

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA BANCARIA FINANZIARIA ED ASSICURATIVA

Risoluzione
II Parziale - Compito C
17/12/2003
A. A. 2003 – 2004

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

In primo luogo bisogna ottenere due zeri, secondo quanto richiesto dall'esercizio. È allora conveniente, per effettuare una sola operazione tra le righe della matrice A sostituire la quarta riga con lei stessa alla quale, però si sottrae la prima riga, cioè:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Si può ora procedere al calcolo del determinante della nuova matrice ottenuta, utilizzando il metodo di Laplace e sviluppando rispetto alla quarta riga:

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= (-2) \cdot [2 + 4 + 8 - (8 - 4 - 2)] + (-5) \cdot [6 + 4 - 8 - (-6 + 8 + 4)] = \\ &= (-2) \cdot (14 - 2) + (-5) \cdot (2 - 6) = -24 + 20 = -4 \end{aligned}$$

Dunque:

$$\det A = -4$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bisogna, in primo luogo, accertarsi che la matrice A ammetta l'inversa, ovvero che il suo determinante sia diverso da zero. Si ha:

$$\text{det}A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 0 + 1 - (-4 + 6 - 0) = 3 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ esiste A^{-1} , matrice inversa di A

Primo metodo:

a) Calcolo dei complementi algebrici:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1; A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 14; A_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1; A_{22} = + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 8; A_{23} = - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1; A_{32} = - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5; A_{33} = + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

b) Matrice dei complementi algebrici:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Trasposta della matrice dei complementi algebrici:

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & 8 & -5 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

d) Inversa della matrice A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\text{det}A} \cdot (A^*)^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & 8 & -5 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{14}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Secondo metodo:

Dopo aver affiancato alla matrice A la matrice identità dello stesso ordine di A , nel caso in esame quindi del terzo ordine, bisogna effettuare delle operazioni elementari sulle righe o sulle colonne sia di A che della matrice identità, in modo tale da ottenere a sinistra la matrice identità del terzo ordine e a destra l'inversa di A . Ne segue, pertanto:

$$\begin{aligned}
 [A|I_3] &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow 2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_3 - R_2} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow -\frac{1}{3}R_3} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + 5R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{28}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow -\frac{1}{2}R_1} \\
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{array} \right) = [I_3 | A^{-1}]
 \end{aligned}$$

$$a) y = \sqrt[3]{\frac{1-2x^2}{x^2+5}}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Trattandosi di una funzione irrazionale il cui indice di radice è dispari ed il radicando è una frazione, risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty\}$$

Ne segue che la funzione non ha *Asintoti Verticali*.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x=0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{1-2x^2}{x^2+5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y = \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cong 0,58 \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 0 = \sqrt[3]{\frac{1-2x^2}{x^2+5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \sqrt[3]{\frac{1-2x^2}{x^2+5}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \frac{1-2x^2}{x^2+5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 1-2x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \cong 0,70 \end{cases} \Rightarrow B = \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) \text{ e } C = \left(+\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right)$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1-2x^2}{x^2+5}} > 0 \Rightarrow \frac{1-2x^2}{x^2+5} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x^2 > 0 \\ x^2+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{\frac{1}{2}} < x < +\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$
-----	+++++	-----
+++++	+++++	+++++
-----	+++++	-----
$y < 0$	$y > 0$	$y < 0$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1-2x^2}{x^2+5}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1-2x^2}{x^2+5} \right)} = \sqrt[3]{-2} \approx -1,25$$

$$\text{A.O.: } y = -\sqrt[3]{2}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

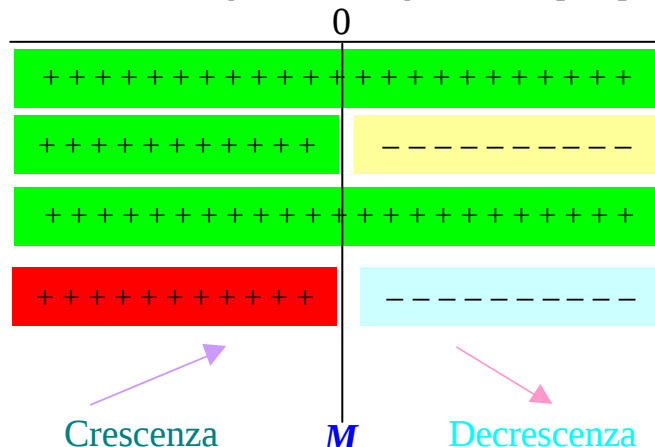
Si ottiene:

