

Un'applicazione del calcolo binario: il gioco del Nim

Franco Eugeni[♥], Raffaele Mascella[♦], Daniela Tondini^{*}

Sunto: Si presenta il gioco combinatorico del Nim, rappresentante principale della classe dei giochi imparziali. La teoria che lo caratterizza, anche nelle varianti proposte, è legata alla numerazione binaria di cui costituisce un buon mediatore ludico e didattico.

Parole Chiave: Teoria dei giochi, giochi imparziali, numerazione binaria.

1. Introduzione

Una delle problematiche più ricorrenti nella didattica è incentrata nella ricerca di motivazioni e nella costruzione di percorsi ludici su cui impennare la fruizione di concetti e lo sviluppo delle capacità intellettive dei discenti. Una attraente e ricreativa area della matematica che racchiude idee e nozioni utilizzabili a questo scopo è costituita dalla teoria dei giochi. In questo ambito rientrano i cosiddetti “giochi combinatorici” che si caratterizzano per avere, tra gli obiettivi primari, quello della ricerca di una strategia vincente, senza situazioni di incertezza e calcoli probabilistici. E’ nostra convinzione che alcuni di questi giochi, e quelli che proponiamo in particolare, possano essere molto utili come terreno di attrazione del ragionamento matematico e del pensiero informatico.

Questo articolo è una sintesi dei lavori che appaiono in bibliografia, alcuni dei quali reperibili su Internet. Le dimostrazioni dei teoremi sono note, tuttavia le prove da noi presentate sono originali e si

[♥] Dipartimento di Metodi per l'Economia ed il Territorio (M.E.T.), Università di Teramo, Coste S. Agostino, 64100 Teramo; e-mail: eugenif@tin.it

[♦] Dip. M.E.T., Università di Teramo; e-mail: rmascella@tin.it

^{*} Dip. M.E.T., Università di Teramo; e-mail: dtondini@yahoo.it

differenziano dalle classiche.

Ricordiamo che un gioco è *combinatorio* se valgono le seguenti:

- a) ci sono due giocatori;
 - b) c'è un insieme, generalmente finito, delle possibili posizioni che caratterizzano completamente il gioco;
 - c) le regole del gioco specificano per entrambi i giocatori e per ogni posizione quali mosse sono ammesse. Se le regole non fanno distinzioni fra i due giocatori, ovvero entrambi hanno le stesse mosse a partire da una qualsiasi posizione, il gioco si dice *imparziale*; in caso contrario il gioco si dice *di parte* (partizan);
 - d) i giocatori muovono alternativamente;
 - e) il gioco termina quando si raggiunge una posizione che non permette alcuna mossa al giocatore di turno. Sotto le regole di gioco *normale* (o classico) vince il giocatore che effettua l'ultima mossa; sotto le regole di gioco *inverso* (ovvero a dispetto) il giocatore che effettua l'ultima mossa perde la partita.
- In molti giochi è possibile avere situazioni finali senza vincitori, ovvero partite “patte”. Per evitare ciò, aggiungiamo la condizione:
- f) il gioco termina dopo un numero finito di mosse, indipendentemente da come è stato giocato e dall'ordine di tali mosse;
 - g) entrambi i giocatori conoscono come si sta svolgendo il gioco, ovvero l'informazione è “completa”;
 - h) non ci sono mosse casuali.

Osservazione. Nei giochi combinatorici, dunque, non sono ammesse mosse simultanee, nascoste o casuali (come il lancio di dadi).

2. I giochi imparziali

Denotiamo con Ω l'insieme delle posizioni p (o delle configurazioni) che un gioco imparziale può assumere.

Ogni posizione in Ω può essere classificata in questo modo: è di tipo P (oppure *P-posizione*) se la posizione è a vantaggio del giocatore precedente ovvero del giocatore che ha lasciato quella posizione al suo avversario; è di tipo N (oppure *N-posizione*) se, invece, è a vantaggio

del prossimo giocatore che deve effettuare la mossa.¹ Nel seguito chiameremo le P-posizioni anche “vincenti” e le N-posizioni anche “perdenti”.

