

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

Risoluzione
I Parziale - Compito A
17/12/2003
A. A. 2003 – 2004

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

In primo luogo bisogna ottenere due zeri, secondo quanto richiesto dall'esercizio. È allora conveniente, per effettuare una sola operazione tra le righe della matrice A sostituire la quarta riga con lei stessa alla quale, però si sottrae la seconda riga, cioè:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si può ora procedere al calcolo del determinante della nuova matrice ottenuta, utilizzando il metodo di Laplace e sviluppando rispetto alla quarta riga:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -[36 + 24 + 12 - (96 + 6 + 18)] + [8 + 4 + 2 - (16 + 1 + 4)] = -(72 - 120) + (14 - 21) =$$
$$= -(-48) + (-7) = 48 - 7 = 41$$

Dunque:

$$\text{det } A = 41$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bisogna, in primo luogo, accertarsi che la matrice A ammetta l'inversa, ovvero che il suo determinante sia diverso da zero. Si ha:

$$\text{det}A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 + 0 - (4 - 0 - 4) = -8 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ esiste A^{-1} , matrice inversa di A

Primo metodo:

a) Calcolo dei complementi algebrici:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2; A_{12} = - \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; A_{13} = + \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; A_{22} = + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3; A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 7; A_{33} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

b) Matrice dei complementi algebrici:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ -3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Trasposta della matrice dei complementi algebrici:

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

d) Inversa della matrice A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{det}A} \cdot (A^*)^t = \frac{1}{-8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo:

Dopo aver affiancato alla matrice A la matrice identità dello stesso ordine di A , nel caso in esame quindi del terzo ordine, bisogna effettuare delle operazioni elementari sulle righe o sulle colonne sia di A che della matrice identità, in modo tale da ottenere a sinistra la matrice identità del terzo ordine e a destra l'inversa di A . Ne segue, pertanto:

$$[A|I_3] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_3} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right) = [I_3 | A^{-1}]$$

$$a) y = \sqrt[3]{\frac{4x^2 - 1}{x^2 - 2}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Trattandosi di una funzione irrazionale il cui indice di radice è dispari ed il radicando è una frazione, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{2} \cong \pm 1,41\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -\sqrt{2}, -\sqrt{2} < x < +\sqrt{2}, +\sqrt{2} < x < +\infty\}$$

Ne segue che per $x = \pm\sqrt{2}$ la funzione presenta due *Asintoti Verticali*.

$$A.V.: x = -\sqrt{2}, x = +\sqrt{2}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{4x^2 - 1}{x^2 - 2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cong 0,79 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \sqrt[3]{\frac{4x^2 - 1}{x^2 - 2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt[3]{\frac{4x^2 - 1}{x^2 - 2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\frac{1}{2} = \pm 0,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ e } C = \left(+\frac{1}{2}, 0\right)$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{4x^2 - 1}{x^2 - 2}} > 0 \Rightarrow \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2}, x > +\frac{1}{2} \\ x < -\sqrt{2}, x > +\sqrt{2} \end{cases}$$

	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	
+++++	+++++	-----	+++++	+++++	
+++++	-----	-----	-----	+++++	
+++++	-----	+++++	-----	+++++	
$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$	

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{4x^2-1}{x^2-2}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{4x^2-1}{x^2-2} \right)} = \sqrt[3]{4} \approx 1,58$$

$$\text{A.O.: } y = \sqrt[3]{4}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

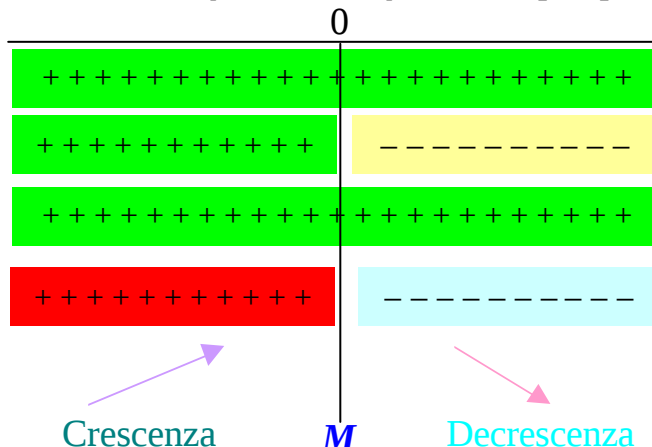
Si ottiene:

