

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

Risoluzione
II Parziale - Compito B
17/12/2003
A. A. 2003 – 2004

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

In primo luogo bisogna ottenere due zeri, secondo quanto richiesto dall'esercizio. È allora conveniente, per effettuare una sola operazione tra le righe della matrice A sostituire la quarta riga con lei stessa alla quale, però si aggiunge la prima riga, cioè:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 + R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Si può ora procedere al calcolo del determinante della nuova matrice ottenuta, utilizzando il metodo di Laplace e sviluppando rispetto alla quarta riga:

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 9 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= +[8 + 9 + 8 - (12 + 4 + 12)] + 9 \cdot [6 - 27 - 4 - (-6 - 12 + 9)] = \\ &= (25 - 28) + 9 \cdot (-25 + 9) = -3 - 144 = -147 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\det A = -147$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Bisogna, in primo luogo, accertarsi che la matrice A ammetta l'inversa, ovvero che il suo determinante sia diverso da zero. Si ha:

$$\text{det}A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -12 - 8 + 0 - (-0 - 16 + 1) = -5 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ esiste A^{-1} , matrice inversa di A

Primo metodo:

a) Calcolo dei complementi algebrici:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1; A_{12} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -9; A_{13} = + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1; A_{22} = + \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -4; A_{23} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2; A_{32} = - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -8; A_{33} = + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 13$$

b) Matrice dei complementi algebrici:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 14 \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -8 & 13 \end{pmatrix}$$

c) Trasposta della matrice dei complementi algebrici:

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -9 & -4 & -8 \\ 14 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

d) Inversa della matrice A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{det}A} \cdot (A^*)^t = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -9 & -4 & -8 \\ 14 & 4 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ -\frac{14}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo:

Dopo aver affiancato alla matrice A la matrice identità dello stesso ordine di A , nel caso in esame quindi del terzo ordine, bisogna effettuare delle operazioni elementari sulle righe o sulle colonne sia di A che della matrice identità, in modo tale da ottenere a sinistra la matrice identità del terzo ordine e a destra l'inversa di A . Ne segue, pertanto:

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 4R_2 + R_1} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 8 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 8R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 9 & 4 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{5}R_1} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{14}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{13}{5} \end{array} \right) = [I_3 | A^{-1}]$$

$$a) y = \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 1}{x^2 - 3}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Trattandosi di una funzione irrazionale il cui indice di radice è dispari ed il radicando è una frazione, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{3} \cong \pm 1,73\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -\sqrt{3}, -\sqrt{3} < x < +\sqrt{3}, +\sqrt{3} < x < +\infty\}$$

Ne segue che per $x = \pm\sqrt{3}$ la funzione presenta due *Asintoti Verticali*.

$$A.V.: x = -\sqrt{3}, x = +\sqrt{3}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 1}{x^2 - 3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \cong -0,69 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$$

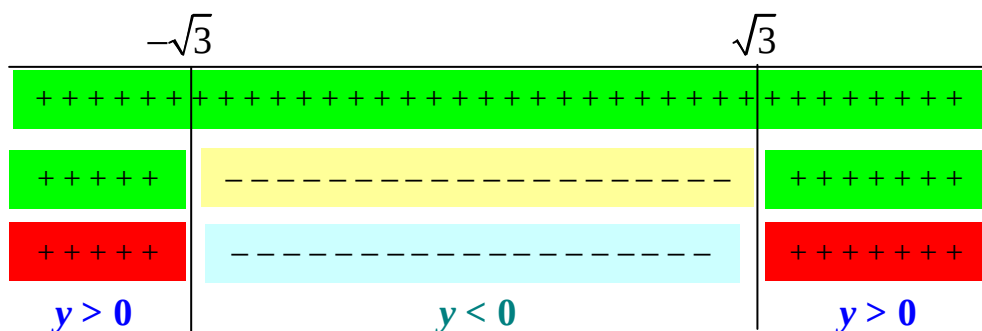
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 1}{x^2 - 3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 1}{x^2 - 3}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{mai} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la funzione non interseca mai l'asse delle x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{3x^2 + 1}{x^2 - 3}} > 0 \Rightarrow \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 1 > 0 \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < -\sqrt{3}, x > +\sqrt{3} \end{cases}$$