Tale classificazione può avvenire, in pratica, attraverso una procedura che parte dalle posizioni terminali. Se la partita è giocata con regole *normali* ciò avviene nel seguente modo:

Passo 1: ogni posizione terminale è una P-posizione;

Passo 2: trovare ogni posizione che può raggiungere in una mossa una P-posizione (già determinata); queste saranno N-posizioni;

Passo 3: trovare le posizioni in cui ogni mossa conduce ad una posizione di tipo N; queste saranno P-posizioni;

Passo 4: se non si trovano P-posizioni al passo 3 allora ci si ferma, altrimenti si ritorna al passo 2.

Pertanto le posizioni di tipo P, N in un gioco imparziale classico sono definite ricorsivamente dai seguenti enunciati:

- (1) Tutte le posizioni terminali sono P-posizioni;
- (2) da ogni N-posizione almeno una mossa porta ad una P-posizione;
- (3) da ogni P-posizione ogni mossa conduce ad una N-posizione.

La classificazione in posizioni di tipo P o N può avvenire anche a livello insiemistico. Se $p \in \Omega$ è una qualunque posizione, indichiamo con $F(p)$ l'insieme delle posizioni raggiungibili, a partire da p , in una singola mossa, dunque $F(p) \subset \Omega$. Allora possiamo suddividere Ω nei seguenti insiemi complementari:

- l'insieme delle P-posizioni $P = \{p \mid F(p) \subset N\};$
 - l'insieme delle N-posizioni $N = \{p \mid F(p) \cap P \neq \emptyset\}.$
- (4)

Osservazione. Se la partita è giocata secondo regole a dispetto, gli enunciati ricorsivi (1), (2) e (3) sono modificati nel seguente modo:

- (1') Tutte le posizioni terminali sono N-posizioni;
- (2') da ogni P-posizione ogni mossa conduce ad una N-posizione;
- (3') da ogni N-posizione almeno una mossa porta ad una P-posizione.

¹ Le notazioni P, N derivano, rispettivamente, dai termini *Previous* e *Next*

Osservazione. E' facile provare che la strategia di muovere ad una posizione di tipo P è vincente (nel senso che conduce alla vittoria indipendentemente dalle mosse dell'altro giocatore). Da una posizione di tipo P il nostro avversario può muovere soltanto verso una posizione di tipo N e così, al prossimo turno, possiamo muovere ancora verso una P-posizione. Iterando questo ragionamento il gioco giunge, in un numero finito di mosse, ad una posizione terminale che:

- nel gioco classico è una P-posizione, che è raggiungibile solo da noi, per cui noi vinciamo;
- nel gioco a dispetto è una N-posizione, e dunque raggiunta dal nostro avversario, che così è perdente.

Ricordiamo, infine, che la teoria completa dei giochi imparziali è stata sviluppata nel 1930 da R.P. Sprague e P.M. Grundy. Il Nim, in questo ambito, gioca un ruolo primario: con un'opportuna classificazione (usando la cosiddetta *funzione di Grundy*) ogni posizione in un qualunque gioco imparziale è equivalente ad una posizione del Nim.

2. Il gioco del Nim classico

Il gioco del Nim² è uno dei giochi matematici più vecchi e più intriganti oggi conosciuti. Il nome e la teoria completa del gioco furono inventate nel 1902 da C. L. Bouton [1] che lo identificò, inizialmente, con il millenario gioco cinese del "Fan-Tan".³

Sono dati n insiemi (o mucchietti di fiammiferi) $A_1, A_2, \dots, A_n$ di cardinalità $|A_i| = a_i$, con $a_i \geq 0$, per $i = 1, 2, \dots, n$.

In ogni mossa il giocatore di turno deve scegliere uno dei mucchietti (che non sia già vuoto) e rimuovere da esso un certo numero di fiammiferi, da un minimo di uno fino all'intero mucchietto. Nella versione classica vince il giocatore che rimuove l'ultimo fiammifero.