$$\begin{aligned} D \left(\sqrt[3]{\frac{4x^2-1}{x^2-2}} \right) &= \frac{D \left(\frac{4x^2-1}{x^2-2} \right)}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{4x^2-1}{x^2-2} \right)^2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{4x^2-1}{x^2-2} \right)^2}} \cdot \frac{8x(x^2-2) - 2x(4x^2-1)}{(x^2-2)^2} = \\ &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{4x^2-1}{x^2-2} \right)^2}} \cdot \frac{8x^3 - 16x - 8x^3 + 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{4x^2-1}{x^2-2} \right)^2}} \cdot \frac{-14x}{(x^2-2)^2} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

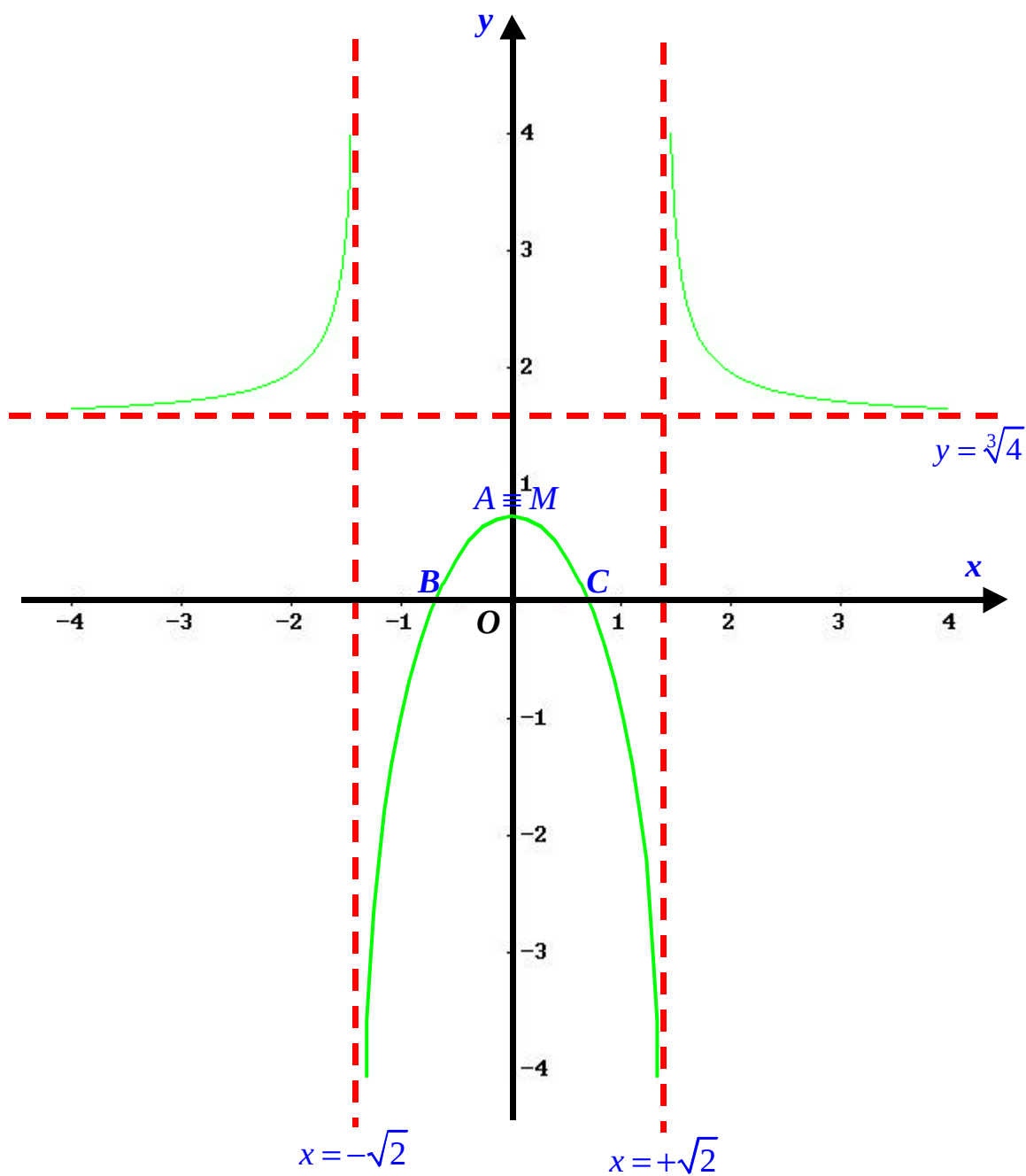
$$\frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{4x^2-1}{x^2-2} \right)^2}} \cdot \frac{-14x}{(x^2-2)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{4x^2-1}{x^2-2} \right)^2}} > 0 \\ \frac{-14x}{(x^2-2)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \sqrt[3]{\left(\frac{4x^2-1}{x^2-2} \right)^2} > 0 \\ -14x > 0 \\ (x^2-2)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ (il radicando è un quadrato e quindi sempre positivo)} \\ x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Dunque il punto di massimo della funzione, ottenuto per $x = 0$, coincide esattamente con il punto A di intersezione della funzione con l'asse y delle ordinate.

