

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA AZIENDALE
CORSO DI LAUREA IN STATISTICA

Prof. *Franco* EUGENI
Prof.ssa *Daniela* TONDINI

Parziale n. 2 - Compito II
A. A. 2002 – 2003

1) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = x^3 - x^2 - 12x$$

Si tratta di una funzione polinomiale di terzo grado che si può scomporre, ad esempio, raccogliendo la x . Si ottiene, così, la funzione equivalente alla data:

$$(*) \quad y = x (x^2 - x - 12)$$

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Trattandosi di una funzione polinomiale il suo campo di definizione è tutto l'asse reale, cioè:

$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} =]-\infty, +\infty[$$

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 12x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 12 > 0 \end{cases}$$

Troviamo ora le radici dell'equazione:

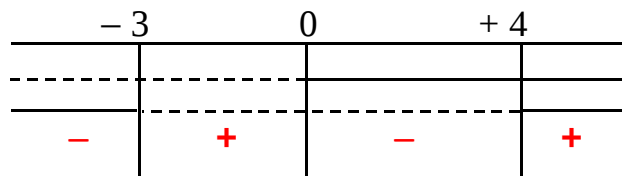
$$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{+1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{+1 \pm 7}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{+1-7}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{+1+7}{2} = \frac{8}{2} = +4 \end{cases}$$

Ne segue che:

$$x^2 - x - 12 > 0 \Leftrightarrow x < -3, x > +4$$

Quindi:

$$y > 0 \Leftrightarrow x > +4, -3 < x < 0$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = (0)^3 - (0)^2 - 12(0) = 0 \Rightarrow A = (0, 0) \equiv O$$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 12) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ oppure } x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oppure } x = -3 \text{ oppure } x = +4$$

$$\Rightarrow B = (0, 0) \equiv A \equiv O, C = (-3, 0), D = (+4, 0)$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione è definita su tutto l'asse reale bisogna andare a studiare i limiti per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 - 12x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 - 12x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

Dunque non esistono asintoti orizzontali della funzione.

DERIVATA PRIMA.

$$y' = 3x^2 - 2x - 12$$

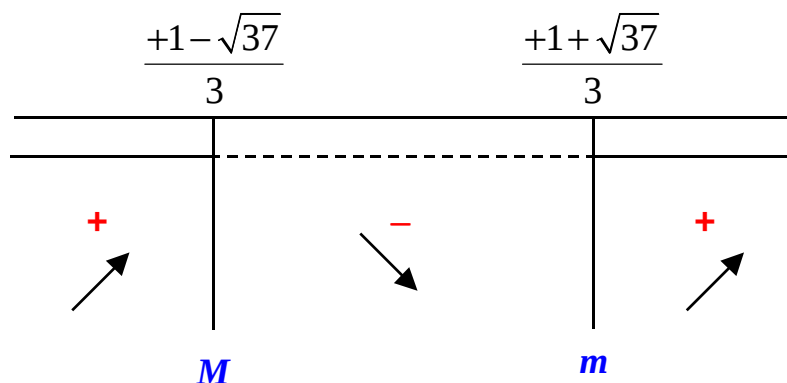
$$y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 12 > 0$$

Consideriamo l'equazione associata e calcoliamo le sue soluzioni:

$$3x^2 - 2x - 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+36}}{3} = \frac{+1 \pm \sqrt{37}}{3}$$

Dunque:

$$y' > 0 \Leftrightarrow x < \frac{+1 - \sqrt{37}}{3} \approx -1,7, x > \frac{+1 + \sqrt{37}}{3} \approx 2,3$$