$$\begin{aligned} D \left(\sqrt[3]{\frac{1-2x^2}{x^2+5}} \right) &= \frac{D \left(\frac{1-2x^2}{x^2+5} \right)}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1-2x^2}{x^2+5} \right)^2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1-2x^2}{x^2+5} \right)^2}} \cdot \frac{-4x(x^2+5) - 2x(1-2x^2)}{(x^2+5)^2} = \\ &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1-2x^2}{x^2+5} \right)^2}} \cdot \frac{-4x^3 - 20x - 2x + 4x^3}{(x^2+5)^2} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1-2x^2}{x^2+5} \right)^2}} \cdot \frac{-22x}{(x^2+5)^2} \end{aligned}$$

da cui si ricava:

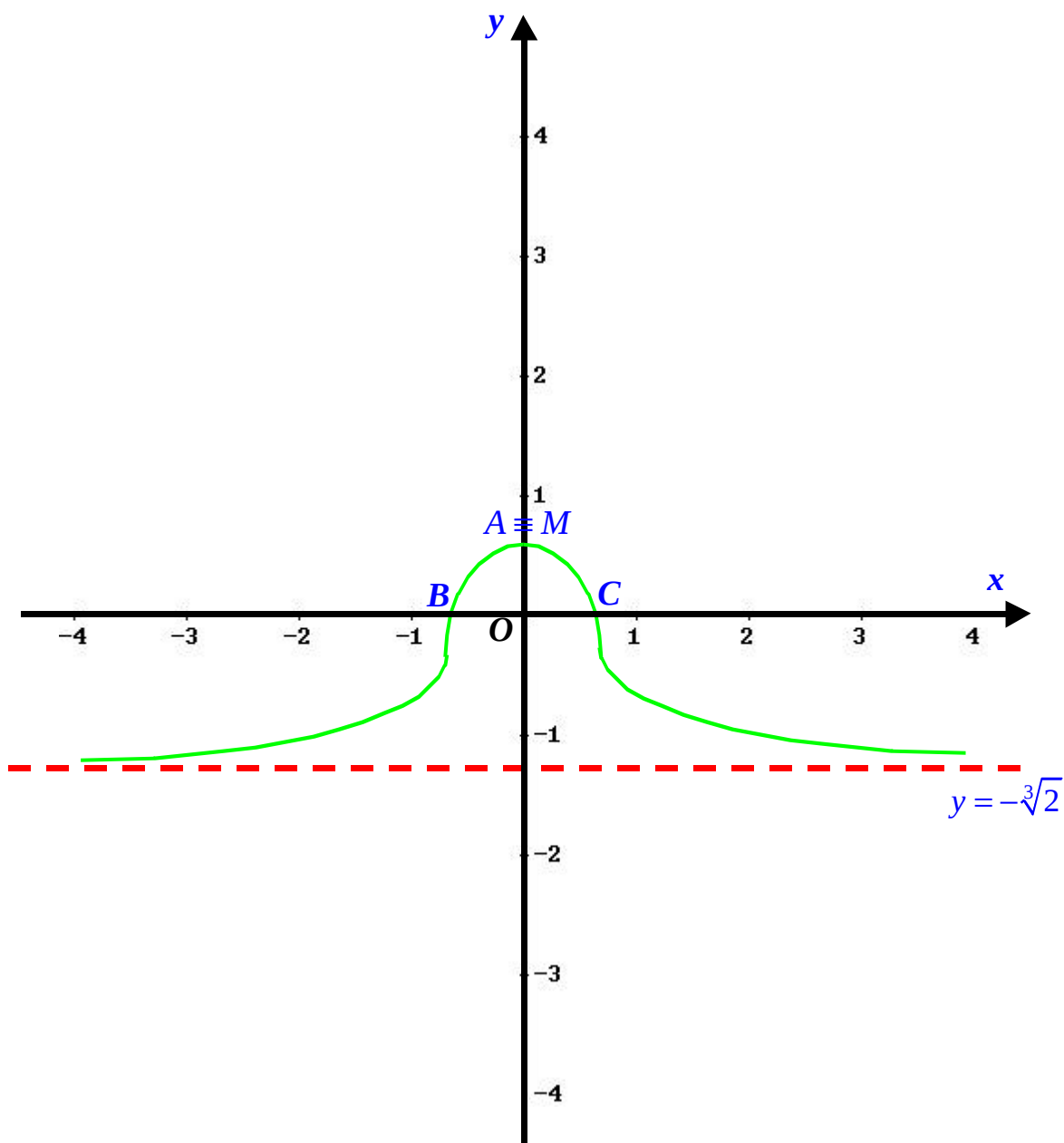
$$\frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1-2x^2}{x^2+5} \right)^2}} \cdot \frac{-22x}{(x^2+5)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1-2x^2}{x^2+5} \right)^2}} > 0 \\ \frac{-22x}{(x^2+5)^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \sqrt[3]{\left(\frac{1-2x^2}{x^2+5} \right)^2} > 0 \\ -22x > 0 \\ (x^2+5)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ (il radicando è un quadrato e quindi sempre positivo)} \\ x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Dunque il punto di massimo della funzione, ottenuto per $x = 0$, coincide esattamente con il punto A di intersezione della funzione con l'asse y delle ordinate.

