

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA AZIENDALE
CORSO DI LAUREA IN STATISTICA

Prof. *Franco* EUGENI
Prof.ssa *Daniela* TONDINI

Parziale n. 1 - Compito III
A. A. 2002 – 2003

1) Risolvere il seguente sistema lineare non omogeneo 3×3 :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y = 3 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti associata al sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui segue che:

$$\det A = +4 + 0 + 4 - (+4 - 0 + 4) = +8 - (+8) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det A = 0$$

Poiché il determinante della matrice dei coefficienti associata al sistema è nullo, occorre verificare se il sistema ammette o meno soluzioni attraverso il Teorema di Rouché-Capelli. È necessario, cioè, calcolare i ranghi delle due matrici, quella incompleta e quella completa.

Iniziamo con l'osservare che $0 \leq r(A) \leq 3$. Poiché, però, $\det A = 0$, risulta $r(A) \neq 3$, cioè $0 \leq r(A) \leq 2$. Inoltre, essendo A diversa dalla matrice nulla, ne segue anche che $r(A) \neq 0$, per cui $0 < r(A) \leq 2$. Si ha allora:

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = +2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = 2$$

Scriviamo ora la matrice completa, aggiungendo alla matrice A (dei coefficienti del sistema) la colonna dei termini noti:

$$(A|N) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 0 < r(A|N) \leq 3$$

Per il calcolo del rango della matrice completa utilizziamo, per comodità, il Teorema di Kronecker. Consideriamo, a tal proposito, un minore del secondo ordine diverso da zero, ad esempio proprio A' , ed i suoi due minori orlati.

Risulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \det A = 0$$

Quindi $r(A|N) = 2$ (tutti i minori orlati del terzo ordine sono nulli).

Essendo soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente del Teorema di Rouché-Capelli, cioè che $r(A) = r(A|N)$, il sistema dato ammette soluzioni, precisamente $\infty^{n-r} = \infty^{3-2} = \infty^1$ ($n = 3$ è il numero delle incognite del sistema, $r = 2$ è il rango delle due matrici): le soluzioni del sistema dipenderanno, cioè, da un parametro.

Per calcolare tali soluzioni scriviamo ora un sistema equivalente al dato:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \quad \text{con } y = t \in \mathcal{R} \text{ parametro reale}$$

ovvero il sistema:

$$\begin{cases} x - z = -2t \\ 2x = 3 - 4t \end{cases}$$

che si può risolvere con Cramer, essendo il determinante della matrice dei coefficienti del sistema (rappresentato proprio da A') diverso da zero.

Pertanto:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2t & -1 \\ 3-4t & 0 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3-4t}{2}$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2t \\ 2 & 3-4t \end{vmatrix}}{2} = \frac{3-4t+4t}{2} = \frac{3}{2}$$

Le soluzioni del sistema sono, al variare di t in $\mathbb{R}$:

$$(x, y, z) = \left(\frac{3-4t}{2}, t, \frac{3}{2} \right)$$

Osserviamo, però, che se avessimo considerato il minore A' , ottenuto escludendo la colonna dei coefficienti dell'incognita x , allora avremmo ottenuto la soluzione:

$$(x, y, z) = \left(t, \frac{3-2t}{4}, \frac{3}{2} \right)$$

2) Determinare, se esiste, l'inversa della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = 42 - 8 - 24 - 14 = -46 + 42 = -4 \neq 0$, la matrice A ammette l'inversa A^{-1} .

Per determinare l'inversa di A , dobbiamo scrivere in primo luogo la matrice dei complementi algebrici di A , cioè la matrice A^* .

Risulta:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{13} = + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -8;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -14; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{33} = + \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -14$$

Pertanto:

$$A^* = \begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ 11 & 6 & 9 \\ -14 & -8 & -14 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} -8 & 11 & -14 \\ -4 & 6 & -8 \\ -8 & 9 & -14 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -8 & 11 & -14 \\ -4 & 6 & -8 \\ -8 & 9 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{11}{4} & \frac{7}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{9}{4} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

3) Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $\frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 5} \geq 0$

Si tratta di una disequazione razionale fratta del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ e $D(x)$

sono entrambi polinomi di secondo grado. Procediamo allora in modo classico, ponendo $N(x) \geq 0$ e $D(x) > 0$.