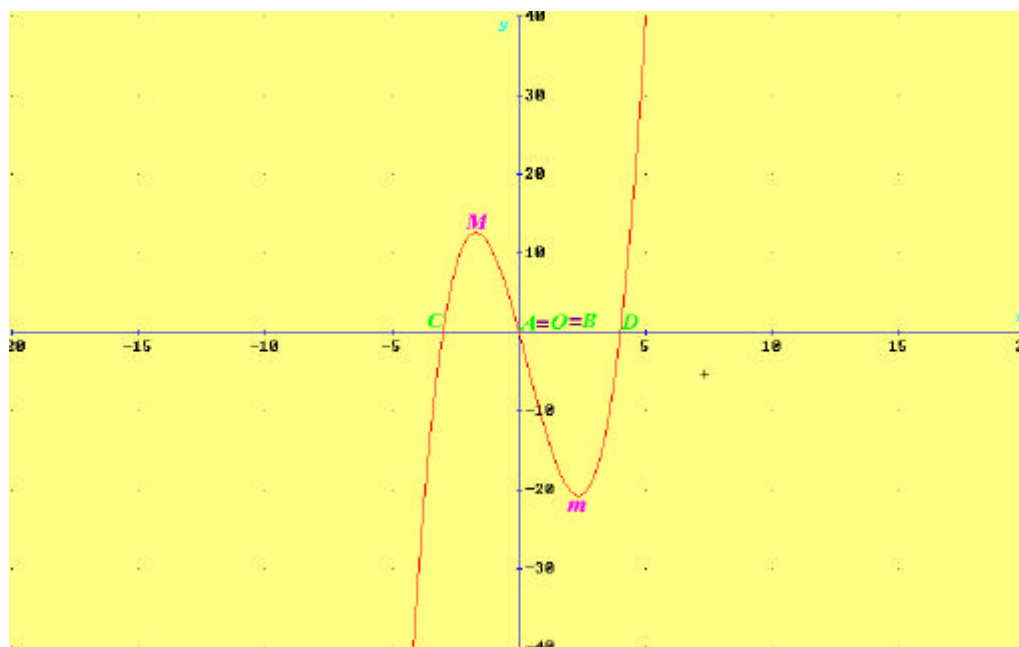


In particolare $x = \frac{+1-\sqrt{37}}{3}$ è un massimo ed $x = \frac{+1+\sqrt{37}}{3}$ è un minimo per la funzione.

Ne segue che:

$$\begin{aligned}
 x = \frac{+1-\sqrt{37}}{3} &\Rightarrow y(x) = y\left(\frac{+1-\sqrt{37}}{3}\right) = \\
 &= \left(\frac{+1-\sqrt{37}}{3}\right)^3 - \left(\frac{+1-\sqrt{37}}{3}\right)^2 - 12\left(\frac{+1-\sqrt{37}}{3}\right) = 12,6 \\
 x = \frac{+1+\sqrt{37}}{3} &\Rightarrow y(x) = y\left(\frac{+1+\sqrt{37}}{3}\right) = \\
 &= \left(\frac{+1+\sqrt{37}}{3}\right)^3 - \left(\frac{+1+\sqrt{37}}{3}\right)^2 - 12\left(\frac{+1+\sqrt{37}}{3}\right) = -20,7
 \end{aligned}$$

GRAFICO.



2) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

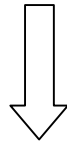
$$y = \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 5}$$

Si tratta di una funzione razionale fratta in cui il numeratore ed il denominatore sono polinomi rispettivamente di secondo e di primo grado.

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Trattandosi di una frazione il suo campo di definizione si ottiene ponendo il denominatore diverso da zero, cioè deve essere $x - 5 \neq 0$, da cui $x \neq +5$. Quindi:

$$\begin{aligned} \text{C.E.} &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq +5\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +5, +5 < x < +\infty\} = \\ &=]-\infty, +5[\cup]+5, +\infty[\end{aligned}$$



$x = +5$ è un asintoto verticale della funzione (A.V.)