Una posizione del gioco è data dalla n -upla $p = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ formata dalle quantità dei vari mucchietti. Si noti che, dopo ogni mossa, la

² Il nome del gioco deriva dal verbo tedesco "nehmen" (la cui forma singolare imperativa è "nimm"), ovvero "prendere"

³ Pare che lo stesso autore, in seguito, riconobbe l'errata identificazione

posizione si modifica in base alla scelta fatta dal giocatore.

Appare evidente, facendo un'analisi preliminare sul gioco, che esiste una sola posizione terminale, ovvero $(0, 0, \dots, 0)$, che nel gioco classico è una P-posizione. Se il gioco del Nim ha un solo mucchietto, dunque, la soluzione è banale: basta semplicemente rimuovere l'intero mucchietto. Così, ogni posizione con esattamente un mucchietto non vuoto $(0, \dots, 0, x)$, con $x > 0$, è una N-posizione. Nel caso di due mucchietti non vuoti, ovvero $(0, \dots, 0, x, y)$ con $x, y \neq 0$, si può facilmente verificare che deve valere $x = y$. Se i mucchietti non vuoti sono almeno tre, invece, la situazione si fa più complicata.

E' ben noto che ogni numero intero non negativo x ha un'unica rappresentazione binaria del tipo

$$x = x_m \cdot 2^m + x_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \dots + x_1 \cdot 2^1 + x_0 \cdot 2^0 = (x_m x_{m-1} \dots x_1 x_0)_2 \quad (5)$$

per qualche m , dove ogni $x_i \in \{0, 1\}$.

Definizione. La *somma-Nim* " $\oplus$ " di due interi non negativi x, y è la loro addizione senza riporto in rappresentazione binaria. Dunque, fissati $x = (x_m \dots x_0)_2$ ed $y = (y_m \dots y_0)_2$, la somma-Nim è il numero $z = (z_m \dots z_0)_2 = (x_m \dots x_0)_2 \oplus (y_m \dots y_0)_2$ così calcolato:

$$z_k = x_k + y_k \pmod{2} \quad \text{per } k = 0, 1, \dots, m \quad (6)$$

Se i due numeri $x = (x_m \dots x_0)_2$ ed $y = (y_r \dots y_0)_2$ hanno rappresentazioni binarie di lunghezza diversa allora la somma-Nim si effettua termine a termine assegnando valore nullo ai termini mancanti.

L'operazione che si effettua su ciascuno degli m termini binari è equivalente all'operazione di Or Esclusivo (XOR), anche nota come addizione in $GF(2)$, caratterizzata dalla tabella a fianco.

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Si provano facilmente, infine, alcune proprietà della somma-Nim: essa è associativa, commutativa, ha elemento neutro, ogni numero ha il suo inverso (il numero stesso), per cui vale la legge di cancellazione:

$$x \oplus y = x \oplus y' \text{ implica } y = y'.$$

Teorema 1. (di Bouton) Una posizione $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nel gioco del Nim classico è una P-posizione se e solo se la somma-Nim dei suoi

componenti è nulla, cioè $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n = 0$.

Dim. Denotiamo con A l'insieme delle posizioni aventi somma-Nim nulla e con B l'insieme complementare delle posizioni con somma-Nim positiva. Vogliamo provare che A e B coincidono con gli insiemi P, N definiti in (4) ovvero soddisfano alle relazioni (1), (2), (3).

Proviamo (1). L'unica posizione terminale nel Nim è $(0, 0, \dots, 0)$ ed è compresa in A in quanto la sua somma-Nim è banalmente nulla.