Consideriamo ora le due equazioni associate:

$$N(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = +2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathcal{R} \text{ (in } x = 2 \text{ il numeratore si annulla!!!)}$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = +\frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) > 0 \text{ per } x < -1 \text{ ed } x > +\frac{5}{2}$$

Applicando ora la regola dei segni risulta:

	-1	+2	+5/2	
$N(x) \geq 0$				
$D(x) > 0$				
	+	-	-	+

Dobbiamo ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è positiva o uguale a zero, per cui la soluzione della disequazione data è la seguente:

$$S:]-\infty, -1[\cup \left] \frac{5}{2}, +\infty \right[$$

b) $\frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 3} > 0$

Si tratta di una disequazione razionale fratta del tipo $\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ e $D(x)$ sono rispettivamente polinomi di secondo e di primo grado. Procediamo allora in modo classico, ponendo $N(x) > 0$ e $D(x) > 0$.

Consideriamo ora le due equazioni associate:

$$N(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = +1, x_2 = +2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x) > 0 \text{ per } x < +1 \text{ ed } x > +2$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = +\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) > 0 \text{ per } x > +\frac{3}{2}$$

Applicando ora la regola dei segni risulta:

	+1	+3/2	+2	
$N(x) \geq 0$	-----	-----	-----	
$D(x) > 0$	-----	-----	-----	
	-	+	-	+

Dobbiamo ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è strettamente positiva, per cui la soluzione della disequazione data è la seguente:

$$S:]1, \frac{3}{2}[\cup]2, +\infty[$$

$$c) \frac{x+8}{x-8} < 2 + \frac{2x}{x-4}$$

Prima di risolvere la disequazione data è necessario sviluppare i calcoli. Pertanto, facendo il minimo comune multiplo, risulta:

$$\begin{aligned} \frac{(x+8)(x-4)}{(x-8)(x-4)} &< \frac{2(x-8)(x-4)}{(x-8)(x-4)} + \frac{2x(x-8)}{(x-8)(x-4)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 8x - 32}{(x-8)(x-4)} &< \frac{2(x^2 - 4x - 8x + 32)}{(x-8)(x-4)} + \frac{2x^2 - 16x}{(x-8)(x-4)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x^2 + 4x - 32 - 2x^2 + 24x - 64 - 2x^2 + 16x}{(x-8)(x-4)} &< 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{-3x^2 + 44x - 96}{(x-8)(x-4)} &< 0 \Rightarrow \frac{3x^2 - 44x + 96}{(x-8)(x-4)} > 0 \end{aligned}$$

Ci siamo così ricondotti allo studio di una disequazione razionale fratta del tipo

$\frac{N(x)}{D(x)}$, dove $N(x)$ e $D(x)$ sono entrambi polinomi di secondo grado.

Consideriamo, come di consueto, le due equazioni associate:

$$\begin{aligned} N(x) = 0 &\Rightarrow 3x^2 - 44x + 96 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{22 \pm \sqrt{484 - 288}}{3} = \frac{22 \pm \sqrt{196}}{3} = \frac{22 \pm 14}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= +\frac{8}{3}, x_2 = +\frac{36}{3} = +12 \Rightarrow \\ \Rightarrow N(x) &> 0 \quad \text{per} \quad x < +\frac{8}{3} \quad \text{ed} \quad x > +12 \end{aligned}$$

$$D(x) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 8) = 0 \Rightarrow x_1 = +4, x_2 = +8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(x) > 0 \text{ per } x < +4 \text{ ed } x > +8$$

Applicando ora la regola dei segni risulta:

		+8/3		+4		+8		+12	
$N(x) > 0$									
$D(x) > 0$									
		+		-		+		-	

Dobbiamo ora vedere dove $\frac{N(x)}{D(x)}$ è strettamente positiva, per cui la soluzione

della disequazione data è la seguente:

$$S:]-\infty, \frac{8}{3}[\cup]4, 8[\cup]12, +\infty[$$