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 5} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 5 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 5 > 0 \\ x > 5 \end{cases}$$

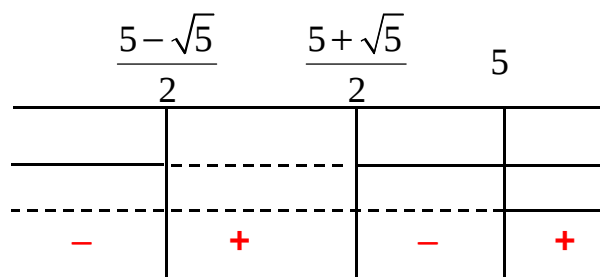
Basta risolvere allora la disequazione di secondo grado. Troviamo, in primo luogo, le soluzioni dell'equazione ad essa associata. Si ha:

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \approx 1,38 \\ x_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \approx 3,61 \end{cases}$$

Ne segue:

$$y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, x > \frac{5 + \sqrt{5}}{2} \\ x > 5 \end{cases}$$

Quindi:



$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, x > +5$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = \frac{(0)^2 - 5 \cdot (0) + 5}{0 - 5} = \frac{5}{-5} = -1 \Rightarrow A = (0, -1)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 5} = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, 0 \right), C = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, 0 \right)$$

(in generale una frazione è uguale a zero se e solo se il suo numeratore è nullo!!!)

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Calcoliamo ora i limiti agli estremi del campo di esistenza, ovvero per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$, dal momento che in $x = 5$ abbiamo già individuato un asintoto verticale della funzione.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 5}{x - 5} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 5}{x - 5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{1} \right) = -\infty$$

Essendo il grado del numeratore maggiore di quello del denominatore, il limite vale infinito.

DERIVATA PRIMA.

$$y' = \frac{(2x - 5)(x - 5) - (x^2 - 5x + 5) \cdot 1}{(x - 5)^2} = \frac{2x^2 - 10x - 5x + 25}{(x - 5)^2} = \frac{2x^2 - 15x + 25}{(x - 5)^2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 15x + 25}{(x-5)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 15x + 25 > 0 \\ (x-5)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 15x + 25 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (poiché si tratta di un quadrato che è sempre positivo!!!)} \end{cases}$$

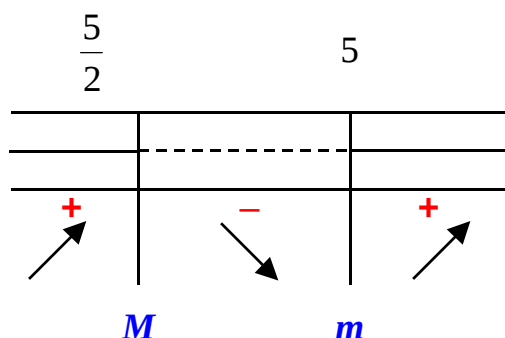
Risulta allora sufficiente risolvere la disequazione $2x^2 - 15x + 25 > 0$. Calcoliamo in primo luogo le soluzioni dell'equazione associata $2x^2 - 15x + 25 = 0$. Poiché:

$$x_{1,2} = \frac{+15 \pm \sqrt{225 - 200}}{4} = \frac{+15 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{+15 \pm 5}{4}$$

da cui segue:

$$x_1 = \frac{+15 - 5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{+15 + 5}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

la disequazione è soddisfatta per $x < \frac{5}{2}$, $x > 5$.



cioè la funzione data è crescente per $x < \frac{5}{2}$ ed $x > 5$. In particolare $x = \frac{5}{2}$ è un massimo ed $x = 5$ è un minimo per la funzione.

