

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TERAMO
FACOLTÀ DI SCIENZE POLITICHE

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA AZIENDALE
CORSO DI LAUREA IN STATISTICA

Prof. Franco EUGENI
Prof.ssa Daniela TONDINI

Parziale n. 2 - Compito III
A. A. 2002 – 2003

1) Studiare la seguente funzione polinomiale:

$$y = x^3 - 2x + 1$$

Il polinomio che abbiamo di fronte è di terzo grado e, pertanto, lo si può scomporre con la regola di Ruffini. Si ha, infatti:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & // \end{array}$$

da cui segue:

$$x^3 - 2x + 1 = (x - 1)(x^2 + x - 1)$$

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Trattandosi di una funzione polinomiale il suo campo di definizione è tutto l'asse reale, cioè:

$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} =]-\infty, +\infty[$$

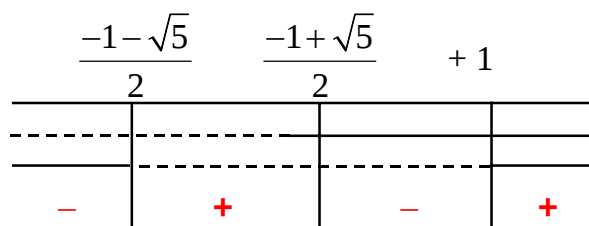
SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$$

Troviamo ora le radici dell'equazione:

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \approx -1,61 \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,61 \end{cases}$$

$$y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



Quindi:

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x > 1$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = (0)^3 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow A = (0, 1)$$

$$y = 0 \Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ oppure } x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ oppure } x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ oppure}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow B = (1, 0), C = \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, 0 \right), D = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 0 \right)$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione è definita su tutto l'asse reale bisogna andare a studiare i limiti per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

Dunque non esistono asintoti orizzontali della funzione.

DERIVATA PRIMA.

$$y' = 3x^2 - 2$$

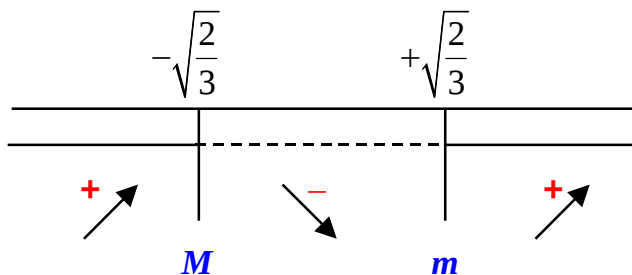
$$y' > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2 > 0$$

Consideriamo l'equazione associata e calcoliamo le sue soluzioni:

$$3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0,82$$

Dunque:

$$y' > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{\frac{2}{3}}, x > +\sqrt{\frac{2}{3}}$$



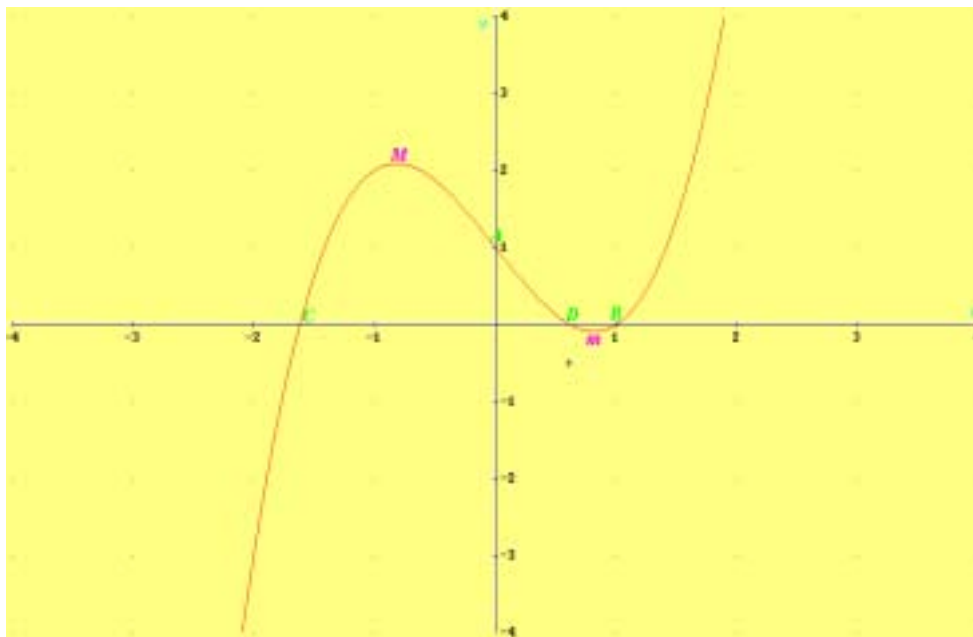
In particolare $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ è un massimo ed $x = +\sqrt{\frac{2}{3}}$ è un minimo per la funzione.

