

L'UNIVERSO SCONOSCIUTO DEI NUMERI GEMELLI ED ALCUNE GENERALIZZAZIONI AD ESSI CONNESSE

di Franco Eugeni¹ ed Angela Ghiraldini²

Dipartimento di Scienze della Comunicazione
Università di Teramo

E' noto come da sempre i numeri primi hanno affascinato le menti matematiche. Il reperto più antico che testimonia la conoscenza dei numeri primi, conservato al Museo di Storia Naturale di Bruxelles, è l'*OSSO DI ISHANGO*, datato circa 6500 a.C.. Su di esso sono raffigurate tre colonne con degli intagli, in una ci sono 11,13,17,19 intagli.

Sono molte le caratteristiche dei numeri primi che incuriosiscono: la totale assenza dei divisori, a parte se stessi e l'uno; l'essere infiniti, come già Euclide aveva provato nel 300 a.C.; avere una distribuzione irregolare, come Gauss, Legendre, Riemann, Dirichlet, Chebyshev e Hadamard ben sapevano, non essendo riusciti a individuare un criterio; l'essere tutti, ad eccezione del 2, dispari e non terminare mai per 5; il fatto che ogni numero naturale o è primo, o è prodotto di primi, esprimibile, a meno dell'ordine, in un unico modo.

1 - Dipartimento di Scienze della Comunicazione - Università di Teramo

2- Dipartimento di Scienze della Comunicazione - Università di Teramo

In un famoso lavoro del 1937 Dirichlet provò che:

" se a, b sono due naturali, primi tra loro, allora la funzione lineare

$$f(x) = ax + b \quad \text{con } (a; b) = 1$$

contiene infiniti numeri primi quando l'intero x descrive l'insieme dei numeri naturali."

Non è invece nota alcuna funzione aritmetica $f(x)$, non lineare, nel cui codominio siano contenuti infiniti numeri primi, quindi, in particolare, non è nota la formula generatrice dei numeri primi.

A riguardo sono state avanzate anche ipotesi di impossibilità circa l'esistenza di formule di questo tipo, che conducono persino a chiedersi cosa sia realmente una formula!

Ancora oggi, in piena epoca tecnologica, quando la scienza sembra non avere più segreti, i numeri primi costituiscono una grande sfida aperta.

Esistono molte *congetture* su di essi, con enunciati talmente chiari e plausibili, da poter essere compresi e sperimentati anche da un bambino, ma la cui prova generale è così complessa da mandare in crisi, da sempre, anche le menti più eccelse!

Riportiamo qui di seguito alcuni esempi di problemi, ancora aperti, nell'universo dei numeri primi.

Uno, tra i più famosi, è quello noto come la *congettura di GOLDBACH*.

Nel 1742 Goldbach inviò ad Eulero una lettera in cui gli comunicava la sua formulazione della congettura:

"ogni numero pari n , con $n > 5$, è somma di tre numeri primi".

Eulero trasformò questa formulazione in una equivalente :

"per ogni numero pari $n > 2$, esistono due numeri primi, non necessariamente distinti, p e q , tali che $n = p+q$ ".

Da alcuni esempi su numeri piccoli, comprensibili anche da un bambino, la verifica di questi asserti appare molto semplice:

$$4 = 2+2 \quad , \quad 6 = 2+3 \quad , \quad 8 = 3+5 \quad , \quad 10 = 5+5 = 3+7 \quad , \quad \dots\dots,$$

tuttavia né Goldbach, né Eulero, sono stati in grado di dimostrare le loro affermazioni, né hanno avuto maggiore fortuna i tanti che, nelle epoche successive, ci si sono cimentati !

Così, a tutt'oggi, la congettura non è stata dimostrata, ma neanche confutata, lasciando la sfida ancora aperta.

Vediamo qualche altro esempio di problema ancora aperto:

La congettura formulata da Chen, studiando quella di Goldbach per i numeri dispari :

"per ogni numero pari n esistono due numeri primi, p e q , tali che $n = p-q$ ".

La congettura di Brocard :

"fra i quadrati di due numeri primi, consecutivi e maggiori di 2, ci sono sempre almeno quattro numeri primi"

La congettura nota come *congettura dei numeri fratelli*:

**"esistono infinite coppie di numeri primi la cui differenza
è un numero pari qualsiasi"**

IL PROBLEMA DELLE COPPIE DI NUMERI GEMELLI

Un problema, tra i tanti, che da tempo suscita molto interesse è il *problema dei numeri primi gemelli*, indicando con "numeri gemelli" una coppia di numeri, p , $p+2$, che risultino entrambi primi.

