

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA AZIENDALE
CORSO DI LAUREA IN STATISTICA

Prof. Franco EUGENI
Prof.ssa Daniela TONDINI

Parziale n. 2 - Compito I
A. A. 2002 – 2003

1) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$$

Si tratta di una funzione polinomiale di terzo grado che si può scomporre con la regola di Ruffini. Occorre pertanto trovare le radici dell'equazione ad essa associata:

$$(*) \quad x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

Risulta:

1	1	-3	4	-2
1		1	-2	2
	1	-2	2	//

da cui segue:

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \quad \text{oppure} \quad x^2 - 2x + 2 = 0$$

Poiché $x^2 - 2x + 2 \neq 0$ per ogni x numero reale ($\Delta = -1 < 0$!!!), l'unica soluzione reale dell'equazione (*) è proprio $x = 1$.

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Trattandosi di una funzione polinomiale il suo campo di definizione è tutto l'asse reale, cioè:

$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} =]-\infty, +\infty[$$

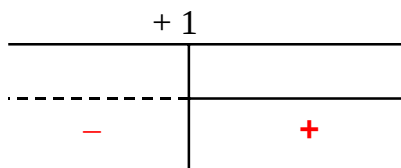
SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)(x^2 - 2x + 2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Osserviamo che la disequazione di secondo grado è sempre soddisfatta perché il discriminante è negativo!!!!

Quindi:

$$y > 0 \Leftrightarrow x > +1$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = (0)^3 - 3(0)^2 + 4(0) - 2 = -2 \Rightarrow A = (0, -2)$$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - 2x + 2) = 0 \Rightarrow x = +1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = (1, 0)$$

(abbiamo già osservato in precedenza che non può essere mai $x^2 - 2x + 2 = 0$ nel campo dei numeri reali!!!)

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione è definita su tutto l'asse reale bisogna andare a studiare i limiti per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

Dunque non esistono asintoti orizzontali della funzione.

DERIVATA PRIMA.

$$y' = 3x^2 - 6x + 4$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 > 0$$

Consideriamo l'equazione associata e calcoliamo le sue soluzioni:

$$3x^2 - 6x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{+3 \pm \sqrt{9-12}}{3} = \frac{+3 \pm \sqrt{-3}}{3} \Rightarrow \Delta < 0$$

Dunque:

$$y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cioè la funzione data è sempre crescente.

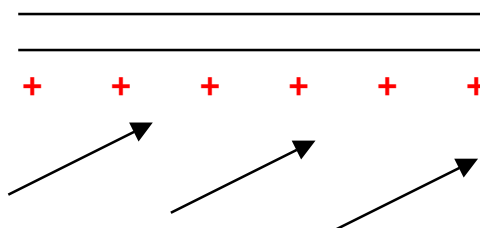
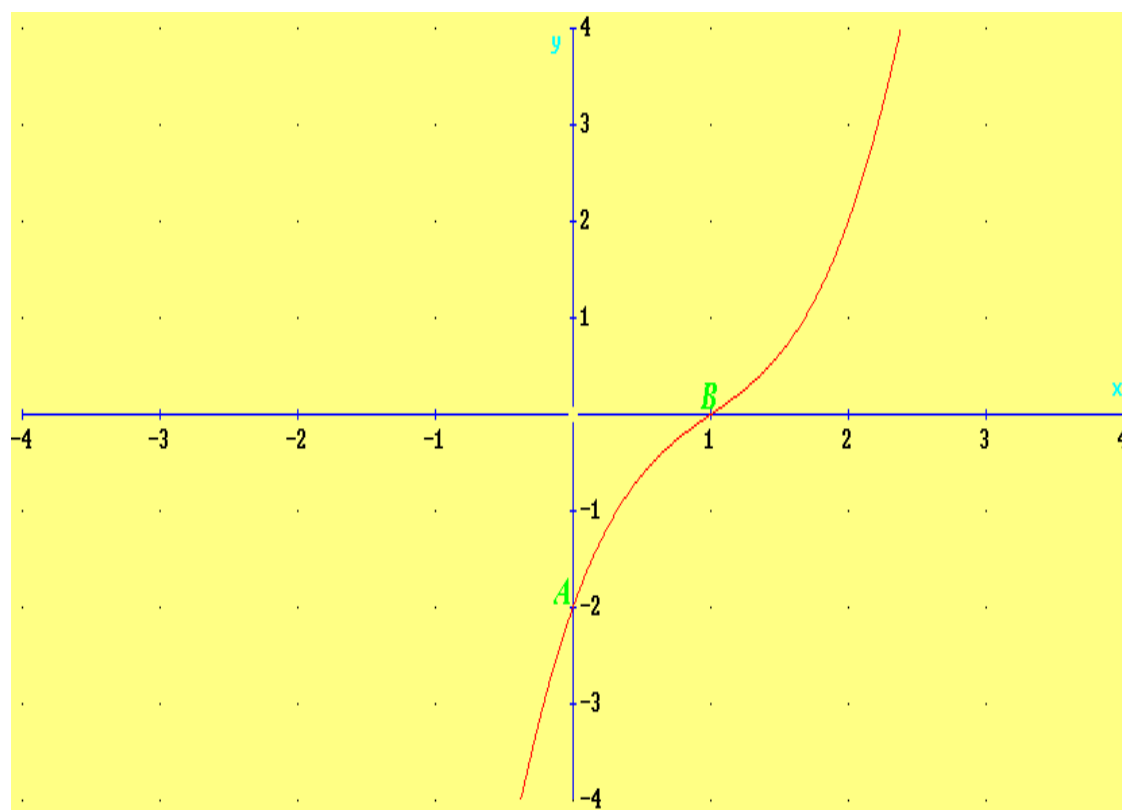


