

UNA PRESENTAZIONE DEI QUATERNIONI

Franco Eugeni¹, Daniela Tondini², Annamaria Viceconte³

Sia $\mathbb{R}$ il campo ordinato dei numeri reali e $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale 3–dimensionale reale.

Denotiamo con

$$\mathbb{Q} := \mathbb{R} + \mathbb{V} = \mathbb{R} \times \mathbb{V}$$

l'insieme delle “somme finali” di un numero reale con un vettore, ovvero un'espressione formale del tipo

$$a + \vec{u} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{V}$$

ovvero una “coppia ordinata” $(a, \vec{u})$ del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$.

Se, per ogni coppia ordinata $a + \vec{u}, b + \vec{v} \in \mathbb{Q}$, definiamo un'operazione $(+)$ in $\mathbb{Q}$ ponendo:

$$(a + \vec{u}) + (b + \vec{v}) := (a + b) + (\vec{u} + \vec{v})$$

la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, +)$ risulta essere un gruppo abeliano.

Una seconda operazione $(*)$ può essere definita $\forall a + \vec{u}, b + \vec{v} \in \mathbb{Q}$ ponendo:

$$(a + \vec{u}) * (b + \vec{v}) := ab + b\vec{u} + a\vec{v} + (\vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v})$$

Si prova con facilità che la struttura $(\mathbb{Q}, +, *)$ è un corpo, non valendo la proprietà commutativa della seconda operazione.

Gli elementi di $\mathbb{Q}$, nella sopraindicata struttura algebrica, si dicono quaternioni ed il corpo costruito si dice corpo dei quaternioni. Se introduciamo ancora l'operazione “esterna” definita ponendo:

$$k \cdot (a + \vec{u}) := k \cdot a + k \cdot \vec{u} = ka + k\vec{u} \quad \forall k \in \mathbb{R}, \forall a + \vec{u} \in \mathbb{Q}$$

la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, +, *, \cdot)$ prende il nome di algebra dei quaternioni.

¹ Dipartimento di Scienze della Comunicazione - Università degli Studi di Teramo

² Dipartimento Scienze della Comunicazione - Università degli Studi di Teramo

³ Dipartimento Scienze della Comunicazione - Università degli Studi di Teramo

È importante introdurre ora la nozione di norma.

Quale che sia $a + \vec{u} \in \mathbb{Q}$, si chiama norma l'applicazione

$$\| \cdot \| : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

definita ponendo:

$$\|a + \vec{u}\|^2 = a^2 + u^2$$

essendo u la norma di $\vec{u}$ in $\mathbb{V}$.

Si chiama inoltre quaternione coniugato di $a + \vec{u}$ il quaternione

$$\overline{a + \vec{u}} := a - \vec{u}$$

È immediato provare che:

$$(1) \quad (a + \vec{u}) * (a - \vec{u}) = (a - \vec{u}) * (a + \vec{u}) = \|a^2 + u^2\|$$

$$(2) \quad (a + \vec{u})^{-1} = \frac{1}{a^2 + u^2} (a - \vec{u})$$

Spesso è utile scrivere

$$a + \vec{u} = a + b\vec{r}$$

essendo $\vec{r}$ un versore parallelo ad $\vec{u}$, ed anche:

$$a + \vec{u} = a + u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

essendo $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base di versori di $\mathbb{V}$.

Si prova facilmente che:

$$(3) \quad i^2 = j^2 = k^2 = r^2 = -1$$

$$(4) \quad ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j$$

Si prova inoltre il seguente ovvio

TEOREMA 1. Sia $\vec{r} \in \mathbb{V}$ un fissato versore. Allora risulta $(\{a + b\vec{r}\}, +, *) \cong \mathbb{C}$.

TEOREMA 2. Sia $q = a + b\vec{r} = \rho(\cos \vartheta + \vec{r} \sin \vartheta)$ un quaternione. La trasformazione

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1}$$

è una rotazione di asse $\vec{r}$ ed ampiezza 2ϑ .

Dimostrazione.

Si ha

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = \cos 2\vartheta \vec{x} - \sin 2\vartheta (\vec{x} \wedge \vec{r}) + 2 \sin^2 \vartheta (\vec{x} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

La trasformazione è lineare; infatti

$$q * (\lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2) * q^{-1} = \lambda (q * \vec{x}_1 * q^{-1}) + \mu (q * \vec{x}_2 * q^{-1})$$

ed è tale che

$$\|\vec{y}\| = \|q * \vec{x} * q^{-1}\| = \|q\| \|\vec{x}\| \|q\|^{-1} = \|\vec{x}\|$$

Per $\vec{x} = \vec{r}$ risulta $\vec{y} = \vec{r}$ cioè $\vec{r}$ è un vettore unitario.