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{3x^2+1}{x^2-3}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3x^2+1}{x^2-3} \right)} = \sqrt[3]{3} \approx 1,44$$

$$\text{A.O.: } y = \sqrt[3]{3}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

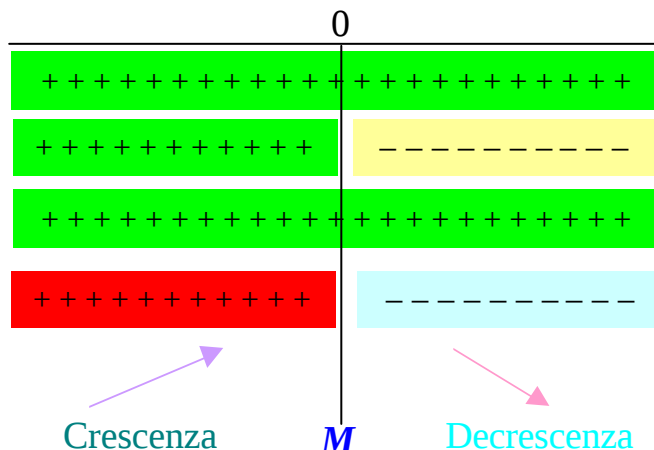
Si ottiene:

$$\begin{aligned} D \left(\sqrt[3]{\frac{3x^2+1}{x^2-3}} \right) &= \frac{D \left(\frac{3x^2+1}{x^2-3} \right)}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{3x^2+1}{x^2-3} \right)^2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{3x^2+1}{x^2-3} \right)^2}} \cdot \frac{6x(x^2-3) - 2x(3x^2+1)}{(x^2-3)^2} = \\ &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{3x^2+1}{x^2-3} \right)^2}} \cdot \frac{6x^3 - 18x - 6x^3 - 2x}{(x^2-3)^2} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{3x^2+1}{x^2-3} \right)^2}} \cdot \frac{-20x}{(x^2-3)^2} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