GRAFICO.



2) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4}$$

Si tratta di una funzione razionale fratta in cui il numeratore ed il denominatore sono entrambi polinomi di secondo grado.

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Trattandosi di una frazione il suo campo di definizione si ottiene ponendo il denominatore diverso da zero, cioè deve essere $x^2 - 2x + 4 \neq 0$. Poiché il Δ dell'equazione associata, $x^2 - 2x + 4 = 0$, è negativo ne segue che il denominatore della funzione data è sempre diverso da zero. Quindi:

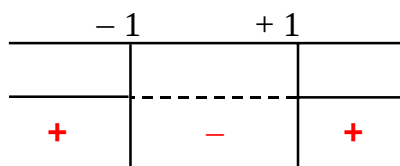
$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} =]-\infty, +\infty[$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 2x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, x > +1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Quindi:

$$y > 0 \Leftrightarrow x < -1, x > +1$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = \frac{(0)^2 - 1}{(0)^2 - 2 \cdot 0 + 4} = \frac{-1}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow A = \left(0, -\frac{1}{4}\right)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = (-1, 0), C = (+1, 0)$$

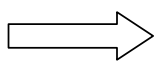
(in generale una frazione è uguale a zero se e solo se il suo numeratore è nullo!!!)

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione è definita su tutto l'asse reale bisogna andare a studiare i limiti per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = +1$$



$y = 1$ A. O.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = +1$$

Poiché il numeratore ed il denominatore della funzione data hanno lo stesso grado il limite si ottiene facendo il rapporto dei coefficienti della x di grado massimo.

Dunque la retta $y = 1$ rappresenta un asintoto orizzontale per la funzione.

DERIVATA PRIMA.

$$y' = \frac{2x(x^2 - 2x + 4) - (x^2 - 1)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 4)^2} = \frac{2x^3 - 4x^2 + 8x - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 2}{(x^2 - 2x + 4)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 10x - 2}{(x^2 - 2x + 4)^2}$$

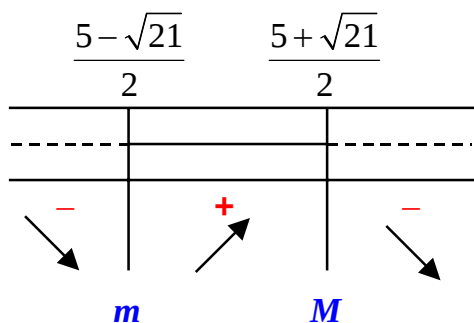
$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 10x - 2}{(x^2 - 2x + 4)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 + 10x - 2 > 0 \\ (x^2 - 2x + 4)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 10x + 2 < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (poiché si tratta di un quadrato che è sempre positivo!!!)} \end{cases}$$

Risulta allora sufficiente risolvere la disequazione $2x^2 - 10x + 2 < 0$. Calcoliamo in primo luogo le soluzioni dell'equazione associata $2x^2 - 10x + 2 = 0$. Poiché:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

la disequazione è soddisfatta per $\frac{5 - \sqrt{21}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$.



cioè la funzione data è crescente per $\frac{5-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{21}}{2}$. In particolare