IL GRAFICO.

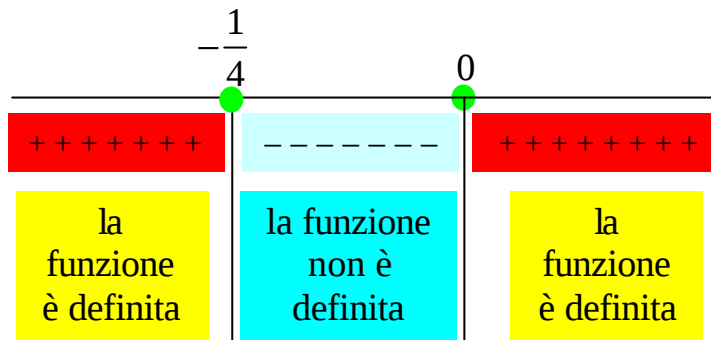


$$b) y = -2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x}$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R}: 4x^2 + x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x(4x + 1) \geq 0\} = \\ = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -\frac{1}{4}, 0 < x < +\infty \right\}$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow A = (0, -3)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = -2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{4x^2 + x} = 2x + 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x + 3 \geq 0 \\ 4x^2 + x = (2x + 3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x^2 + x = 4x^2 + 12x + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -\frac{3}{2} \\ 11x + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x \geq -\frac{3}{2} = -1,5 \\ x = -\frac{9}{11} \cong -0,81 \end{cases} \Rightarrow B = \left(-\frac{9}{11}, 0 \right)$$

Poiché, però, il punto $x = -\frac{9}{11}$ si trova a destra di $x = -\frac{3}{2}$, esso rappresenta proprio uno di quei valori per i quali il sistema ammette soluzione.