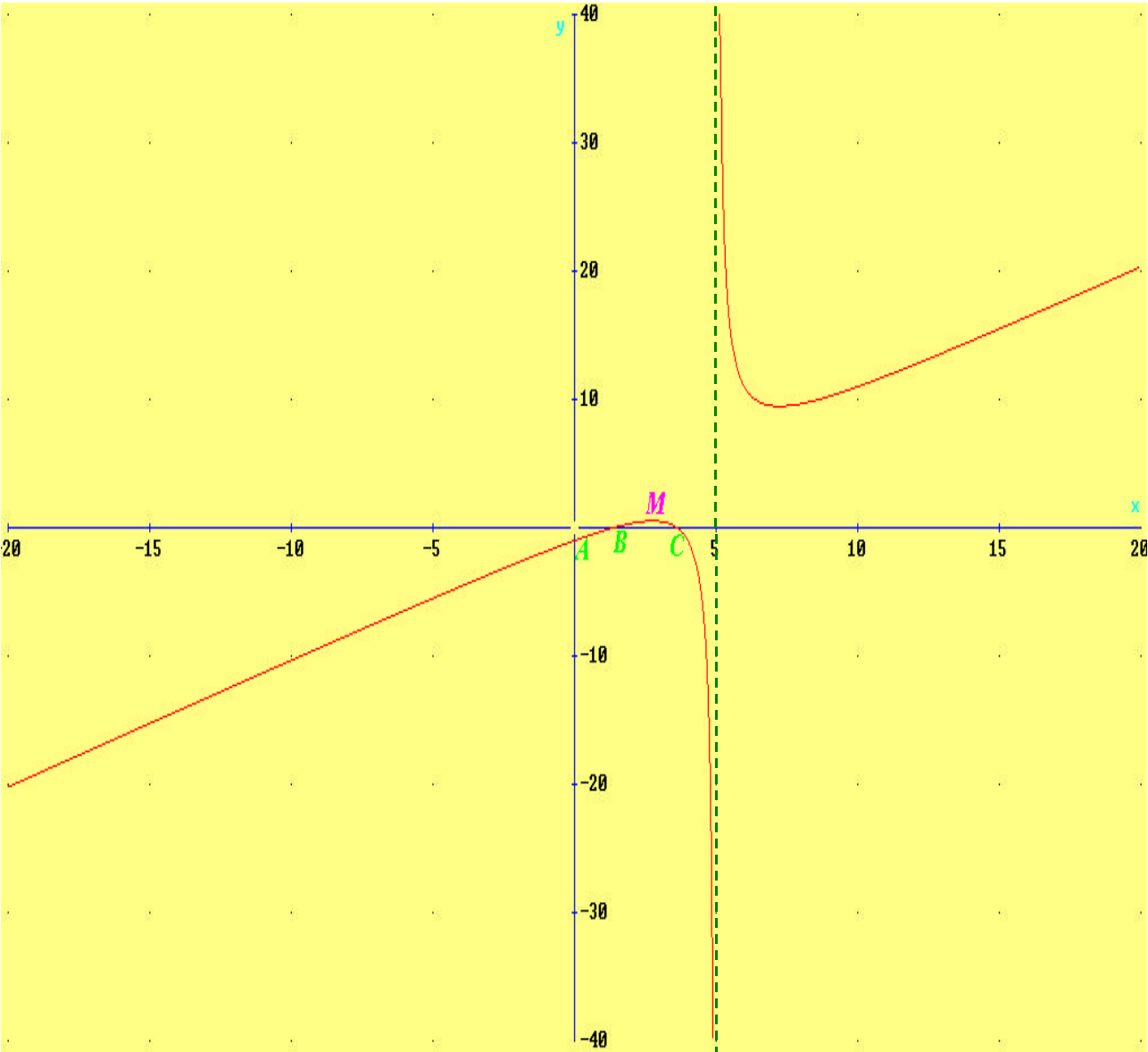
Ne segue che:

$$x = \frac{5}{2} \approx 2,5 \Rightarrow y(x) = y\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 5}{\left(\frac{5}{2}\right) - 5} \approx 0,5$$

Osserviamo che non ha senso calcolare la $y(5)$, poiché in $x = 5$ la funzione non è definita!!!!

Dunque la funzione data ha solo un punto di massimo.

GRAFICO.



$x = 5$
A.V.