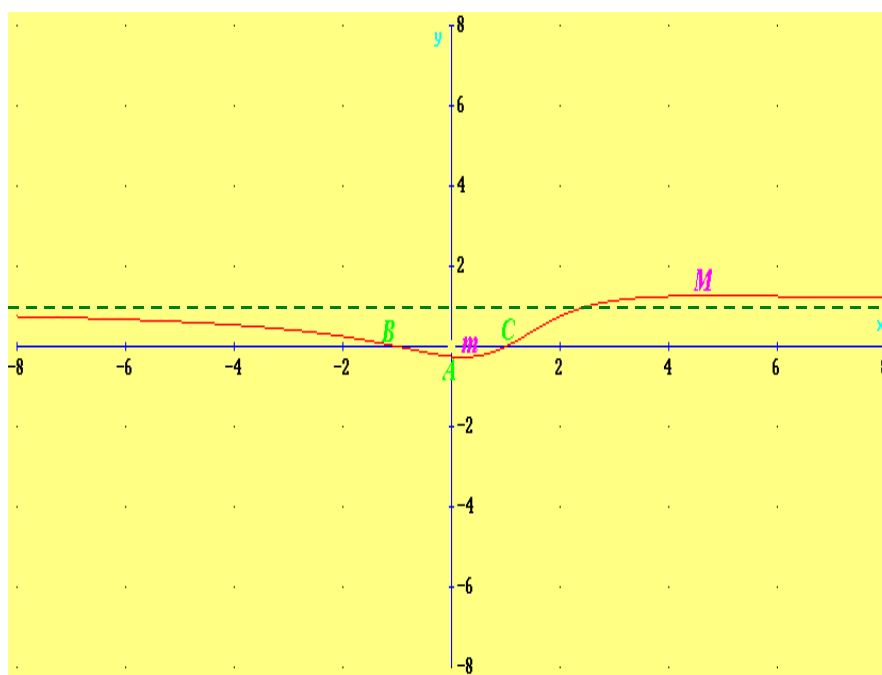
$x = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$ è un minimo ed $x = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$ è un massimo per la funzione.

Ne segue che:

$$x = \frac{5-\sqrt{21}}{2} \approx 0,2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = y\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right) + 4} \approx -0,2$$

$$x = \frac{5+\sqrt{21}}{2} \approx 4,7 \quad \Rightarrow \quad y(x) = y\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right) + 4} \approx 1,2$$

GRAFICO.



$y = 1$ A. O.

3) Studiare la seguente funzione irrazionale:

$$y = \sqrt[3]{3x^2 - x^3}$$

Si tratta di una funzione irrazionale avente indice di radice dispari e per radicando un polinomio.

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Trattandosi di una funzione irrazionale con indice di radice dispari, essa è definita su tutto l'asse reale. Bisogna pertanto analizzare il campo di esistenza del radicando, che, essendo un polinomio, risulta definito, anch'esso, su tutta la retta reale. Quindi:

$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} =]-\infty, +\infty[$$

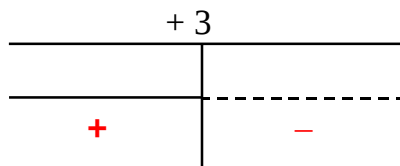
SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{3x^2 - x^3} > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x^3 > 0 \Leftrightarrow x^2(3 - x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < 3 \end{cases}$$

Quindi:

$$y > 0 \Leftrightarrow x < +3$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = \sqrt[3]{3 \cdot (0)^2 - (0)^3} = 0 \Rightarrow A = (0, 0) \equiv O$$

$$y = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{3x^2 - x^3} = 0 \Rightarrow 3x^2 - x^3 = 0 \Rightarrow x^2(3 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \text{ oppure } 3 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oppure } x = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = (0, 0) \equiv A \equiv O, C = (+3, 0)$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione è definita su tutto l'asse reale bisogna andare a studiare i limiti per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} \right) &= \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x^3)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3)} = \sqrt[3]{-\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)} = -\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)} = \\ &= -\sqrt[3]{(+\infty)^3} = -(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{3x^2 - x^3} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 - x^3)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3)} = \sqrt[3]{-\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3)} = -\sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3)} =$$

$$= -\sqrt[3]{(-\infty)^3} = -(-\infty) = +\infty$$

Dunque la funzione data non ammette asintoti orizzontali.

DERIVATA PRIMA.