Proviamo (2). Eseguendo la somma-Nim di una posizione in B mediante un'addizione a colonna delle n rappresentazioni binarie, si ottiene una somma-Nim non nulla $(s_h \dots s_0)_2$, dove $s_h = 1$. Guardiamo, allora, alla colonna che produce l'"1" più significativo nella somma-Nim, ovvero la colonna h . Ora scegliamo uno qualsiasi degli n numeri binari che hanno un "1" in quella colonna, diciamo $a_i = (a_{im} \dots a_{i0})$, e modifichiamo tale "1" in "0", in modo da produrre sulla colonna una somma nulla. Infine modifichiamo lo stesso numero binario in corrispondenza di quelle colonne che hanno un numero dispari di "1" (o, analogamente, degli "1" nella somma-Nim) nel seguente modo:

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } s_j = 0 \\ 1 - a_{ij} & \text{se } s_j = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Questa modifica sul mucchietto A_i è possibile in quanto la sua nuova cardinalità è inferiore (la prima modifica è avvenuta trasformando un "1" in "0"), inoltre la posizione ottenuta a seguito di questa mossa, ovvero $(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n)$, ha somma-Nim nulla e dunque è in A.

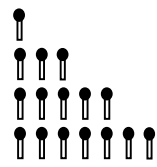
Proviamo (3). Se $(a_1, \dots, a_n)$ ha somma-Nim nulla, ed a_i è modificato nella mossa in a'_i , allora non può valere

$$a_1 \oplus \dots \oplus a_i \oplus \dots \oplus a_n = 0 = a_1 \oplus \dots \oplus a'_i \oplus \dots \oplus a_n$$

in quanto, per la legge di cancellazione, sarebbe $a_i = a'_i$. Allora la somma-Nim della posizione ottenuta deve essere non nulla, perciò $(a_1, \dots, a'_i, \dots, a_n)$ è in B. E' dunque provato che A è l'insieme delle posizioni di tipo P mentre B è l'insieme delle N-posizioni.

Osservazione. La strategia vincente del Nim classico consiste, in definitiva, nel muovere verso una posizione a somma-Nim nulla. Da ciò si deduce che: se la posizione iniziale del gioco ha somma-Nim nulla allora esiste una strategia vincente per il secondo giocatore che deve muovere; se, invece, la posizione ha somma-Nim non nulla, allora esiste una strategia vincente per il primo giocatore che muove.

Osservazione. Negli anni '60 il gioco del Nim divenne di gran moda dopo essere entrato nelle sale cinematografiche.⁴ In quella variante il gioco aveva una posizione iniziale formata da 4 mucchietti con 1, 3, 5 e 7 fiammiferi. La strategia risolutiva, in quel caso, esisteva per il secondo giocatore: la somma-Nim, infatti, è inizialmente nulla

	$1 \rightarrow$ $3 \rightarrow$ $5 \rightarrow$ $7 \rightarrow$	$1 \oplus$ $11 \oplus$ $101 \oplus$ $111 =$	$000 \rightarrow \text{somma-Nim} = 0$
--	--	--	--

Osservazione. In un gioco rapido risulta estremamente difficile ragionare sul calcolo, ed allora è utile escogitare qualche rimedio. Una prima possibilità consiste nel memorizzare le posizioni vincenti di tipo P. Nella variante di Marienbad, ad esempio, il lettore può verificare che sono esattamente le seguenti, a meno di eventuali permutazioni:

$(0,0,m,m), m > 0$	$(0,1,4,5)$	$(0,2,4,6)$	$(1,2,4,7)$	$(1,3,4,6)$
$(1,1,m,m), m > 0$	$(0,1,2,3)$	$(0,3,5,6)$	$(1,2,5,6)$	$(1,3,5,7)$

La seconda possibilità consiste nel facilitare il calcolo di conversioni ed operazioni binarie utilizzando la mano sinistra, sulla scia di quanto proposto in [5], purché non vi siano più di 31 fiammiferi per ogni mucchietto. Supponiamo, ad esempio, che i mucchietti abbiano 5, 12, 17 e 30 fiammiferi: il pollice registrerà le unità di $2^4 = 16$, l'indice le unità di $2^3 = 8$, e così via fino al mignolo con le unità di $2^0 = 1$. Allora:

- chiudiamo la mano sinistra a pugno e distendiamo medio e mignolo

⁴ "L'anno scorso a Marienbad", film del 1961 di A. Resnais

a rappresentare il $5 = 2^2 + 2^0$;