Ne segue che:

$$x = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow y(x) = y\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + 1 \approx 2,08$$

$$x = +\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow y(x) = y\left(+\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \left(+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 - 2\left(+\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + 1 \approx -0,08$$

GRAFICO.



2) Studiare la seguente funzione razionale fratta:

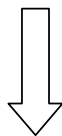
$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9}$$

Si tratta di una funzione razionale fratta in cui il numeratore ed il denominatore sono polinomi entrambi di secondo grado.

CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Trattandosi di una frazione il suo campo di definizione si ottiene ponendo il denominatore diverso da zero, cioè deve essere $x^2 - 9 \neq 0$, da cui $x \neq \pm 3$. Quindi:

$$\begin{aligned}\mathbf{C.E.} &= \{x \in R : x \neq \pm 3\} = \{x \in R : -\infty < x < -3, -3 < x < +3, +3 < x < +\infty\} = \\ &=]-\infty, -3[\cup]-3, +3[\cup]+3, +\infty[\end{aligned}$$



$x = -3$, $x = +3$ sono due asintoti verticali della funzione (A.V.)

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x^2 - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < -3, x > +3 \end{cases}$$

Quindi:

-3	$+3$	
$+$	$-$	$+$

$$y > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3, x > +3$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x=0 \Rightarrow y(x)=y(0)=\frac{(0)^2+1}{(0)^2-9}=\frac{1}{-9}=-\frac{1}{9} \Rightarrow A=\left(0, -\frac{1}{9}\right)$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \quad \text{MAI!!!! (è una somma di quadrati!!!!)}$$

(in generale una frazione è uguale a zero se e solo se il suo numeratore è nullo!!!)

Ne segue, pertanto, che non esistono intersezioni con l'asse delle x .

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Calcoliamo ora i limiti agli estremi del campo di esistenza, ovvero per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$, dal momento che in $x = \pm 3$ abbiamo già individuato due asintoti verticali della funzione.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 9} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 9} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right) = 1$$

$\Rightarrow y = 1 \quad \text{A.O.}$

Essendo il grado del numeratore uguale a quello del denominatore, il limite è pari al rapporto dei coefficienti della x di grado massimo.

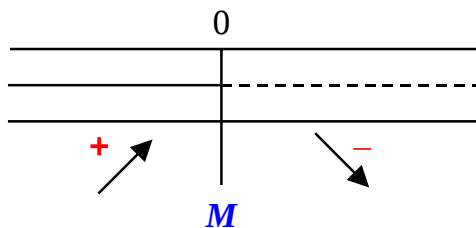
Dunque la retta $y = 1$ è un asintoto orizzontale della funzione.