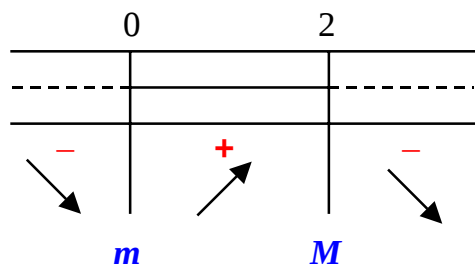
$$y' = \frac{1}{3} (3x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}-1} (6x - 3x^2) = \frac{1}{3} (3x^2 - x^3)^{-\frac{2}{3}} (6x - 3x^2) =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{(3x^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}} (6x - 3x^2) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2}} (6x - 3x^2) = \frac{6x - 3x^2}{3\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2}} = \frac{2x - x^2}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2}}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2x - x^2}{\sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 > 0 \\ \sqrt[3]{(3x^2 - x^3)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (poiché il radicando è un quadrato che è sempre positivo!!!)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < 2$$



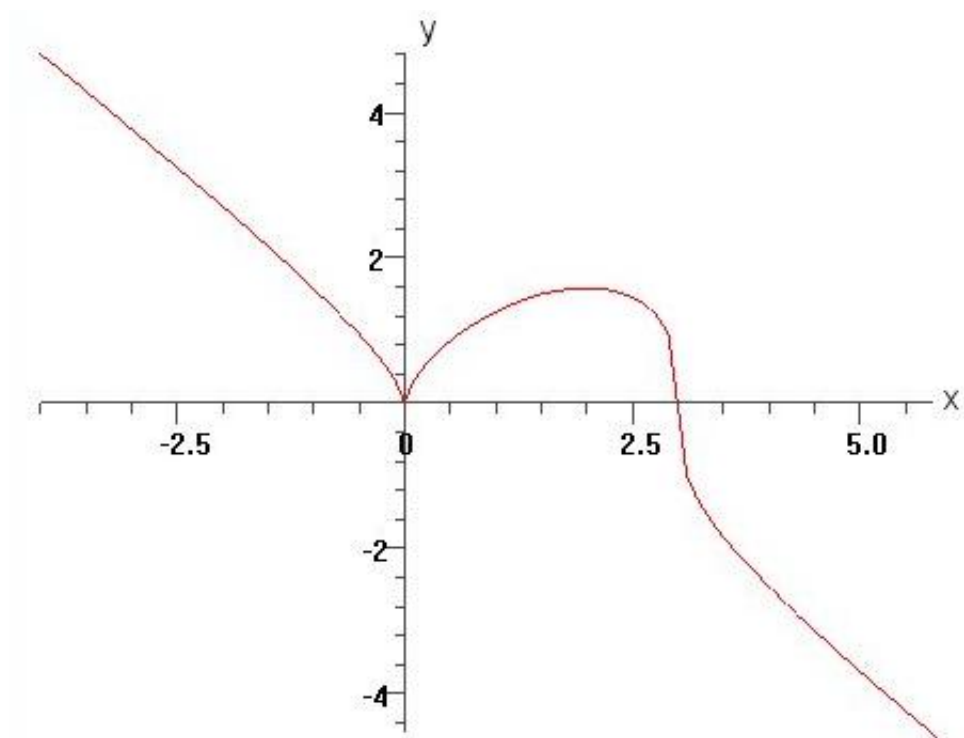
cioè la funzione data è crescente per $0 < x < 2$. In particolare $x = 0$ è un minimo ed $x = 2$ è un massimo per la funzione.

Ne segue che:

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = \sqrt[3]{3 \cdot (0)^2 - (0)^3} = 0 \Rightarrow m = (0, 0) \equiv A \equiv O$$

$$x = 2 \Rightarrow y(x) = y(2) = \sqrt[3]{3 \cdot (2)^2 - (2)^3} = \sqrt[3]{12 - 8} = \sqrt[3]{4} \approx 1,5 \Rightarrow M = (2, \sqrt[3]{4})$$

GRAFICO.



4) Studiare la seguente funzione esponenziale:

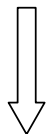
$$y = e^{\frac{x-1}{2-x}}$$

Si tratta di una funzione esponenziale avente per esponente una frazione.

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Sappiamo che la funzione esponenziale è definita su tutto l'asse reale. Essendo, però, l'esponente una frazione bisogna studiare il campo di esistenza dell'esponente, cioè dobbiamo porre il denominatore diverso da zero. Quindi:

$$\begin{aligned} \text{C.E.} &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +2, +2 < x < +\infty\} = \\ &=]-\infty, +2[\cup]+2, +\infty[\end{aligned}$$



$x = 2$ è un asintoto verticale (A.V.)