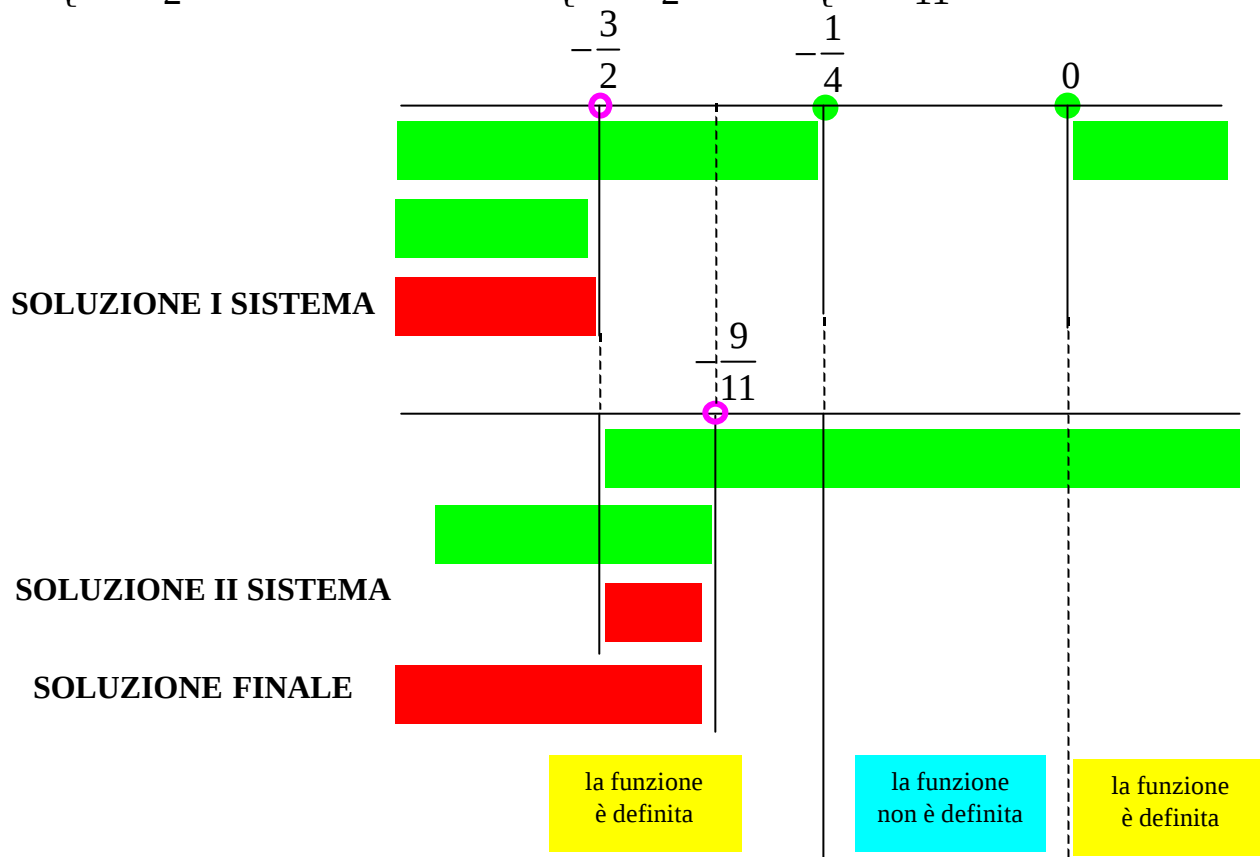
SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Rightarrow -2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x} > 0 \Rightarrow \sqrt{4x^2 + x} > 2x + 3$$

che è equivalente ai seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} 4x^2 + x \geq 0 \\ 2x + 3 < 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 4x^2 + x > (2x + 3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{4}, x \geq 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x^2 + x > 4x^2 + 12x + 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{4}, x \geq 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 11x + 9 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{4}, x \geq 0 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x < -\frac{9}{11} \end{cases}$$



Dunque:

$$y > 0 \Leftrightarrow -\infty < x < -\frac{9}{11}$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x}) = -\infty + \infty \text{ che è una forma indeterminata}$$

Ma allora è possibile calcolare il limite moltiplicando e dividendo la funzione per una stessa quantità, precisamente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x})(-2x - 3 - \sqrt{4x^2 + x})}{-2x - 3 - \sqrt{4x^2 + x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-2x - 3)^2 - (\sqrt{4x^2 + x})^2}{-2x - 3 - \sqrt{4x^2 + x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 - x}{-2x - 3 - \sqrt{4x^2 + x}} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{11x + 9}{-2x - 3 - \sqrt{4x^2 + x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{11x + 9}{-2x - 3 - (4x^2 + x)^{\frac{1}{2}}} \right) \cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{11x}{-2x - \sqrt{4x^2}} \right) \cong \\ &\cong \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{11x}{-4x} \right) = -\frac{11}{4} \end{aligned}$$

Ne segue che, per $x \rightarrow +\infty$, la $y \rightarrow -\frac{11}{4}$: dunque la retta di equazione $y = -\frac{11}{4}$ è un *Asintoto Orizzontale Destro* per la funzione.