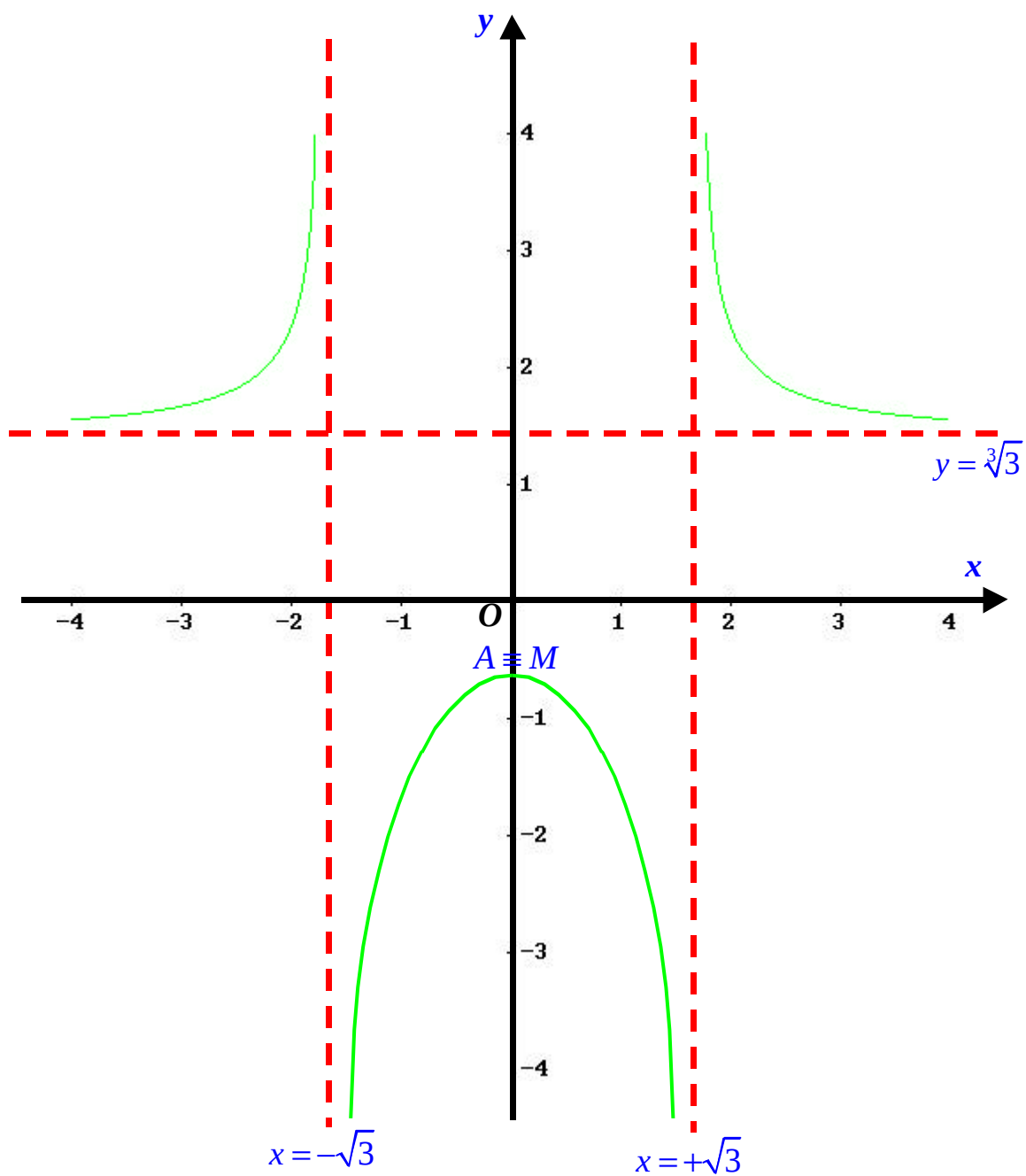
$$\frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{3x^2+1}{x^2-3} \right)^2}} \cdot \frac{-20x}{(x^2-3)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{3x^2+1}{x^2-3} \right)^2}} > 0 \\ \frac{-20x}{(x^2-3)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \sqrt[3]{\left(\frac{3x^2+1}{x^2-3} \right)^2} > 0 \\ -20x > 0 \\ (x^2-3)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ (il radicando è un quadrato e quindi sempre positivo)} \\ x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Dunque il punto di massimo della funzione, ottenuto per $x = 0$, coincide esattamente con il punto A di intersezione della funzione con l'asse y delle ordinate.

IL GRAFICO.

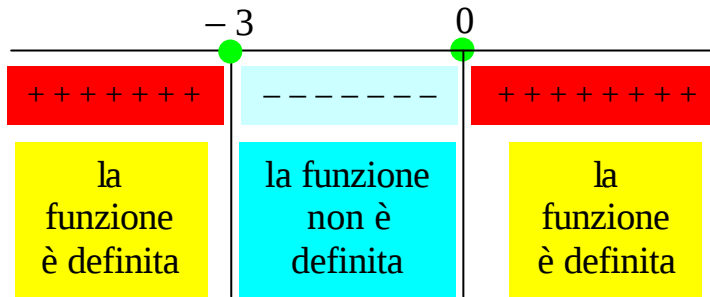


$$b) y = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\begin{aligned} C.E. &= \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 3x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x + 3) \geq 0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x \leq -3, 0 \leq x < +\infty\} \end{aligned}$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0, 1)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{x^2 + 3x} = x - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 3x = (x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 1 \\ x^2 + 3x = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 1 \\ 5x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 1 \\ x = \frac{1}{5} = 0,2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{1}{5}, 0\right)$$

Poiché, però, il punto $x = \frac{1}{5}$ si trova a sinistra di $x = 1$, esso rappresenta proprio uno di quei valori per i quali il sistema non ammette soluzione.