- facciamo la somma-Nim con $12 = 2^3 + 2^2$ distendendo l'indice e ripiegando il medio;

- facciamo la somma-Nim con $17 = 2^4 + 2^0$ (distendendo il pollice e ripiegando il mignolo) e poi con il $30 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$ (ripiegando pollice ed indice e distendendo medio ed anulare) in modo da avere medio ed anulare distesi a rappresentare la somma-Nim 110 (che memorizziamo), ovvero una posizione di tipo N;

- effettuiamo la mossa prendendo uno dei mucchietti aventi l'unità di 2^2 (in quanto l'unità più alta presente nella somma-Nim è 2^2), ad esempio 12, e lo rappresentiamo sulla mano distendendo indice e medio; quindi facciamo la somma-Nim con 110 ripiegando il medio e distendendo l'anulare ottenendo 1010: ciò vuol dire che il mucchio da 12 deve essere portato a $(1010)_2 = 2^3 + 2^1 = 10$ fiammiferi.

3. Il Nim inverso o “a dispetto”

Nel gioco inverso sono sempre date n quantità $a_1, a_2, \dots, a_n$ da cui, ad ogni mossa, il giocatore di turno deve rimuovere un certo numero di fiammiferi, ma il giocatore che rimuove l'ultimo fiammifero è perdente. I giochi di questo tipo sono anche detti “a dispetto” poiché una strategia, per essere vincente, deve obbligare il giocatore avversario ad effettuare l'ultima mossa.

Ad una prima analisi si evince che la posizione terminale $(0, \dots, 0)$ è una N-posizione, così una posizione del tipo $(0, \dots, 0, x)$ è di tipo P se $x = 1$, di tipo N se $x > 1$. Se la posizione è del tipo $(0, \dots, 0, x, y)$, cioè i mucchietti non nulli sono due, allora è di tipo P se $x = y \neq 1$ mentre è una N-posizione se $x = y = 1$ oppure $x \neq y$. La situazione si complica ulteriormente al crescere dei mucchietti non nulli.

Teorema 2. Una posizione $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nel gioco del Nim inverso è una P-posizione se e solo se:

- se $a_i \in \{0, 1\}$, per ogni $i = 1, \dots, n$, allora la somma-Nim dei componenti è non nulla, cioè $a_1 \oplus \dots \oplus a_n \neq 0$;
- se esistono $i \neq j$, per $i, j = 1, \dots, n$, tali che $a_i > 1, a_j > 1$, allora la

somma-Nim dei componenti è nulla, ovvero $a_1 \oplus \dots \oplus a_n = 0$.

Dim. Sia A l'insieme delle posizioni che soddisfano alle condizioni a) e b) e sia B l'insieme complementare. Vogliamo provare che A e B soddisfano alle condizioni (1'), (2'), (3').

La validità di (1') è banale: la posizione terminale $(0, \dots, 0)$ è in B.

Proviamo (2'). Prendiamo una posizione in A che soddisfi alla condizione a). Allora una qualunque mossa consiste nell'eliminare uno dei mucchietti, ovvero prendere un $a_i = 1$ e modificarlo in $a'_i = 0$ ottenendo $a_1 \oplus \dots \oplus a'_i \oplus \dots \oplus a_n = 0$, ovvero una posizione in B. Se,

invece, la posizione in A soddisfa alla condizione b) allora una qualunque mossa (ved. teorema 1) porta ad una posizione con somma-Nim non nulla e con almeno un componente maggiore di 1 (nella mossa si può modificare un solo componente), e dunque ancora in B.