DERIVATA PRIMA.

$$y' = \frac{2x(x^2 - 9) - (x^2 + 1)(2x)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{2x^3 - 18x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-20x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-20x}{(x^2 - 9)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -20x > 0 \\ (x^2 - 9)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (\text{poiché si tratta di un quadrato che è sempre positivo!!!})$$

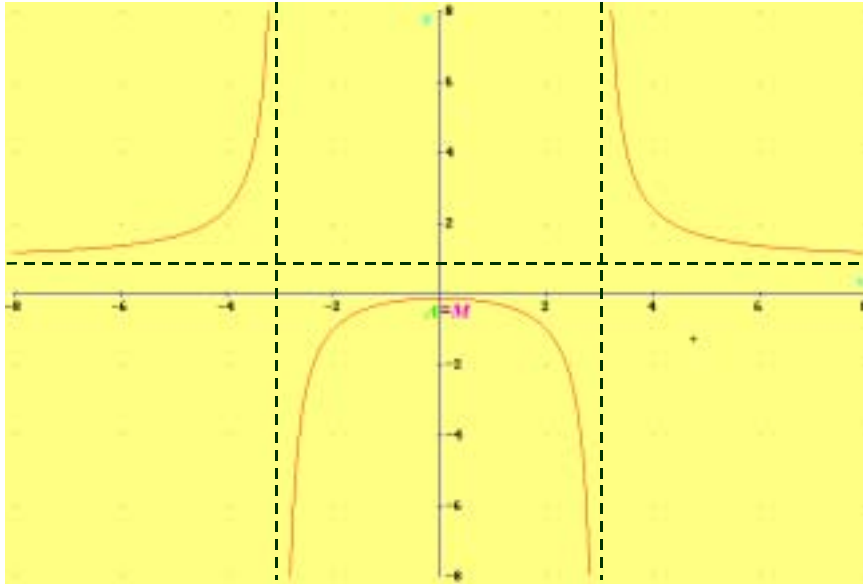


cioè la funzione data è crescente per $x < 0$. In particolare $x = 0$ è un massimo per la funzione.

Ne segue che:

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = \frac{(0)^2 + 1}{(0)^2 - 9} = \frac{1}{-9} = -\frac{1}{9} \Rightarrow M = \left(0, -\frac{1}{9} \right) \equiv A$$

GRAFICO.



$y = +1$ A.O.

$x = -3$
A.V.

$x = +3$
A.V.

3) Studiare la seguente funzione irrazionale:

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}}$$

Si tratta di una funzione irrazionale avente indice di radice dispari e per radicando una frazione.

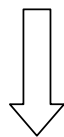
CAMPO DI ESISTENZA O CAMPO DI DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE.

Trattandosi di una funzione irrazionale con indice di radice dispari, essa è definita su tutto l'asse reale. Poiché, però, il radicando è una frazione, il denominatore dovrà essere diverso da zero. Quindi deve essere:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

cioè:

$$\begin{aligned} \text{C.E.} &= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1, -1 < x < +1, +1 < x < +\infty\} = \\ &= [-\infty, -1[\cup]-1, +1] \cup]+1, +\infty[\end{aligned}$$



$x = \pm 1$ sono due asintoti verticali per la funzione (A.V.)

SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x < -1, x > +1 \end{cases}$$

Quindi:

$$y > 0 \Leftrightarrow x < -1, x > +1$$

	-1		+1	
		- - - -		
+		-		+

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = \sqrt[3]{\frac{(0)^2 + 2}{(0)^2 - 1}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} \approx -1,25 \Rightarrow A = (0, -\sqrt[3]{2})$$

$$y = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}} = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow x^2 + 2 = 0 \quad \text{MAI!!!}$$

(si tratta di una somma di quadrati!!!)

Ne segue che la funzione non interseca mai l'asse delle x .

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Calcoliamo ora il limite per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$, in quanto abbiamo già osservato che per $x = \pm 1$ ci sono due asintoti verticali.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2+2}{x^2-1}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right)} = \sqrt[3]{1} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2+2}{x^2-1}} \right) = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2} \right)} = \sqrt[3]{1} = 1$$

$\Rightarrow y = 1 \text{ A.O.}$

Dunque la funzione data ammette come asintoto orizzontale la retta di equazione $y = 1$.