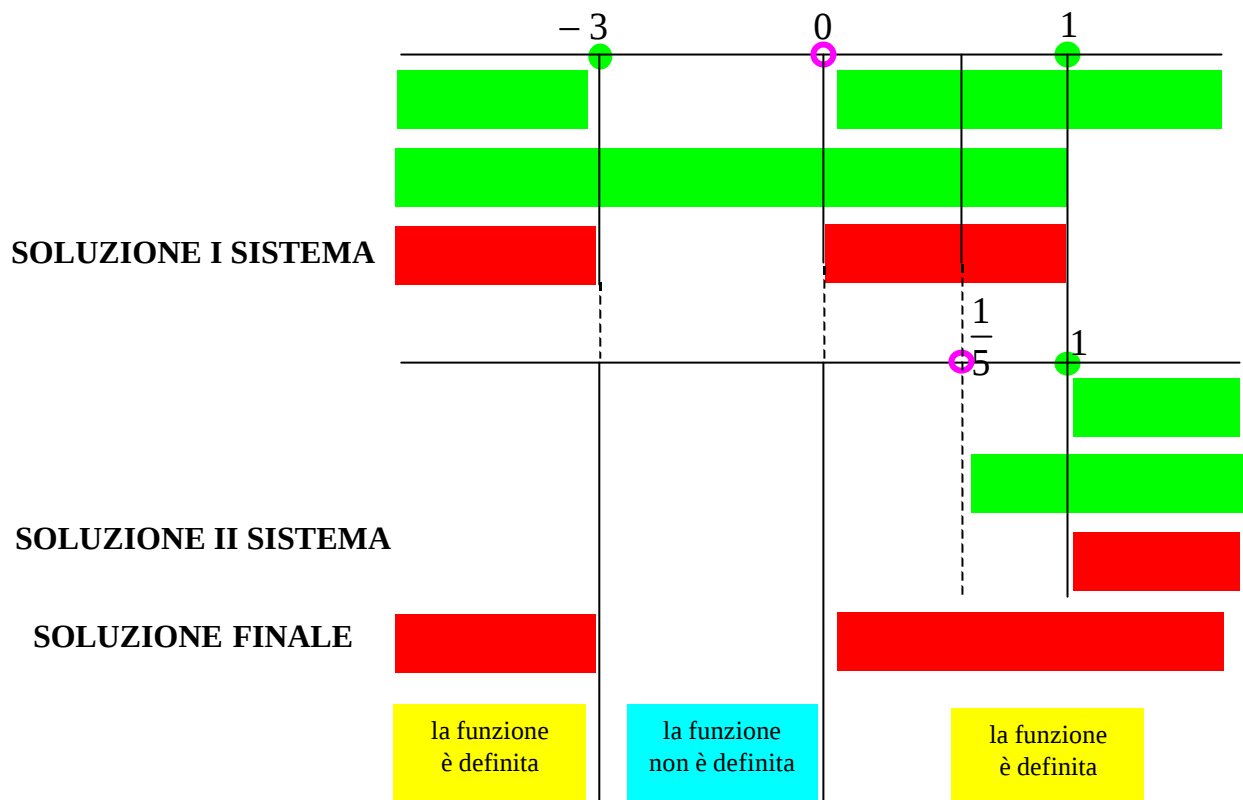
SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Rightarrow -x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x} > x - 1$$

che è equivalente ai seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 3x > (x - 1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + 3x > x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq 1 \\ 5x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq 1 \\ x > \frac{1}{5} \end{cases}$$



Dunque:

$y > 0 \Leftrightarrow -\infty < x \leq -3, 0 \leq x < +\infty$, cioè la funzione data è sempre positiva nel suo campo di esistenza.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x}) = -\infty + \infty \text{ che è una forma indeterminata}$$

Ma allora è possibile calcolare il limite moltiplicando e dividendo la funzione per una stessa quantità, precisamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x+1+\sqrt{x^2+3x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-x+1+\sqrt{x^2+3x})(-x+1-\sqrt{x^2+3x})}{-x+1-\sqrt{x^2+3x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-x+1)^2 - (\sqrt{x^2+3x})^2}{-x+1-\sqrt{x^2+3x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 3x}{-x+1-\sqrt{x^2+3x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-5x+1}{-x+1-\sqrt{x^2+3x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-5x+1}{-x+1-(x^2+3x)^{\frac{1}{2}}} \right) \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-5x}{-x-\sqrt{x^2}} \right) \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-5x}{-2x} \right) = \boxed{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Ne segue che, per $x \rightarrow +\infty$, la $y \rightarrow \frac{5}{2}$: dunque la retta di equazione $y = \frac{5}{2}$ è un *Asintoto Orizzontale Destro* per la funzione.