Per provare (3') dobbiamo valutare le N-posizioni caso per caso:

- se ogni componente è uguale a 0 o 1, ovvero $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{0, 1\}$, e la somma-Nim complessiva è nulla, allora ogni mossa porta ad una posizione che soddisfa alla condizione a);

- se esiste un solo componente maggiore di 1, diciamo $a_i > 1$, definiamo l'insieme $U = \{j \mid a_j = 1, j = 1, \dots, n\}$; allora, detta $u = |U|$, modifichiamo l' i -esimo componente ponendo $a'_i = 1$ se u è pari, oppure $a'_i = 0$ se u è dispari. In ogni caso si ottiene una posizione in A che soddisfa alla condizione a) in quanto ogni mucchietto è, al massimo, un singleton ed il numero di mucchietti non nulli è dispari;

- se esistono almeno due componenti maggiori di 1 ma la somma-Nim è non nulla, esiste una mossa (ved. teorema 1) che porta ad una posizione a somma-Nim nulla, ma tale mossa lascia anche (almeno) due componenti maggiori di 1 (se così non fosse, la somma-Nim non potrebbe essere nulla). La nuova posizione, pertanto, sarà in A in quanto soddisfacente alla condizione b).

Per quanto visto, dunque, A è l'insieme delle P-posizioni mentre B è l'insieme delle N-posizioni.

Osservazione. Fermo restando che la presenza sul tavolo da gioco di una N-posizione (risp. P-posizione) determina l'esistenza di una

strategia vincente per il primo giocatore (risp. secondo giocatore), nel gioco del Nim inverso la strategia vincente è un po' più complessa. L'algoritmo da seguire, muovendo a partire da una N-posizione, può essere così sintetizzato:

- se esistono almeno due mucchietti con più di un fiammifero bisogna muovere, semplicemente, ad una posizione con somma-Nim nulla;
- se esiste un solo mucchietto con più di un fiammifero bisogna modificare questo mucchietto eliminandolo del tutto o lasciandovi un solo fiammifero, in modo che rimangano un numero dispari di mucchietti;
- se ogni mucchietto ha al più un fiammifero, l'applicazione della strategia avviene automaticamente.

Osservazione. Anche nel Nim inverso l'ordine dei mucchietti non influenza l'applicazione della strategia vincente per via delle proprietà associative e commutative della somma-Nim.

4. Alcune varianti

Le varianti del Nim proposte nel tempo da studiosi ed appassionati sono numerose. Quelle che riportiamo in questo paragrafo ci sembrano interessanti o per via della semplificazione, come nel caso del "Plainim", o per la facile trasposizione didattica, come nel caso del "Nimble" e del "Nim a scala".

Il "*Plainim*". Supponiamo di avere una scacchiera $m \times n$ su cui sono posizionate delle monete, con al più una moneta per quadrato (come in figura). I giocatori, ad ogni turno, giocano secondo le seguenti regole:

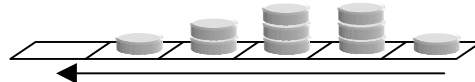
- i) si possono aggiungere/rimuovere monete su una sola riga;
- ii) si possono aggiungere fiammiferi solo alla destra di una moneta già rimossa nella stessa mossa.

●		●	●
	●		●
●	●	●	●
●		●	
●	●		●

Lo scopo del gioco è di rimuovere tutte le monete dalla scacchiera secondo una delle regole di gioco usuali (normale o inverso).

Il Plainim è la variante più semplice del Nim ma è oltremodo interessante perché elude il problema della conversione dei numeri nel sistema binario. Infatti, per come sono definite le regole i) e ii), possiamo interpretare ogni riga come la rappresentazione binaria di un mucchietto: i quadrati che contengono una moneta corrispondono ad 1, quelli vuoti a 0. Il gioco in figura, ad esempio, equivale al gioco Nim con 5 mucchietti di quantità binarie 1011, 101, 1111, 1010, 1101. Come è facile intuire, la somma-Nim risulta molto semplificata per via della visualizzazione “mascherata” dei numeri binari: ciò facilita notevolmente l’applicazione della strategia vincente.