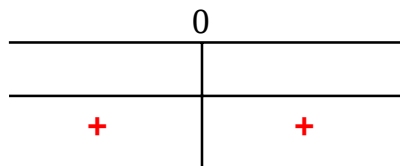
SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x-1}{2-x}} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

(una funzione esponenziale, indipendentemente dall'esponente, è sempre positiva!!!)

Quindi:

$$y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = e^{\frac{0-1}{2-0}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6 \Rightarrow A = \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$y = 0 \Rightarrow e^{\frac{x-1}{2-x}} = 0 \Rightarrow \text{tale condizione non è mai verificata}$$

(una funzione esponenziale non interseca MAI l'asse delle x !!!)

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Bisogna studiare i limiti per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{x-1}{2-x}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,3 \Rightarrow y = \frac{1}{e} \text{ A.O.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{x-1}{2-x}} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{2-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.3 \Rightarrow y = \frac{1}{e} \text{ A.O.}$$

Dunque la funzione data ammette asintoti orizzontali.

DERIVATA PRIMA.

$$y' = e^{\frac{x-1}{2-x}} \cdot \left[\frac{1 \cdot (2-x) - (x-1) \cdot (-1)}{(2-x)^2} \right] = e^{\frac{x-1}{2-x}} \cdot \frac{2-x+x-1}{(2-x)^2} = e^{\frac{x-1}{2-x}} \cdot \frac{1}{(2-x)^2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x-1}{2-x}} \cdot \frac{1}{(2-x)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\frac{x-1}{2-x}} > 0 \\ \frac{1}{(2-x)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cioè la funzione data è sempre crescente.

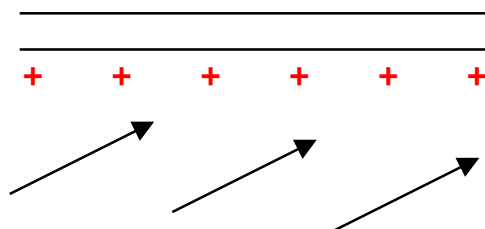
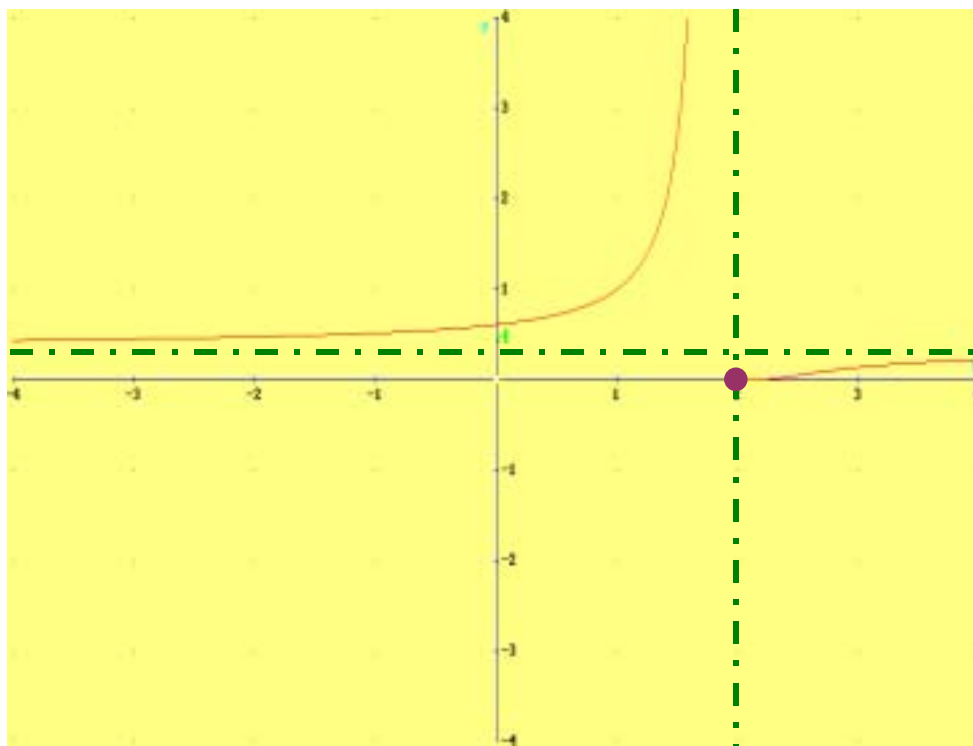


GRAFICO.



$$y = \frac{1}{e} \text{ A.O.}$$

$$x = 2 \text{ A.V.}$$