3) Studiare la seguente funzione irrazionale:

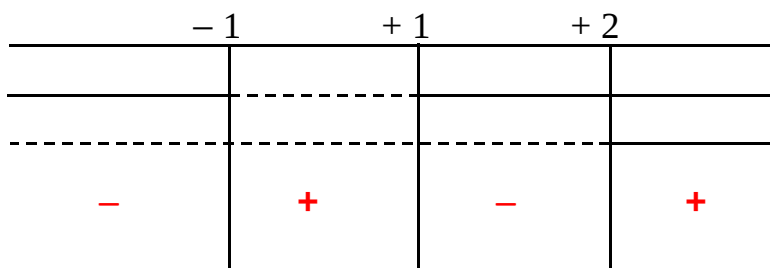
$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 2}}$$

Si tratta di una funzione irrazionale avente indice di radice pari e per radicando una frazione.

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Trattandosi di una funzione irrazionale con indice di radice pari, essa è definita solo per quei valori della x che rendono il radicando maggiore od uguale a zero. Inoltre, trattandosi di una frazione il denominatore dovrà essere diverso da zero. In altre parole bisogna risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 2} \geq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1, x \geq +1 \\ x > 2 \\ x \neq 2 \end{cases}$$



Quindi:

$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < +1, +2 < x < +\infty\} = [-1, +1] \cup]+2, +\infty[$$

Quindi la retta $x = 2$ è un asintoto verticale per la funzione.

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 2} > 0 \quad \forall x \in \text{C.E.}$$

In altre parole la funzione è sempre positiva dove è definita.

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = \sqrt{\frac{(0)^2 - 1}{0 - 2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,7 \Rightarrow A = \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$y = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x-2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = (-1, 0), C = (+1, 0)$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Calcoliamo ora il limite per x che tende sia a $+\infty$ (infatti per x che tende a $-\infty$ il limite non esiste in quanto per $x < -1$ la funzione non è definita!!!!).

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} \right) = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x-2} \right)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x} \right)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1} \right)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x)} = +\infty$$

Dunque la funzione data non ammette asintoti orizzontali.

DERIVATA PRIMA.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2-1}{x-2} \right)^{\frac{1}{2}-1} \left(\frac{2x(x-2) - (x^2-1) \cdot 1}{(x-2)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2-1}{x-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2x^2 - 4x - x^2 + 1}{(x-2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{x^2-1}{x-2} \right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}}} > 0 \\ \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x^2-1}{x-2}} > 0 \\ x^2 - 4x + 1 > 0 \\ (x-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

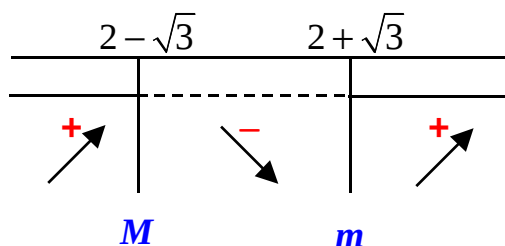
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in C.E. \text{ (si tratta di una radice con indice di radice pari!!!)} \\ x^2 - 4x + 1 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ (si tratta di un quadrato!!!)} \end{cases}$$

Basta pertanto risolvere la disequazione $x^2 - 4x + 1 > 0$. Troviamo le radici dell'equazione associata $x^2 - 4x + 1 = 0$. Si ha:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-1}}{1} = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0,26 \\ x_2 = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73 \end{cases}$$

Dunque:

$$y' > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 2 - \sqrt{3}, x > 2 + \sqrt{3}$$



