

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE
CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

Risoluzione
I Parziale - Compito C
19/11/2003
A. A. 2003 – 2004

1) $\vec{u}(0, -3, -4)$ $\vec{v}(1, -2, 0)$ $\vec{w}(-3, 0, 1)$

a) Poiché si ha:

$$3\vec{u} = 3 \cdot (0, -3, -4) = (0, -9, -12)$$

$$4\vec{v} = 4 \cdot (1, -2, 0) = (4, -8, 0)$$

$$\vec{w}(-3, 0, 1)$$

ne segue che:

$$3\vec{u} - 4\vec{v} + \vec{w} = (0, -9, -12) - (4, -8, 0) + (-3, 0, 1) = (-7, -1, -11)$$

b) Poiché si ha:

$$(\vec{u} \bullet \vec{w}) = (0, -3, -4) \bullet (-3, 0, 1) = (0) \cdot (-3) + (-3) \cdot (0) + (-4) \cdot (1) = 0 + 0 - 4 = -4$$

ne segue che

$$(\vec{u} \bullet \vec{w}) \cdot \vec{v} = -4 \cdot (1, -2, 0) = (-4, 8, 0)$$

c) $|\vec{w}| = |(-3, 0, 1)| = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

d) Poiché:

$$|\vec{u}| = |(0, -3, -4)| = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{v} + 3\vec{w} = (1, -2, 0) + (-9, 0, 3) = (-8, -2, 3)$$

si ha:

$$|\vec{u}| \cdot (\vec{v} + 3\vec{w}) = 5 \cdot (-8, -2, 3) = (-40, -10, 15)$$

Osservazioni.

- Quando si moltiplica un vettore per uno scalare, ovvero per un numero, bisogna moltiplicare per quel determinato scalare tutte le componenti del vettore dato.
- Effettuando il prodotto scalare tra due vettori si ottiene uno scalare e non un vettore.
- Il modulo, o norma, di un vettore rappresenta proprio la lunghezza del vettore e si ottiene estraendo la radice quadrata della somma delle singole componenti, elevate al quadrato, del vettore.
- La somma, o differenza, tra due vettori si ottiene sommando, o sottraendo, tra di loro le componenti dei due vettori che si trovano nelle posizioni omonime.

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a) \quad C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 5 & 2 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \det C = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 10 \\ 5 & 2 & 5 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot (-5) + 10 \cdot 5 \cdot 0 - [10 \cdot 2 \cdot (-5) + 0 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 3] =$$

$$= +50 - 75 + 0 - (-100 + 0 + 75) = -25 - (-25) = 0$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 8 & 16 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (8) \cdot (4) - (16) \cdot (-3) = 32 + 48 = 80$$

Osservazioni.

In questo caso le matrici A e B sono moltiplicabili in ambo i sensi e, pur essendo rettangolari, i loro prodotti, AB e BA , sono matrici quadrate di ordine tra di loro diverso. L'esercizio svolto prova ancora una volta l'anticommutatività, ovvero la non commutatività, del prodotto tra matrici.

3)

a) $y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione polinomiale, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, 4, sono esattamente $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Ma allora si ha:

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \Rightarrow P(x = +1) = (+1)^3 - 5 \cdot (+1)^2 + 8 \cdot (+1) - 4 = 1 - 5 + 8 - 4 = 0$
cioè per $x = +1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	1	-5	8	-4
+1		1	-4	+4
	1	-4	4	0

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x^2 - 4x + 4)$$

Quindi risulta:

$$y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 1)(x^2 - 4x + 4) = (x - 1)(x - 2)^2$$

È ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -4)$$

è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x - 1)(x - 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 1 = 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

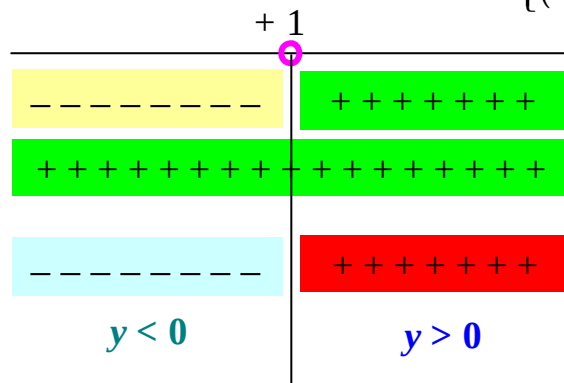
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow B = (1, 0) \quad C = (2, 0)$$

sono i punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 8x - 4 > 0 \Rightarrow (x-1)(x-2)^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



cioè la funzione è positiva per $x > 1$.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

