

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA AZIENDALE
CORSO DI LAUREA IN STATISTICA

Prof. *Franco* EUGENI
Prof.ssa *Daniela* TONDINI

Parziale n. 1 - Compito I
A. A. 2002 – 2003

1) Risolvere il seguente sistema lineare non omogeneo 3×3 :

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ x + y - 8z = 13 \\ 4x + y + z = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti associata al sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue che:

$$\det A = 3 - 32 - 2 - (-8 - 24 + 1) = -31 - (-31) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det A = 0$$

Poiché il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema è nullo, occorre verificare se il sistema ammette o meno soluzioni attraverso il Teorema di Rouché-Capelli. È necessario, cioè, calcolare i ranghi delle due matrici, quella incompleta e quella completa.

Iniziamo con l'osservare che $0 \leq r(A) \leq 3$. Poiché, però, $\det A = 0$, risulta $r(A) \neq 3$, cioè $0 \leq r(A) \leq 2$. Inoltre, essendo A diversa dalla matrice nulla, ne segue anche che $r(A) \neq 0$, per cui $0 < r(A) \leq 2$. Si ha allora:

$$A' = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$$

Scriviamo ora la matrice completa, aggiungendo alla matrice A (dei coefficienti del sistema) la colonna dei termini noti:

$$(A|N) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -8 & 13 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow 0 < r(A|N) \leq 3$$

Per il calcolo del rango della matrice completa utilizziamo, per comodità, il Teorema di Kronecker. Consideriamo, a tal proposito, un minore del secondo ordine diverso da zero, ad esempio proprio A' , ed i suoi due minori orlati.

Risulta:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -8 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \det A = 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 13 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi $r(A|N) = 2$ (tutti i minori orlati del terzo ordine sono nulli).

Essendo soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente del Teorema di Rouché-Capelli, cioè che $r(A) = r(A|N)$, il sistema dato ammette soluzioni, precisamente $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ ($n = 3$ è il numero delle incognite del sistema, $r = 2$ è il rango delle due matrici): le soluzioni del sistema dipenderanno, cioè, da un parametro.

Per calcolare tali soluzioni scriviamo ora un sistema equivalente al dato:

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 5 \\ x + y - 8z = 13 \end{cases} \quad \text{con } z = t \in \mathbb{R} \text{ parametro reale}$$

ovvero il sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 5 + 2t \\ x + y = 13 + 8t \end{cases}$$

che si può risolvere con Cramer, essendo il determinante della matrice dei coefficienti del sistema (rappresentato proprio da A') diverso da zero.

Pertanto:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5+2t & 1 \\ 13+8t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{5+2t-13-8t}{2} = \frac{-6t-8}{2} = -3t-4$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5+2t \\ 1 & 13+8t \end{vmatrix}}{2} = \frac{39+24t-5-2t}{2} = \frac{22t+34}{2} = 11t+17$$

Le soluzioni del sistema sono, al variare di t in $\mathbb{R}$:

$$(x, y, z) = (-3t - 4, 11t + 17, t)$$

2) Determinare, se esiste, l'inversa della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = 1 + 2 + 2 - 1 = 5 - 1 = 4 \neq 0$, la matrice A ammette l'inversa A^{-1} .

Per determinare l'inversa di A , dobbiamo scrivere in primo luogo la matrice dei complementi algebrici di A , cioè la matrice A^* .

Risulta:

$$\begin{aligned} A_{11} &= + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; & A_{12} &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1; & A_{13} &= + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{21} &= - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4; & A_{22} &= + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; & A_{23} &= - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{31} &= + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; & A_{33} &= + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Pertanto:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3) Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 5x - 6} \geq 0$

Si tratta di una disequazione razionale fratta del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ e $D(x)$

sono entrambi polinomi di secondo grado. Procediamo allora in modo classico, ponendo $N(x) \geq 0$ e $D(x) > 0$.

Consideriamo ora le due equazioni associate:

$$N(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = +1, x_2 = +4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x) \geq 0 \text{ per } x \leq +1 \text{ ed } x \geq +4$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = -6, x_2 = +1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) > 0 \text{ per } x < -6 \text{ ed } x > +1$$

Applicando ora la regola dei segni risulta:

	-6	+1	+4
$N(x) \geq 0$	+	-	+
$D(x) > 0$	+	-	+

Dobbiamo ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è positiva o uguale a zero, per cui la soluzione

della disequazione data è la seguente:

$$S :]-\infty, -6[\cup [4, +\infty[$$

$$\text{b)} \frac{3x-2}{3x^2-14x+16} > 0$$

Si tratta di una disequazione razionale fratta del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ e $D(x)$ sono rispettivamente polinomi di primo e di secondo grado. Procediamo allora in modo classico, ponendo $N(x) > 0$ e $D(x) > 0$.

Consideriamo ora le due equazioni associate:

$$N(x) = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x) > 0 \text{ per } x > \frac{2}{3}$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{3} = \frac{7 \pm 1}{3} \Rightarrow x_1 = +2, x_2 = +\frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) > 0 \text{ per } x < +2 \text{ ed } x > +\frac{8}{3}$$

Applicando ora la regola dei segni risulta:

	+2/3	+2	+8/3
$N(x) \geq 0$	-----		
$D(x) > 0$		-----	
	-	+	-

Dobbiamo ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è strettamente positiva, per cui la soluzione della disequazione data è la seguente:

$$S : \left] \frac{2}{3}, 2 \right[\cup \left] \frac{8}{3}, +\infty \right[$$

$$c) \frac{x+1}{1-x} - 2 < \frac{1-x}{x}$$

Prima di risolvere la disequazione data è necessario sviluppare i calcoli. Pertanto, facendo il minimo comune multiplo, risulta:

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)x}{(1-x)x} - \frac{2(1-x)x}{(1-x)x} &< \frac{(1-x)(1-x)}{(1-x)x} \Rightarrow \frac{x(x+1) - 2x(1-x) - (1-x)^2}{x(1-x)} < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x^2 + x - 2x + 2x^2 - 1 + 2x - x^2}{x(1-x)} < 0 &\Rightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{x(1-x)} < 0 \end{aligned}$$

Ci siamo così ricondotti allo studio di una disequazione razionale fratta del tipo

$\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ e $D(x)$ sono entrambi polinomi di secondo grado.

Consideriamo, come di consueto, le due equazioni associate:

$$N(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = +\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x) > 0 \text{ per } x < -1 \text{ ed } x > +\frac{1}{2}$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = +1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) > 0 \text{ per } +1 < x < 0 \text{ (il coefficiente di } x^2 \text{ è negativo!!!)}$$

Applicando ora la regola dei segni risulta:

	-1	0	+1/2	+1
$N(x) \geq 0$				
$D(x) > 0$				
	-	+	-	+

Dobbiamo ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è strettamente negativa, per cui la soluzione

della disequazione data è la seguente:

$$S :]-\infty, -1[\cup]0, \frac{1}{2}[\cup]1, +\infty[$$