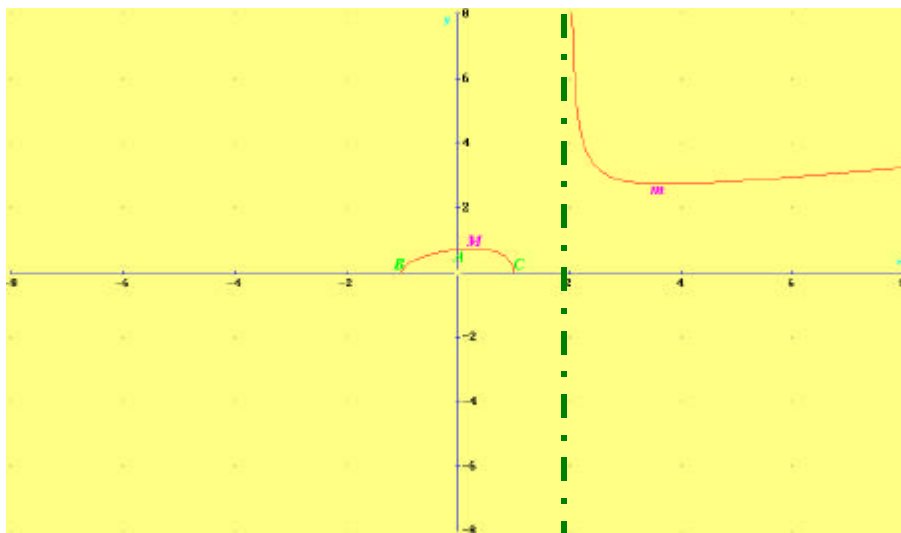
cioè la funzione data è crescente per $x < 2 - \sqrt{3}$, $x > 2 + \sqrt{3}$. In particolare $x = 2 - \sqrt{3}$ è un massimo ed $x = 2 + \sqrt{3}$ è un minimo per la funzione.

Ne segue che:

$$x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow y(x) = y(2 - \sqrt{3}) = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2 - 1}{(2 - \sqrt{3}) - 2}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2 - 1}{-\sqrt{3}}} \approx 0,73$$

$$x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow y(x) = y(2 + \sqrt{3}) = \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3})^2 - 1}{(2 + \sqrt{3}) - 2}} = \sqrt{\frac{(2 + \sqrt{3})^2 - 1}{+\sqrt{3}}} \approx 2,73$$

GRAFICO.



$x = 2$
A.V.

4) Studiare la seguente funzione esponenziale:

$$y = e^{-x^2+x+1}$$

Si tratta di una funzione esponenziale avente per esponente un polinomio.

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Sappiamo che la funzione esponenziale è definita su tutto l'asse reale. Inoltre, l'esponente è un polinomio, anch'esso definito su tutto l'asse reale. Quindi:

$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

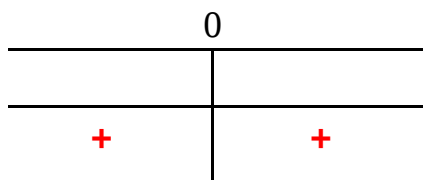
SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x+1} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

(una funzione esponenziale, indipendentemente dall'esponente, è sempre positiva!!!)

Quindi:

$$y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = e^{0+0+1} = e^1 = e \Rightarrow A = (0, e)$$

$$y = 0 \Rightarrow e^{-x^2+x+1} = 0 \Rightarrow \text{tale condizione non è mai verificata}$$

(una funzione esponenziale non interseca MAI l'asse delle x !!!)

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Bisogna studiare i limiti per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x^2+x+1}) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2+x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ A.O.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2+x+1}) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2+x+1)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ A.O.}$$

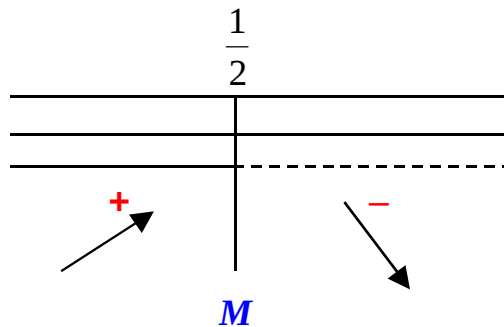
Dunque la funzione data ammette asintoti orizzontali.

DERIVATA PRIMA.

$$y' = e^{-x^2+x+1} \cdot (-2x+1)$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow e^{-x^2+x+1} \cdot (-2x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x^2+x+1} > 0 \\ -2x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

cioè la funzione data è crescente per $x < \frac{1}{2}$.



In particolare $x = \frac{1}{2}$ è un massimo per la funzione. Risulta:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y(x) = y\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 1} \approx 5,75$$

GRAFICO.