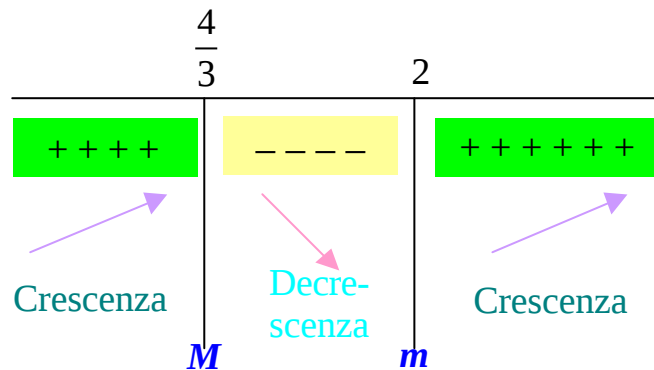
$$D(x^3 - 5x^2 + 8x - 4) = 3x^2 - 10x + 8$$

da cui segue:

$$3x^2 - 10x + 8 > 0 \Rightarrow x < \frac{4}{3}, x > 2$$

essendo:

$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{3} = \frac{5 \pm 1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 2$$



Dunque la funzione ha un massimo in $x = \frac{4}{3}$ ed un minimo in $x = 2$.

In particolare si ha:

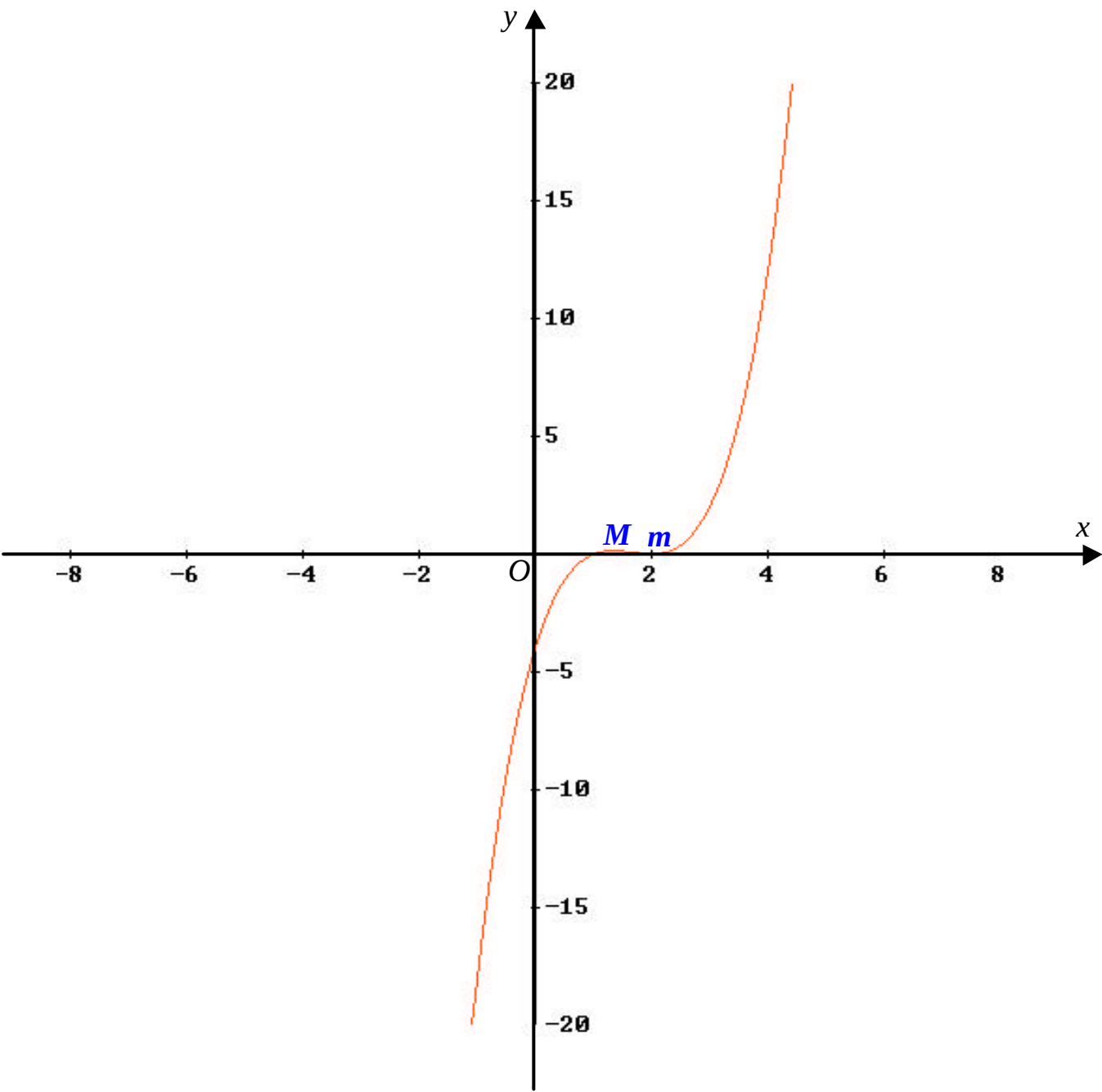
$$x = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\left(\frac{4}{3}\right) - 4 = \frac{64}{27} - \frac{80}{9} + \frac{32}{3} - 4 = \frac{64 - 240 + 288 - 108}{27} = \frac{4}{27}$$