A.O.: $y = \frac{5}{2} = 2,5$

Si consideri ora il caso in cui la $x \rightarrow -\infty$. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-2+\sqrt{x^2-x}) = +\infty + \infty = +\infty$$

cioè la funzione non ha asintoti orizzontali sinistri.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$\begin{aligned} D(-x+1+\sqrt{x^2+3x}) &= D(-x) + D(1) + D(\sqrt{x^2+3x}) = -1 + 0 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+3x}} \cdot (2x+3) = \\ &= -1 + \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} = \frac{-2\sqrt{x^2+3x} + 2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} \end{aligned}$$

Pertanto bisogna risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\frac{-2\sqrt{x^2+3x} + 2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{x^2+3x} + 2x+3 > 0 \\ 2\sqrt{x^2+3x} > 0, x \neq -3 \text{ e } x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2-x} < 2x+3 \\ \forall x \in C.E. \setminus \{-3, 0\} \end{cases} \Rightarrow$$

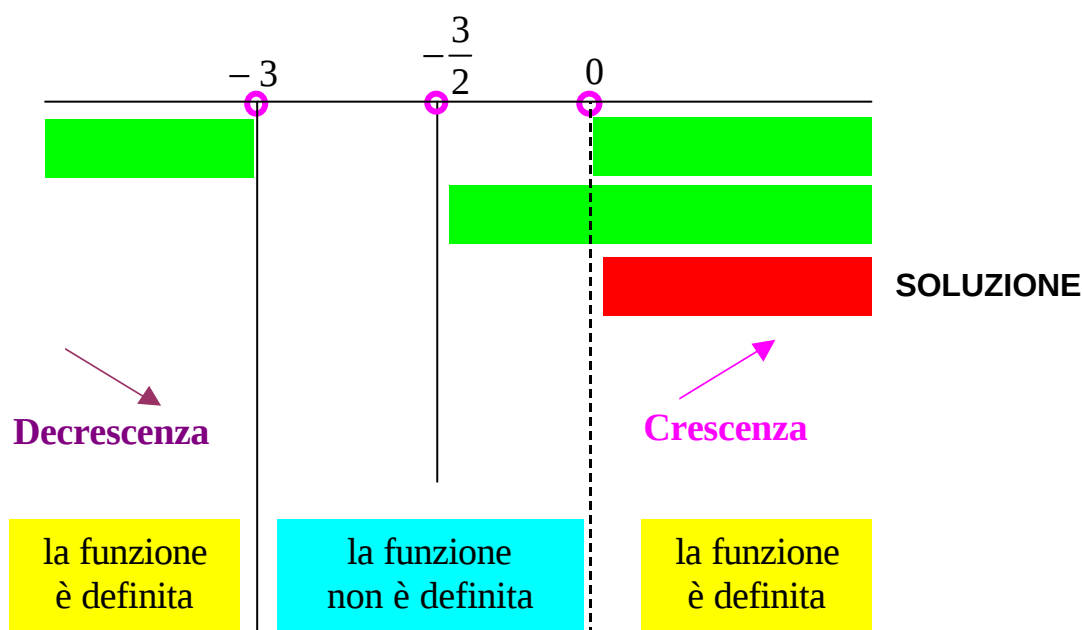
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3x} < x + \frac{3}{2} \\ \forall x \in C.E. \setminus \{-3, 0\} \end{cases}$$

La disequazione irrazionale è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x + \frac{3}{2} > 0 \\ x^2 + 3x < \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq 0 \\ x > -\frac{3}{2} \\ x^2 + 3x < x^2 + 3x + \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq 0 \\ x > -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq 0 \\ x > -\frac{3}{2} \\ \text{sempre} \end{cases}$$

cioè:

$$\frac{-2\sqrt{x^2 + 3x} + 2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -3, x \geq 0 \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ con } x \neq -3 \text{ ed } x \neq 0$$



Dunque la funzione non ha né massimi né minimi.

IL GRAFICO.