Il “*Nimble*”. Supponiamo di avere una serie di quadrati ordinati in una sequenza, diciamo una striscia, su cui sono posizionate delle monete. I giocatori, ad ogni turno, devo-no prendere (esattamente) una moneta e collocarla su un altro quadrato che precede quello su cui la moneta si trovava, così, se l’ordine va da sinistra a destra, bisogna collocare la moneta in un quadrato più a sinistra (vedi figura). Lo scopo del gioco consiste nel trasportare tutte le monete nel primo quadrato della sequenza: vince il giocatore che trasporta l’ultima moneta (nella convenzione inversa, il giocatore che trasporta l’ultima moneta è perdente).



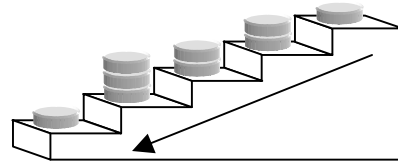
Si prova subito che il Nimble è semplicemente un Nim “mascherato”. Numeriamo i quadrati della sequenza con 0, 1, 2, ..., e così via; quindi, se n è il numero delle monete, indichiamo con $a_1, a_2, \dots, a_n$ il quadrato occupato da ciascuna moneta. E’ ora chiaro che portare una moneta nel primo quadrato (indicizzato con 0) equivale a ridurre la quantità di elementi presenti in un mucchietto Nim.

Dunque anche nel gioco del Nimble esiste una strategia vincente basata sul calcolo binario, del tutto analoga a quella del Nim: una posizione è di tipo P se la somma-Nim degli indici $a_1, a_2, \dots, a_n$ è nulla, viceversa è di tipo N.

Il “*Nim a scala*” (o *Staircase Nim*). Supponiamo di avere una scala di n gradini con alcune monete poste su alcuni gradini. Una mossa consiste nello spostare un certo numero di monete (a scelta) da un

gradino al gradino immediatamente sottostante, con la regola che le monete che arrivano a terra sono eliminate dal gioco. Il gioco termina quando tutte le monete raggiungono il suolo: nel gioco classico vince chi trasporta l'ultima moneta.

Formalizziamo il gioco indicando con $(a_1, \dots, a_n)$ la posizione avente a_i monete sul gradino i , con $i = 1, \dots, n$ (il suolo corrisponde all'indice zero). Una mossa consiste, dunque,



nel muovere un numero a di monete, $1 \leq a \leq a_i$, dal gradino i al gradino $i-1$ lasciando la posizione $(\dots, a_{i-1} + a, a_i - a, \dots)$ se $i > 1$, o la posizione $(a_1 - a, a_2, a_3, \dots)$ nel caso $i = 1$. Vale il seguente:

Teorema 3. Una posizione $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nel “Nim a scala” classico è una P-posizione se la posizione ottenuta prendendo i gradini di indice dispari $(a_1, a_3, a_5, \dots, a_k)$, dove $k = n$ se n è dispari e $k = n + 1$ se n è pari, costituisce una P-posizione nel Nim classico.

Dim. Denotiamo con A l'insieme delle posizioni $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ aventi somma-Nim nulla sui gradini di indice dispari, con B l'insieme complementare. Verifichiamo la validità di (1), (2) e (3).

La validità di (1) è banale: la posizione terminale $(0, \dots, 0)$ ha, in particolare, valori nulli per i gradini di indice dispari, dunque è in A .

Proviamo la validità di (2). Se $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ha somma-Nim non nulla sui gradini di indice dispari, cioè $a_1 \oplus a_3 \oplus \dots \oplus a_k \neq 0$, si può individuare, analogamente al Nim classico, quale componente è da modificare, diciamo a_{2j+1} , e qual è il quantitativo da rimuovere, diciamo a , per ottenere somma-Nim nulla. Quindi, spostando a monete dal gradino $2j+1$ al gradino $2j$, si ottiene somma-Nim nulla sui gradini d'indice dispari, ovvero una posizione in A .

Proviamo la validità di (3). Se $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ha somma-Nim nulla sui gradini d'indice dispari allora, muovendo alcune monete da un gradino all'altro, viene comunque modificato il numero di monete su uno dei gradini d'indice dispari. Perciò, per quanto provato nel Nim classico, la somma-Nim $a_1 \oplus a_3 \oplus \dots \oplus a_k$ non è più nulla.