$x = 2 \Rightarrow$ non è necessario fare tutti i calcoli in quanto tale punto coincide con una delle intersezioni della funzione con l'asse delle x , per cui sappiamo già a priori che la sua ordinata è $y = 0$. Ne segue, quindi, che:

$m(2, 0) \equiv C$ è il punto di minimo

$M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{27}\right)$ è il punto di massimo

IL GRAFICO.



$$b) y = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x - 2)^2}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4x + 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: (x - 2)^2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 2\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < 2, 2 < x < +\infty\}$$

Ne segue che la retta di equazione $x = 2$ è un asintoto verticali per la funzione.

$$\boxed{A.V.: x = 2}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \left(0, \frac{1}{4}\right)}$$

punto di intersezione della funzione con l'asse y

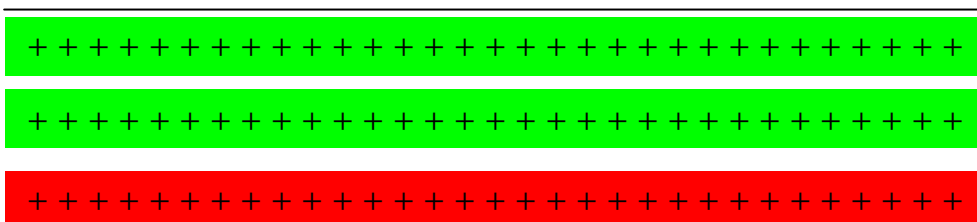
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ (poiché } \Delta < 0)$$

$\Rightarrow$ non esistono punti di intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 > 0 \\ x^2 - 4x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ (poiché è un quadrato)}$$



$$y > 0$$

cioè la funzione è sempre positiva.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} \right) = 2$$

cioè la retta di equazione $y = 2$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

$$\text{A.O.: } y = 2$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D\left(\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 4}\right) = \frac{(4x - 2) \cdot (x^2 - 4x + 4) - (2x^2 - 2x + 1) \cdot (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2} =$$

$$= \frac{4x^3 - 16x^2 + 16x - 2x^2 + 8x - 8 - 4x^3 + 8x^2 + 4x^2 - 8x - 2x + 4}{(x - 2)^4} = \frac{-6x^2 + 14x - 4}{(x - 2)^4}$$

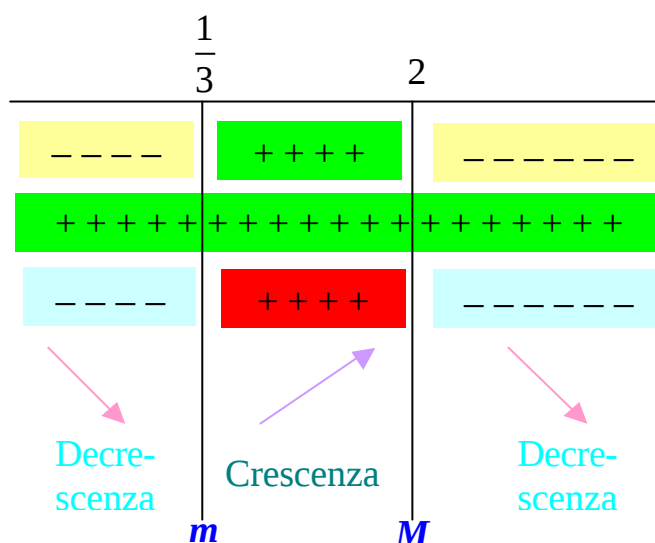
da cui segue:

$$\frac{-6x^2 + 14x - 4}{(x - 2)^4} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -6x^2 + 14x - 4 > 0 \\ (x - 2)^4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 14x + 4 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x < 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Infatti:

$$6x^2 - 14x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 2$$



Dunque la funzione ha solo un minimo in $x = \frac{1}{3}$, poiché in $x = 2$ non è definita.

In particolare si ha:

$$x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1}{\left(\frac{1}{3} - 2\right)^2} = \frac{\frac{2}{9} - \frac{2}{3} + 1}{\left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2-6+9}{9}}{\frac{25}{9}} = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{25}{9}} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

Ne segue, quindi, che:

$m\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$ è il punto di minimo

IL GRAFICO.