Come per le altre congetture, risulta facile individuare le coppie di primi gemelli, se si opera con numeri piccoli, ad esempio inferiori a 500.

(3,5) , (5,7) ,
(11,13) , (17,19) , (29,31) , (41,43) , (59,61) , (71,73) ,
(101,103) , (107,109) , (137,139) , (149,151), (179,181), (191,193),
(197,199) (227,229) , (239,241) , (269,271) , (281,283) ,
(311,313), (347,349),
(419,421) , (431,433), (461,463) .

Al contrario, sono stati necessari molto tempo e molto lavoro per riuscire ad individuare tutte le coppie di primi gemelli fino ad oggi conosciute.

Nasce così un altro grande quesito nell'universo dei numeri interi, noto come la *congettura dei numeri primi gemelli*:

"esistono infinite coppie di numeri primi gemelli",

Analogamente alla congettura di Goldbach, anche questa, a tutt'oggi, non è stata né dimostrata, né confutata.

Ciò che si ha è solo un lungo, ma finito, elenco di coppie di numeri gemelli.

Ogni tanto qualcuno scopre una nuova coppia, battendo così il record che era stato stabilito in precedenza.

Com'è successo nel 1977 ai matematici Karl Heinz INDLEKOFER e Antal JARAI che hanno scoperto la coppia di numeri primi gemelli :

$$\begin{array}{c} 2409110779845 \times 2^{60000} - 1 \\ e \\ 2409110779845 \times 2^{60000} + 1 \end{array}$$

formati da ben 18.075 cifre.

Anche Atkin e Ricket nel 1979 batterono velocemente il record precedente scoprendo le coppie di primi gemelli :

$$694513810 \times 2^{2304} \pm 1 \quad , \quad 1159142985 \times 2^{2304} \pm 1$$

entrambe di 703 cifre.

Nel tempo, studiando le coppie di numeri primi gemelli, si è tentato di individuare un criterio di distribuzione, ma senza successo.

Si è comunque notato che la loro frequenza diminuisce all'aumentare della grandezza dei numeri con cui si opera, ma non si hanno prove per affermare che questo possa valere anche per le coppie ancora sconosciute.

Nel 1919, è stato ottenuto un altro risultato interessante, relativo ai numeri primi gemelli :

“ la somma degli inversi dei numeri gemelli è finita ”

Infatti Brun dimostrò che la somma dei reciproci dei primi gemelli converge ad una costante, ora chiamata *COSTANTE DI BRUN*, mentre la somma dei reciproci di tutti i primi diverge.

Thomas Nicely, calcolando le coppie di numeri gemelli fino a 10^{14} , ha stimato euristicamente la costante di Brun essere pari a 1,902160577783278.

Esiste una congettura formulata da Polignac nel 1849 :

**“per ogni n pari esistono infiniti numeri primi consecutivi, p e q ,
tali che $n = p - q$ ”**

Questa congettura risulta essere un generalizzazione della congettura dei numeri primi gemelli se si pone $n = 2$.

TEOREMI DI INTERESSE RELATIVI AI NUMERI PRIMI

Un teorema importante che, in un certo senso, caratterizza i numeri primi, ma di fatto non praticabile, è il cosiddetto

TEOREMA di WILSON :

Un numero naturale $p > 1$ è primo, se e solo se, p divide $1+(p-1)!$ cioè se:

$$p \equiv 1+(p-1)! \pmod{p}$$

ovvero $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

dove la relazione " $a \equiv b \pmod{p}$ ", con a e b interi relativi, è detta *congruenza modulo p* , ed esprime la circostanza che la differenza $a-b$ risulta essere divisibile per p .

Il Teorema di Wilson può essere posto anche nella seguente forma :

I numeri naturali p , con $p \geq 1$, che sono soluzioni dell'equazione

$$(1) \quad \frac{(p-1)!}{p} - \left[\frac{(p-1)!}{p} \right] \equiv \frac{p-1}{p}$$

sono tutti e soli i numeri primi.

dove:

la parentesi quadra indica la *parte intera* del numero in essa contenuto, il simbolo $n!$ rappresenta il *fattoriale* del numero n .

La (1) può essere chiamata, a tutti gli effetti, *l'equazione dei numeri primi*, ma si tratta, ovviamente, di una equazione che nessuno è in grado di risolvere!