IL GRAFICO.

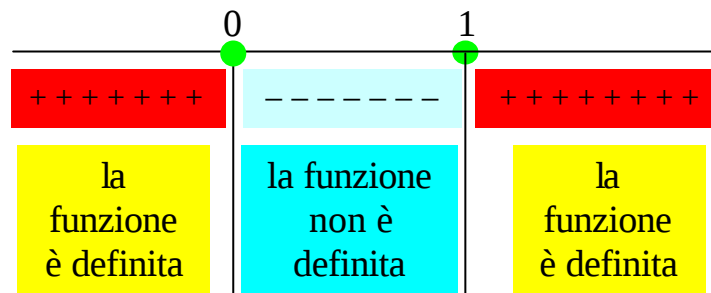


$$b) y = -x - 2 + \sqrt{x^2 - x}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(x - 1) \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x \leq 0, 1 \leq x < +\infty\}$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -x - 2 + \sqrt{x^2 - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -2)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = -x - 2 + \sqrt{x^2 - x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x - 2 + \sqrt{x^2 - x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{x^2 - x} = x + 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + 2 \geq 0 \\ x^2 - x = (x + 2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -2 \\ x^2 - x = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -2 \\ 5x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -2 \\ x = -\frac{4}{5} = -0,8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$$

Poiché il punto $x = -\frac{4}{5}$ si trova a destra di $x = -2$, esso rappresenta proprio uno di quei valori per i quali il sistema ammette soluzione.

