAFICO.



$$b) y = \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 6x + 5}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 6x + 5 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : (x + 1)(x + 5) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1, x \neq -5\} = \\ = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -5, -5 < x < -1, -1 < x < +\infty\}$$

Ne segue che le rette di equazione $x = -5$ ed $x = -1$ sono due asintoti verticali per la funzione.

$$A.V.: x = -5, x = -1$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 6x + 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 0) \equiv O$$

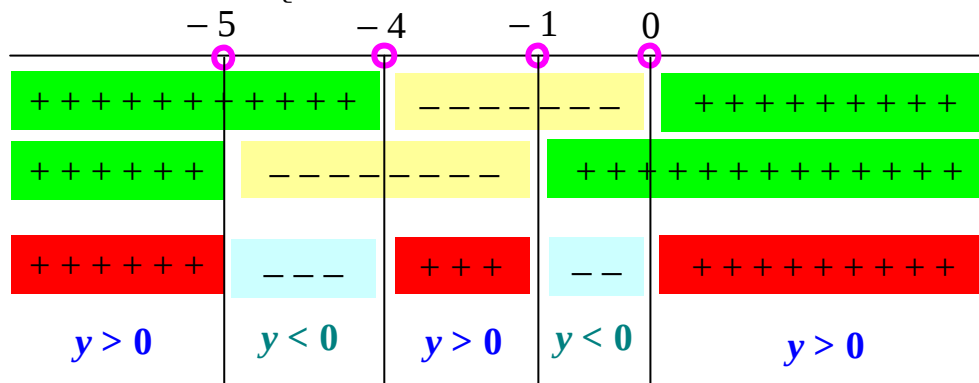
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 6x + 5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 6x + 5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x + 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow B = (0, 0) \equiv A \equiv O \quad C = (-4, 0)$$

sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 4x}{x^2 + 6x + 5} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x > 0 \\ 2x^2 + 6x + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -4, x > 0 \\ x < -5, x > -1 \end{cases}$$



cioè la funzione è positiva per $-\infty < x < -5$, $-4 < x < -1$, $0 < x < +\infty$.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 6x + 5} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

cioè la retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\text{A.O.: } y = 1$$

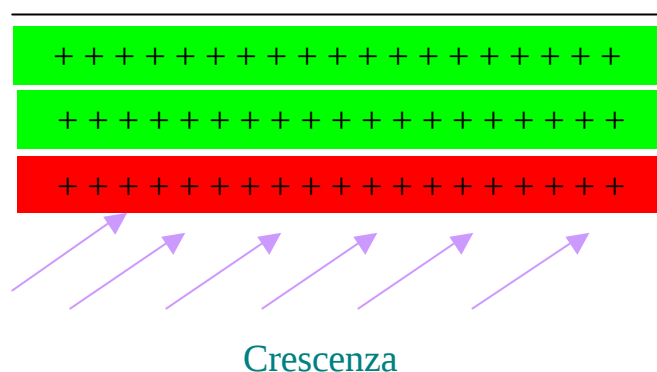
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$\begin{aligned} D\left(\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 6x + 5}\right) &= \frac{(2x + 4) \cdot (x^2 + 6x + 5) - (x^2 + 4x) \cdot (2x + 6)}{(x^2 + 6x + 5)^2} = \\ &= \frac{2x^3 + 12x^2 + 10x + 4x^2 + 24x + 20 - 2x^3 - 6x^2 - 8x^2 - 24x}{(x^2 + 6x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 20}{(x^2 + 6x + 5)^2} \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + 10x + 20}{(x^2 + 6x + 5)^2} > 0 &\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 10x + 20 > 0 \\ (x^2 + 6x + 5)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 10 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ (poiché } \Delta < 0) \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$



Dunque la funzione non ha né massimi né minimi.

IL GRAFICO.