Il procedimento di deduzione dell'equazione (1) dal Teorema di Wilson è semplice e viene riportata come curiosità :

Il teorema che segue è stato dimostrato da F. Pellegrino [1] e può essere considerato l'analogo del Teorema di Wilson, per i *numeri gemelli* :

TEOREMA

Due numeri naturali $p-2$ e p , con $p \geq 5$, sono entrambe primi, se e solo se, risulta

$$(2) \quad 4 \left[\frac{(p-3)!}{p-2} \right] \equiv -5 \pmod{p}$$

La (2) costituisce una *condizione necessaria e sufficiente* affinché i numeri p e $p-2$, con $p \geq 5$, siano entrambe primi, permettendo di individuare una coppia di numeri primi gemelli.

Riportiamo ancora di seguito il teorema dimostrato nel 1949 :

TEOREMA di CLEMENT

Gli interi $n, n+2$ costituiscono una coppia di numeri gemelli se e solo se

$$4[(n-1)!+1] \equiv -n \pmod{n(n+2)}$$

Molto interessante, maanch'esso impraticabile!

IL PROBLEMA DELLE TERNE DI NUMERI GEMELLI

Il problema dell'individuazione di terne di numeri primi, gemelli a due a due, è nato inizialmente per terne del tipo $p-2, p, p+2$, come naturale estensione del problema delle coppie di primi gemelli.

Tuttavia, si prova facilmente che esiste una sola terna di primi che gode di questa proprietà: la terna 3,5,7.

Tra le tante possibili definizioni di terne si è scelto, nelle ricerche fatte, di cercare le terne che presentassero uno scarto di due, tra il primo ed il secondo elemento, e di quattro tra il secondo ed il terzo elemento della terna e viceversa.

Così si sono introdotte due definizioni di *terne gemelle* :

Definizione 1 :

Una terna di numeri naturali del tipo $p-2, p, p+4$ è detta *terna gemella di 1° specie* se i numeri della terna risultano essere tutti primi.

Definizione 2 :

Una terna di numeri naturali del tipo $p-4, p, p+2$ è detta *terna gemella di 2° specie* se i numeri della terna risultano essere tutti primi.

Riportiamo due teoremi, dimostrati da S. Patrizio [2], che forniscono condizioni necessarie e sufficienti circa l'estensione delle terne gemelle di 1° e 2° specie.

TEOREMA 1

Condizione necessaria e sufficiente perchè tre naturali $p-2, p, p+4$, con $p \geq 7$, siano tutti primi è che si abbia:

$$(3) \quad 8 \left[\frac{(p+3)!}{p+4} \right] + 4 \left[\frac{(p-3)!}{p+2} \right] \equiv -11 \pmod{p}$$

TEOREMA 2

Condizione necessaria e sufficiente perchè tre naturali $p-4, p, p+2$, con $p \geq 11$, siano tutti primi è che si abbia:

$$(4) \quad 48 \left[\frac{(p-5)!}{p-4} \right] + 15 \left[\frac{(p+1)!}{p+2} \right] \equiv -67 \pmod{p}$$

Sono state date generalizzazioni anche per quaterne assunta come valida la sequenza $p, p+2, p+6, p+8$.

Il valore di p più grande, ad essa relativo, finora conosciuto è:

802359150003121605557551380867519560344356971

di ben 45 cifre decimali.

IL PROBLEMA DELLE SEQUENZE DI NUMERI GEMELLI

Oltre alle coppie, alle terne e quaterne di numeri primi gemelli, anche il problema delle sequenze, forse mai completamente enunciato, ha suscitato interesse nel corso dei secoli.

Ne abbiamo formulato una definizione che generalizza il problema delle terne gemelle di 1° specie.

Definizione 3 :

Una sequenza di numeri naturali del tipo $p, p+2, p+6, p+12, \dots, p+x+x^2$ è detta *sequenza di numeri gemelli* se i numeri della sequenza sono tutti primi.

Non è nota alcuna congettura significativa su tali sequenze, ma riteniamo che segnalare il problema presenti un certo interesse, esso infatti è ricollegabile ad un problema classico di Teoria dei Numeri.

Eulero evidenziò che la parabola:

$$y = f(x) = x^2 + x + 41$$

forniva 40 valori consecutivi della y , tutti primi, per $X = 0, 1, \dots, 39$.