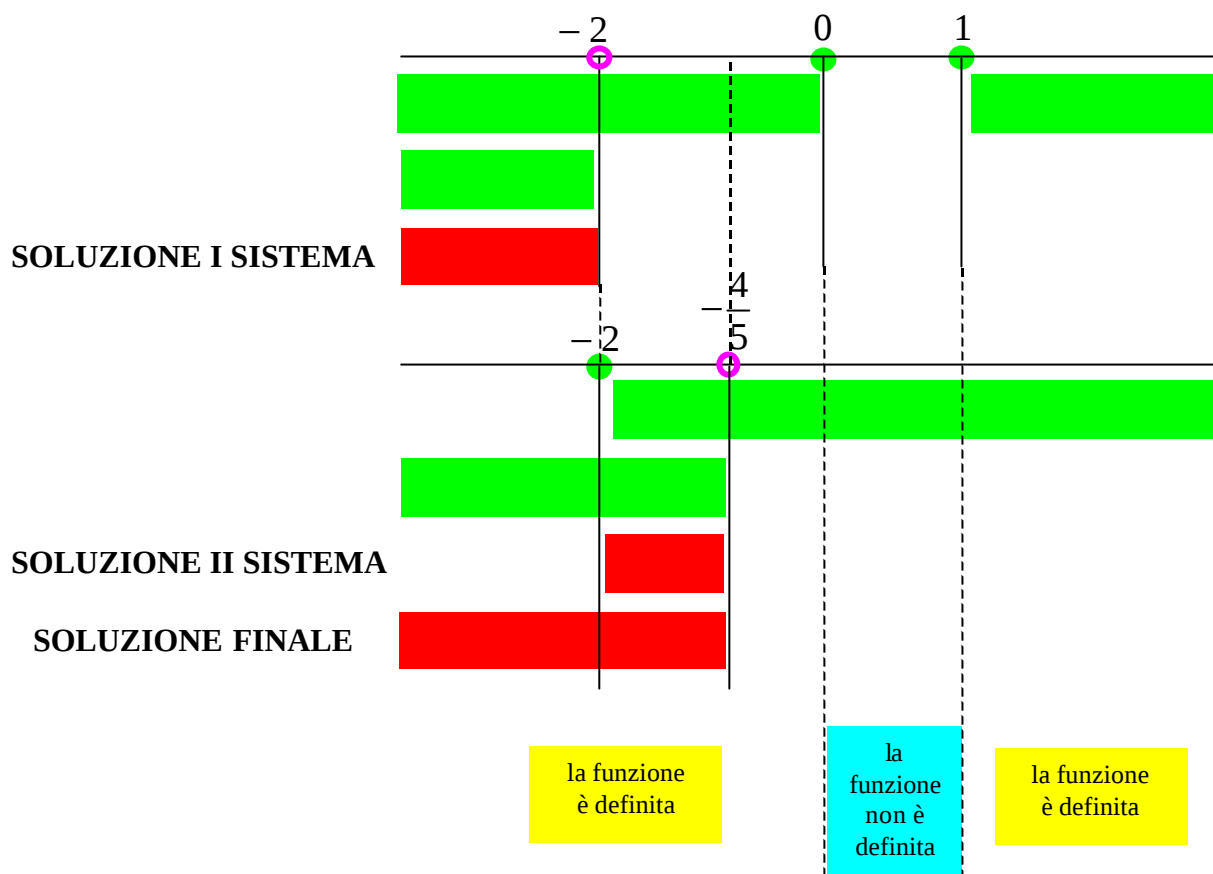
SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Rightarrow -x - 2 + \sqrt{x^2 - x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x} > x + 2$$

che è equivalente ai seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x + 2 < 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x^2 - x > (x + 2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0, x \geq 1 \\ x < -2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - x > x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq 0, x \geq 1 \\ x < -2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq -2 \\ 5x + 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0, x \geq 1 \\ x < -2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq -2 \\ x < -\frac{4}{5} \end{cases}$$



Dunque:

$$y > 0 \Leftrightarrow -\infty < x < -\frac{4}{5}$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 2 + \sqrt{x^2 - x}) = -\infty + \infty \text{ che è una forma indeterminata}$$

Ma allora è possibile calcolare il limite moltiplicando e dividendo la funzione per una stessa quantità, precisamente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - 2 + \sqrt{x^2 - x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-x - 2 + \sqrt{x^2 - x})(-x - 2 - \sqrt{x^2 - x})}{-x - 2 - \sqrt{x^2 - x}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-x-2)^2 - (\sqrt{x^2-x})^2}{-x-2-\sqrt{x^2-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+4x+4-x^2+x}{-x-2-\sqrt{x^2-x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+4}{-x-2-\sqrt{x^2-x}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+4}{-x-2-(x^2-x)^{\frac{1}{2}}} \right) \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{-x-\sqrt{x^2}} \right) \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x}{-2x} \right) = -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Ne segue che, per $x \rightarrow +\infty$, la $y \rightarrow -\frac{5}{2}$: dunque la retta di equazione $y = -\frac{5}{2}$ è un *Asintoto Orizzontale Destro* per la funzione.