Concludendo: A è l'insieme delle P-posizioni del Nim a scala.

5. Il Nim_k di Moore

Una generalizzazione del Nim, con una teoria di analoga eleganza, è il “Nim_k”, proposto da E.H. Moore [2].

Il gioco si compone di n mucchietti di fiammiferi, le cui quantità sono espresse dai numeri $a_1, a_2, \dots, a_n$. Il gioco procede come nel Nim, ad eccezione del fatto che, ad ogni mossa, un giocatore può rimuovere quanti fiammiferi vuole, eliminandone almeno uno, fino a coinvolgere k mucchietti, con k fissato. Per $k = 1$, ovviamente, il Nim_k si riduce all’ordinario Nim, per cui Nim₁ = Nim.

Teorema 4. (di Moore) Una posizione $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ nel “Nim_k” è una P-posizione se e solo se addizionando senza riporto in base $k + 1$ le rappresentazioni binarie di $a_1, a_2, \dots, a_n$, il risultato è nullo.

Osservazione. Siano $a_i = (a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots)_2$, per $i = 1, 2, \dots, n$; nel Nim_k le P-posizioni sono dunque caratterizzate dalla condizione:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \pmod{k+1} \equiv 0, \text{ per } j = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

che è una generalizzazione della somma-Nim.

Osservazione. Pur senza addentrarci nella verifica completa del teorema 4, vogliamo dare un metodo per muovere da una posizione di tipo N ad una P-posizione (poiché la prova del teorema consiste nel verificare che per le posizioni soddisfacenti (8) valgono anche le proprietà (1), (2) e (3), questa costruzione proverebbe, indirettamente, la validità della proprietà (2); la prova di (1) e (3) sarebbe a questo punto banale).

Sia data la posizione $(a_1, \dots, a_n)$ e supponiamo $\sum_{i=1}^n a_{ij} \pmod{k+1} \equiv s_j$

con $s_j \neq 0$, per qualche j . Individuiamo, innanzitutto, i mucchietti da modificare. Ciò può avvenire con il seguente algoritmo:

$$S = \max \{s_j \mid s_j \neq 0; j = 0, 1, \dots\}, J = \max \{j \mid s_j \neq 0\}$$

$$A = \emptyset, r = J + 1$$

- (ciclo) finché $|A| < k$ ed $r > 0$

$$r = r - 1, B = \{i \mid a_{ir} = 1; i = 1, \dots, n; i \notin A\}$$

- se $|A| + |B| \leq k$ allora $A \leftarrow A \cup B$

altrimenti

$$s = k - |A|$$

prendo $B_s \subset B$ tale che $|B_s| = s$

$$A \leftarrow A \cup B_s$$

Selezionati i mucchietti, in numero compreso fra S e k , è ora sufficiente modificare i rispettivi numeri binari, in modo che le somme sulle colonne soddisfino la (8), con le seguenti regole:

- possiamo modificare qualsiasi 1 in 0;
- possiamo modificare gli 0 in 1 solo a destra di un 1 già modificato in 0 nella stessa mossa.

Bibliografia

- [1] Bouton C.L. (1902) Nim, a game with a complete mathematical theory, *Annals of Math.*, 3(2), 35-39
- [2] Moore E.H. (1910), A generalization of the game called Nim, *Annals of Math.*, 11(2), 93-94
- [3] Gennaro M.L. (1989), *Il libro dei giochi e dei passatempi*, De Vecchi ed., Milano
- [4] Sprague R. (1937), Uber zwei abarten von Nim, *Tohoku Math. J.*, 43, 351-359
- [5] Gardner M. (1987) *Enigmi e giochi matematici*, traduzione di M. Carlà, Biblioteca Universale Rizzoli, Milano
- [6] Fraenkel A.S. (2002) Combinatorial games: selected bibliography with a succinct gourmet introduction, *The Electronic J. of Combinatorics*, Dynamic Surveys, pp. 57
- [7] www.cut-the-knot.com