$$\text{A.O.: } y = -\frac{11}{4} = 2,75$$

Si consideri ora il caso in cui la $x \rightarrow -\infty$. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x}) = +\infty + \infty = +\infty$$

cioè la funzione non ha asintoti orizzontali sinistri.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$$D(-2x - 3 + \sqrt{4x^2 + x}) = D(-2x) + D(-3) + D(\sqrt{4x^2 + x}) = -2 + 0 + \frac{1}{2\sqrt{4x^2 + x}} \cdot (8x + 1) =$$

$$= -2 + \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}} = \frac{-4\sqrt{4x^2+x} + 8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}}$$

Pertanto bisogna risolvere la seguente disequazione irrazionale:

$$\frac{-4\sqrt{4x^2+x} + 8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -4\sqrt{4x^2+x} + 8x+1 > 0 \\ 2\sqrt{4x^2+x} > 0, x \neq -\frac{1}{4} \text{ e } x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\sqrt{4x^2+x} < 8x+1 \\ \forall x \in C.E. \setminus \left\{-\frac{1}{4}, 0\right\} \end{cases} \Rightarrow$$

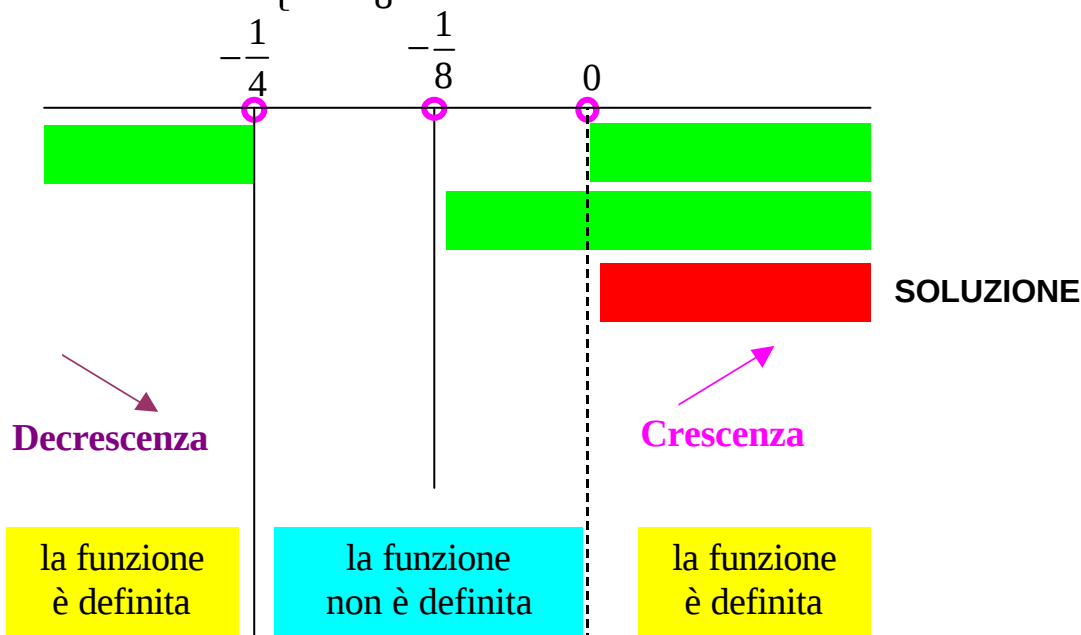
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{4x^2+x} < 2x + \frac{1}{4} \\ \forall x \in C.E. \setminus \left\{-\frac{1}{4}, 0\right\} \end{cases}$$

La disequazione irrazionale è equivalente al seguente sistema:

$$\begin{cases} 4x^2+x \geq 0 \\ 2x + \frac{1}{4} > 0 \\ 4x^2+x < \left(2x + \frac{1}{4}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{4}, x \geq 0 \\ x > -\frac{1}{8} \\ 4x^2+x < 4x^2+x + \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{4}, x \geq 0 \\ x > -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{4}, x \geq 0 \\ x > -\frac{1}{8} \\ \text{sempre} \end{cases}$$

cioè:

$$\frac{-4\sqrt{4x^2+x} + 8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -\frac{1}{4} = -0,25; x \geq 0 \\ x > -\frac{1}{8} = -0,125 \end{cases} \text{ con } x \neq -\frac{1}{4} \text{ ed } x \neq 0$$



Dunque la funzione non ha né massimi né minimi.

IL GRAFICO.