$$\text{A.O.: } y = -\frac{5}{2} = -2,5$$

Si consideri ora il caso in cui la $x \rightarrow -\infty$. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x-2+\sqrt{x^2-x}) = +\infty + \infty = +\infty$$

cioè la funzione non ha asintoti orizzontali sinistri.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$\begin{aligned}
D(-x-2+\sqrt{x^2-x}) &= D(-x) + D(-2) + D(\sqrt{x^2-x}) = -1 + 0 + \frac{1}{2\sqrt{x^2-x}} \cdot (2x-1) = \\
&= -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} = \frac{-2\sqrt{x^2-x} + 2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}
\end{aligned}$$

Pertanto bisogna risolvere la seguente disequazione irrazionale:

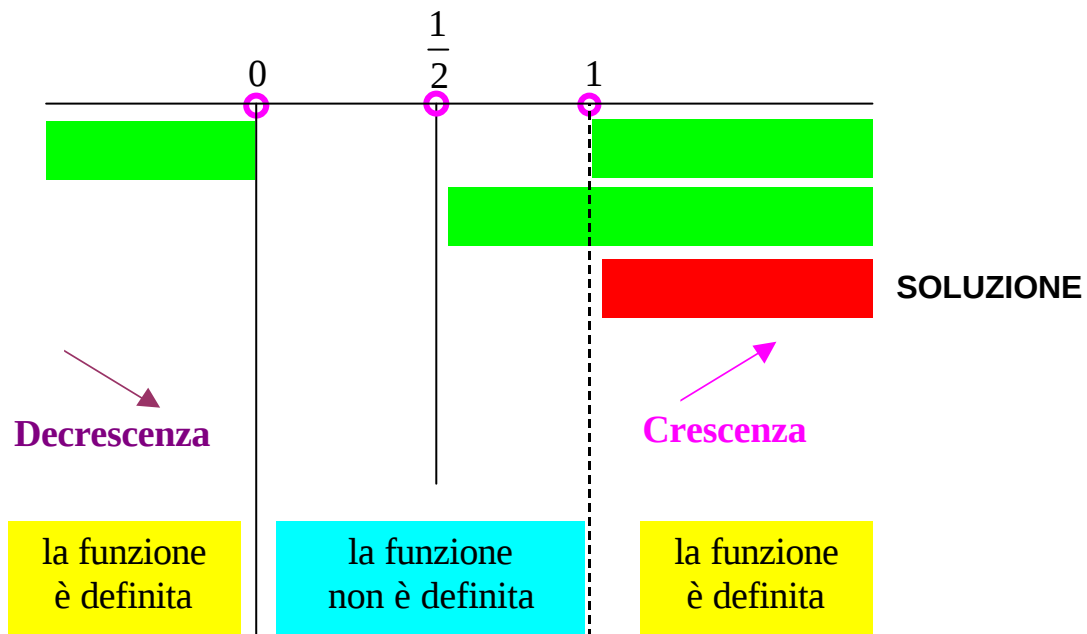
$$\begin{aligned}
\frac{-2\sqrt{x^2-x} + 2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} > 0 &\Rightarrow \begin{cases} -2\sqrt{x^2-x} + 2x-1 > 0 \\ 2\sqrt{x^2-x} > 0, x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2-x} < 2x-1 \\ \forall x \in C.E. \setminus \{0,1\} \end{cases} \Rightarrow \\
\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x} < x - \frac{1}{2} \\ \forall x \in C.E. \setminus \{0,1\} \end{cases}
\end{aligned}$$

La disequazione irrazionale è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x - \frac{1}{2} > 0 \\ x^2 - x < \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0, x \geq 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ x^2 - x < x^2 - x + \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0, x \geq 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0, x \geq 1 \\ x > \frac{1}{2} \\ \text{sempre} \end{cases}$$

cioè:

$$\frac{-2\sqrt{x^2 - x} + 2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0, x \geq 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \text{ con } x \neq 0 \text{ ed } x \neq 1$$



Dunque la funzione non ha né massimi né minimi

IL GRAFICO.

