

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA AZIENDALE
CORSO DI LAUREA IN STATISTICA

Prof. *Franco* EUGENI
Prof.ssa *Daniela* TONDINI

Parziale n. 1 - Compito II
A. A. 2002 – 2003

1) Risolvere il seguente sistema lineare non omogeneo 3×3 :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 7 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti associata al sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

da cui segue che:

$$\det A = -16 + 36 + 2 - (+16 - 6 + 12) = +22 - (+22) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det A = 0$$

Poiché il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema è nullo, occorre verificare se il sistema ammette o meno soluzioni attraverso il Teorema di Rouché-Capelli. È necessario, cioè, calcolare i ranghi delle due matrici, quella incompleta e quella completa.

Iniziamo con l'osservare che $0 \leq r(A) \leq 3$. Poiché, però, $\det A = 0$, risulta $r(A) \neq 3$, cioè $0 \leq r(A) \leq 2$. Inoltre, essendo A diversa dalla matrice nulla, ne segue anche che $r(A) \neq 0$, per cui $0 < r(A) \leq 2$. Si ha allora:

$$A' = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$$

Scriviamo ora la matrice completa, aggiungendo alla matrice A (dei coefficienti del sistema) la colonna dei termini noti:

$$(A|N) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow 0 < r(A|N) \leq 3$$

Per il calcolo del rango della matrice completa utilizziamo, per comodità, il Teorema di Kronecker. Consideriamo, a tal proposito, un minore del secondo ordine diverso da zero, ad esempio proprio A' , ed i suoi due minori orlati.

Risulta:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \det A = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Quindi $r(A|N) = 2$ (tutti i minori orlati del terzo ordine sono nulli).

Essendo soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente del Teorema di Rouché-Capelli, cioè che $r(A) = r(A|N)$, il sistema dato ammette soluzioni, precisamente $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ ($n = 3$ è il numero delle incognite del sistema, $r = 2$ è il rango delle due matrici): le soluzioni del sistema dipenderanno, cioè, da un parametro.

Per calcolare tali soluzioni scriviamo ora un sistema equivalente al dato:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases} \quad \text{con } z = t \in \mathbb{R} \text{ parametro reale}$$

ovvero il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3 + 2t \\ x - 2y = 2 - 3t \end{cases}$$

che si può risolvere con Cramer, essendo il determinante della matrice dei coefficienti del sistema (rappresentato proprio da A') diverso da zero.

Pertanto:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 3+2t & 3 \\ 2-3t & -2 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{-6-4t-6+9t}{-7} = \frac{5t-12}{-7} = \frac{12-5t}{7}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3+2t \\ 1 & 2-3t \end{vmatrix}}{-7} = \frac{4-6t-3-2t}{-7} = \frac{-8t+1}{-7} = \frac{8t-1}{7}$$

Le soluzioni del sistema sono, al variare di t in $\mathcal{R}$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{12-5t}{7}, \frac{8t-1}{7}, t \right)$$

2) Determinare, se esiste, l'inversa della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = -6 - 2 + 1 + 6 = 7 - 8 = -1 \neq 0$, la matrice A ammette l'inversa A^{-1} .

Per determinare l'inversa di A , dobbiamo scrivere in primo luogo la matrice dei complementi algebrici di A , cioè la matrice A^* .

Risulta:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

Pertanto:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

3) Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $\frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 7x + 6} \leq 0$

Si tratta di una disequazione razionale fratta del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ e $D(x)$

sono entrambi polinomi di secondo grado. Procediamo allora in modo classico, ponendo $N(x) \geq 0$ e $D(x) > 0$.

Consideriamo ora le due equazioni associate:

$$N(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = 1 \pm \sqrt{9} = 1 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = +4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x) \geq 0 \text{ per } x \leq -2 \text{ ed } x \geq +4$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = +1, x_2 = +6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) > 0 \text{ per } x < +1 \text{ ed } x > +6$$

Applicando ora la regola dei segni risulta:

	-2	+1	+4	+6	
$N(x) \geq 0$					
$D(x) > 0$					
	+	-	+	-	+

Dobbiamo ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è negativa o uguale a zero, per cui la soluzione

della disequazione data è la seguente:

$$S : [-2, +1[\cup [4, +6[$$

$$\text{b) } \frac{14x-7}{2x^2-x-6} > 0$$

Si tratta di una disequazione razionale fratta del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ e $D(x)$

sono rispettivamente polinomi di primo e di secondo grado. Procediamo allora in modo classico, ponendo $N(x) > 0$ e $D(x) > 0$.

Consideriamo ora le due equazioni associate:

$$N(x) = 0 \Rightarrow 14x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x) > 0 \text{ per } x > \frac{1}{2}$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = +2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) > 0 \text{ per } x < -\frac{3}{2} \text{ ed } x > +2$$

Applicando ora la regola dei segni risulta:

	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+2$	
$N(x) \geq 0$	-----	-----	-----	
$D(x) > 0$	-----	-----	-----	
	-	+	-	+

Dobbiamo ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è strettamente positiva, per cui la soluzione

della disequazione data è la seguente:

$$S: \left] -\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right[\cup]2, +\infty[$$

$$c) \frac{x-1}{2} > 3 - \frac{6x}{x+1}$$

Prima di risolvere la disequazione data è necessario sviluppare i calcoli. Pertanto, facendo il minimo comune multiplo, risulta:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{2(x+1)} > \frac{3 \cdot 2 \cdot (x+1)}{2(x+1)} - \frac{6x \cdot 2}{2(x+1)} \Rightarrow \frac{(x^2-1)-6(x+1)+12x}{2(x+1)} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-1-6x-6+12x}{2(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{x^2+6x-7}{2(x+1)} > 0$$

Ci siamo così ricondotti allo studio di una disequazione razionale fratta del tipo

$\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ e $D(x)$ sono polinomi rispettivamente di secondo e di primo

grado.

Consideriamo, come di consueto, le due equazioni associate:

$$N(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{1} = \frac{-3 \pm \sqrt{16}}{1} = -3 \pm 4 \Rightarrow x_1 = -7, x_2 = +1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x) > 0 \text{ per } x < -7 \text{ ed } x > +1$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow 2(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) > 0 \text{ per } x > -1$$

Applicando ora la regola dei segni risulta:

	-7	-1	+1
$N(x) > 0$	—	—	—
$D(x) > 0$	—	—	—
	-	+	-

Dobbiamo ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è strettamente positiva, per cui la soluzione

della disequazione data è la seguente:

$$S :]-7, -1[\cup]+1, +\infty[$$