La $y = x^2 + x + 41$ è detta anche *Parabola di Eulero*.

Inoltre risulta $f(40) = 1681 = 41^2$ e $f(41) = 41 \cdot 43$

E' evidente che, per $x = -1, -2, \dots, -40$, si ripetono simmetricamente i medesimi valori, poiché si ha $f(0) = f(-1)$, $f(1) = f(-2)$, ..., $f(x) = f(-x-1)$.

E' immediato convincersi che per il caso generale

$$y = F(x) = x^2 + x + p \quad \text{con } p \text{ primo}$$

sussistono le relazioni:

$$\begin{aligned} F(p-1) &= p^2, \quad F(p) = p(p+2), \quad F(x) = F(-x-1), \\ F(0) &= F(-1), \quad F(1) = F(-2), \dots, \quad F(x) = F(-x-1) \end{aligned}$$

dalle quali emerge che una sequenza del tipo

$$x^2 + x + p \quad \text{per } x = 0, 1, \dots, p-2$$

contiene al più $p-1$ numeri primi consecutivi.

Sono note altre parabole, che chiameremo del "tipo Eulero", nelle quali è raggiunta la lunghezza massima $p-1$.

Seguono alcuni esempi:

$$y = x^2 + x + 3 \quad \text{con 2 numeri primi } 3, 5$$

$$y = x^2 + x + 11 \quad \text{con 10 numeri primi in sequenza:}$$

11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101

$$y = x^2 + x + 17 \quad \text{con 16 numeri primi in sequenza:}$$

17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257

$$y = x^2 + x + 41 \quad \text{con 40 numeri primi in sequenza:}$$

41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313,
347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797,
853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601.

A tutt'oggi non sono note parabole "tipo Eulero" con sequenze costituite da più di 40 primi consecutivi !

Si fa notare, inoltre, che con una traslazione e/o simmetria, sulla sola x , del tipo

$$\begin{cases} x = \pm x' + n \\ y = y' \end{cases} \quad \text{con } n \text{ intero relativo}$$

si ottengono nuove parabole che conservano la proprietà di avere sequenze di primi, ma che sono del tutto equivalenti alle parabole di provenienza !

Infatti, applicando la simmetria rispetto all'asse y :

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$$

alla parabola $y = x^2 + x + 41$, si ottiene la parabola $Y' = x'^2 - x' + 41$ simmetrica rispetto alla precedente che presenta ugualmente 40 primi consecutivi per $x' = 1, 2, \dots, 40$.

Inoltre, la traslazione

$$\begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' \end{cases}$$

trasforma la $y = x^2 + x + 41$ nella $Y' = x'^2 + 3x' + 43$ che presenta anch'essa 40 primi consecutivi, per $x' = -1, 0, 1, \dots, 38$.

Qui di seguito vengono riportate tre parabole, non appartenenti al "tipo Eulero", che presentano comunque sequenze di primi, distinti e consecutivi, molto lunghe.

$$y = 103 x^2 + 31 x - 3391 \quad (\text{Fung, 1988})$$

che fornisce, a meno del segno, 43 numeri primi distinti per $x = 0, \pm 1, \dots, \pm 21$

$$\begin{aligned} & (0, -3391), (-1, -3319), (1, -3257), (-2, -3041), \\ & (2, -2917), (-3, -2557), (3, -2371), (-4, -1867), (4, -1619), \\ & (-5, -971), (5, 661), (-6, 131), (6, 503), \dots, \\ & (-20, 37189), (20, 38429), (-21, 41381), (21, 42683) \end{aligned}$$

$$y = 47 x^2 + 9 x - 5209 \quad (\text{Fung, 1988})$$

che fornisce, a meno del segno, esattamente 43 numeri primi distinti consecutivi per $x = 0, \pm 1, \dots, \pm 21$.

$$y = 36 x^2 + 18 x - 1801 \quad (\text{Ruby, 1989})$$

che fornisce, a meno del segno, esattamente 45 numeri primi distinti consecutivi per $x = 0, \pm 1, \dots, \pm 22$.

La parabola di Ruby può anche essere ottenuta dalla parabola "tipo Eulero" di equazione $y = 9 k^2 + 9 k - 1801$ che, per $k = 0, 1, \dots, 22$, presenta 23 valori primi distinti mediante la trasformazione omografica $k = 9 x$.

Non risultano, al momento, essere note regole su tali trasformazioni che aumentino o diminuiscano genericamente la primalità !