Sia $a + b\vec{r} = \cos\vartheta + \vec{r}\sin\vartheta$ un quaternione unitario.

Consideriamo:

$$\begin{aligned} (a + b\vec{r}) * \vec{x} * (a - b\vec{r}) &= [a\vec{x} + b(\vec{r} \wedge \vec{x} - \vec{r} \cdot \vec{x})] * (a - b\vec{r}) = \\ &= \{-b(\vec{r} \cdot \vec{x}) + [a\vec{x} + b(\vec{r} \wedge \vec{x})]\} * (a - b\vec{r}) = \\ &= -ab(\vec{x} \cdot \vec{r}) + b^2(\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r} + a^2\vec{x} + ab(\vec{r} \wedge \vec{x}) + [a\vec{x} + b(\vec{r} \wedge \vec{x})] \wedge (-b\vec{r}) - [a\vec{x} + b(\vec{r} \wedge \vec{x})] \cdot (-b\vec{r}) = \\ &= -ab(\vec{x} \cdot \vec{r}) + b^2(\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r} + a^2\vec{x} + ab(\vec{r} \wedge \vec{x}) - ab(\vec{x} \wedge \vec{r}) - b^2(\vec{r} \wedge \vec{x}) \wedge \vec{r} + ab(\vec{x} \cdot \vec{r}) + b^2(\vec{r} \wedge \vec{x} \cdot \vec{r}) = \\ &= b^2(\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r} + a^2\vec{x} - 2ab(\vec{x} \wedge \vec{r}) - b^2[\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r}] = \\ &= (a^2 - b^2)\vec{x} - 2ab(\vec{x} \wedge \vec{r}) + 2b^2(\vec{x} \cdot \vec{r})\vec{r} = \vec{y} \end{aligned}$$

essendo, in generale:

$$(a \wedge b) \wedge c = (ac)b - (bc)a$$

Supponiamo ora che $\vec{x}_1$ sia ortogonale ad $\vec{r}$, cioè che sia:

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{r} = 0.$$

Risulta allora:

$$\vec{y}_1 = \cos 2\vartheta \vec{x}_1 + \sin 2\vartheta (\vec{x}_1 \wedge \vec{r})$$

e quindi:

$$\vec{y}_1 \cdot \vec{r} = \cos 2\vartheta (\vec{x}_1 \cdot \vec{r}) = 0$$

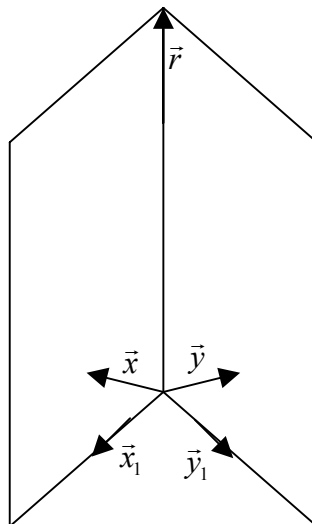
Segue allora che l'angolo dei due piani $(\vec{x}, \vec{r})$ ed $(\vec{y}, \vec{r})$ è dato dall'angolo dei due vettori $\vec{x}_1$ ed $\vec{y}_1$.

Si ha:

$$\vec{y}_1 \vec{x}_1 = \cos 2\vartheta \|\vec{x}_1\|^2$$

e quindi

$$\widehat{\vec{x}_1 \vec{y}_1} = 2\vartheta$$



Poiché la trasformazione $\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1}$ è lineare, deve esistere una matrice $A = A(q)$ tale che:

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = A\vec{x}$$

Essendo, inoltre:

$$\vec{y} = q * \vec{x} * q^{-1} = \cos 2\vartheta \vec{x} - \sin 2\vartheta (\vec{x} \wedge \vec{r}) + 2\sin^2 \vartheta (\vec{x} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

passando alle componenti, risulta:

$$\begin{aligned} y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k} = \\ = \cos 2\vartheta (x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}) - \sin 2\vartheta \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} + 2\sin^2 \vartheta (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3) \cdot (r_1 \vec{i} + r_2 \vec{j} + r_3 \vec{k}) \end{aligned}$$

da cui:

$$y_1 = \cos 2\vartheta x_1 - \sin 2\vartheta (x_2 r_3 - r_2 x_3) + 2\sin^2 \vartheta r_1 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

$$y_2 = \cos 2\vartheta x_2 + \sin 2\vartheta (x_1 r_3 - r_1 x_3) + 2\sin^2 \vartheta r_2 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

$$y_3 = \cos 2\vartheta x_3 - \sin 2\vartheta (x_1 r_2 - r_1 x_2) + 2\sin^2 \vartheta r_3 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

ed ordinando:

$$y_1 = (\cos 2\vartheta + 2r_1^2 \sin^2 \vartheta) x_1 + (-r_3 \sin 2\vartheta + 2r_1 r_2 \sin^2 \vartheta) x_2 + (r_2 \sin 2\vartheta + 2r_1 r_3 \sin^2 \vartheta) x_3$$

$$y_2 = (r_3 \sin 2\vartheta + 2r_1 r_2 \sin^2 \vartheta) x_1 + (\cos 2\vartheta + 2r_2^2 \sin^2 \vartheta) x_2 + (-r_1 \sin 2\vartheta + 2r_2 r_3 \sin^2 \vartheta) x_3$$

$$y_3 = (-r_2 \sin 2\vartheta + 2r_1 r_3 \sin^2 \vartheta) x_1 + (r_1 \sin 2\vartheta + 2r_2 r_3 \sin^2 \vartheta) x_2 + (\cos 2\vartheta + 2r_3^2 \sin^2 \vartheta) x_3$$

Se ora poniamo:

$$a = \cos \vartheta$$

$$b = \sin \vartheta$$

in maniera analoga otteniamo:

$$y_1 \vec{i} + y_2 \vec{j} + y_3 \vec{k} = (a^2 - b^2) (x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}) - 2ab \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} + 2b^2 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3) \cdot (r_1 \vec{i} + r_2 \vec{j} + r_3 \vec{k})$$

da cui, passando alle componenti:

$$y_1 = (a^2 - b^2) x_1 - 2ab (x_2 r_3 - r_2 x_3) + 2b^2 r_1 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

$$y_2 = (a^2 - b^2) x_2 + 2ab (x_1 r_3 - r_1 x_3) + 2b^2 r_2 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

$$y_3 = (a^2 - b^2) x_3 - 2ab (x_1 r_2 - r_1 x_2) + 2b^2 r_3 (x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3)$$

ovvero:

$$y_1 = (a^2 - b^2 + 2b^2 r_1^2) x_1 + (-2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) x_2 + (2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3) x_3$$

$$y_2 = (2abr_3 + 2b^2 r_2 r_1) x_1 + (a^2 - b^2 + 2b^2 r_2^2) x_2 + (-2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3) x_3$$

$$y_3 = (-2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3) x_1 + (2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3) x_2 + (a^2 - b^2 + 2b^2 r_3^2) x_3$$

Se ora poniamo:

$$A = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 + 2b^2 r_1^2 & -2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2 & 2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3 \\ 2abr_3 + 2b^2 r_2 r_1 & a^2 - b^2 + 2b^2 r_2^2 & -2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3 \\ -2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3 & 2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3 & a^2 - b^2 + 2b^2 r_3^2 \end{pmatrix}$$

risulta proprio $\vec{y} = A\vec{x}$.

Dobbiamo provare che questa matrice è ortogonale. Si osservi che è funzione di 2ϑ (angolo di rotazione) e di $\vec{r}$.

$$\begin{aligned}
& (a^2 - b^2 + 2b^2 r_1^2)(2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) + (-2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2)(a^2 - b^2 + 2b^2 r_2^2) + \\
& + (2abr_2 + 2b^2 r_1 r_3)(-2abr_1 + 2b^2 r_2 r_3) = (a^2 - b^2)(2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2 - 2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) = \\
& = (a^2 - b^2)4b^2 r_1 r_2 + 2b^2 r_1^2 (2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) + 2b^2 r_2^2 (-2abr_3 + 2b^2 r_1 r_2) = \\
& = (a^2 - b^2)4b^2 r_1 r_2 + 2b^2 (r_1^2 2abr_3 + r_1^2 2b^2 r_1 r_2 - r_2^2 2abr_3 + r_2^2 2b^2 r_1 r_2) \\
A &= (a^2 - b^2)I_3 + 2ab \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\det = 0} + 2b^2 r_1 r_2 r_3 \underbrace{\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}}_{\det = 0}
\end{aligned}$$