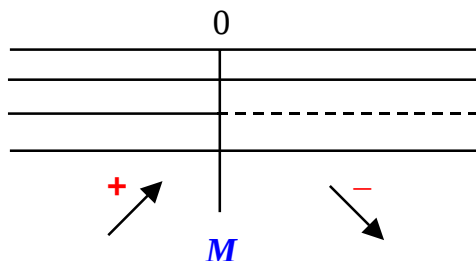
DERIVATA PRIMA.

$$y' = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^{\frac{1}{3}-1} \left(\frac{2x(x^2-1) - (x^2+2) \cdot (2x)}{(x^2-1)^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 4x}{(x^2-1)^2} \right) =$$
$$= \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{-6x}{(x^2-1)^2} \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^2}} \frac{-6x}{(x^2-1)^2}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^2}} \frac{-6x}{(x^2-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{x^2+2}{x^2-1} \right)^2}} > 0 \\ \frac{-6x}{(x^2-1)^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \text{ (poiché è un quadrato che è sempre positivo!!!)} \\ -6x > 0 \\ (x^2-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & (\text{poiché è un quadrato che è sempre positivo!!!}) \\ x < 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

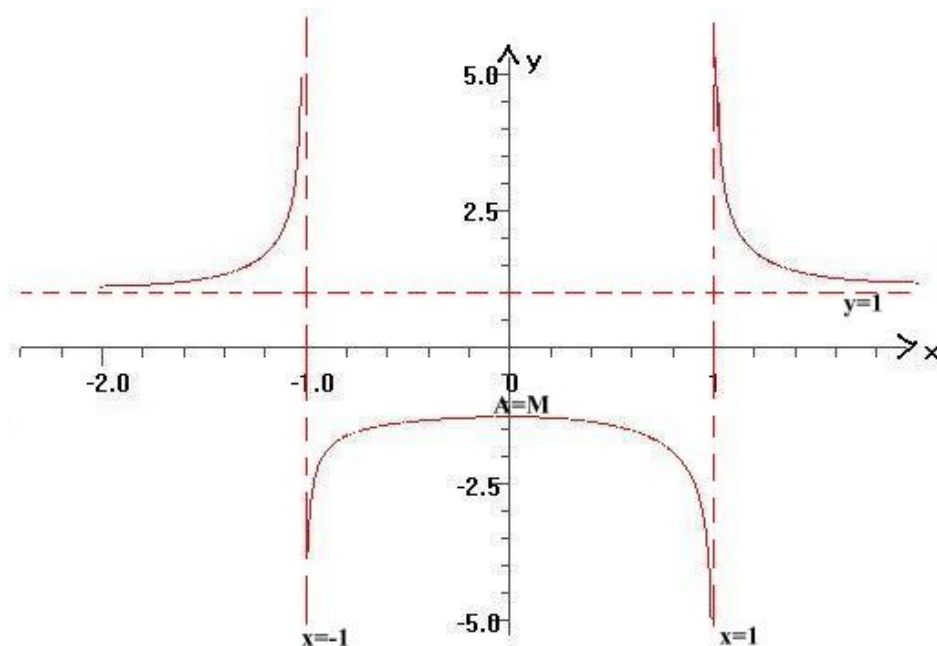


cioè la funzione data è crescente per $x < 0$. In particolare $x = 0$ è un massimo per la funzione.

Ne segue che:

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = \sqrt[3]{\frac{(0)^2 + 2}{(0)^2 - 1}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2} \approx -1,25 \Rightarrow M \equiv (0, -\sqrt[3]{2}) \equiv A$$

GRAFICO.



N. B. Per ragioni grafiche le unità di misura relative ai due assi sono diverse.

4) Studiare la seguente funzione esponenziale:

$$y = e^{x^3-1}$$

Si tratta di una funzione esponenziale avente per esponente un polinomio.

Sappiamo che la funzione esponenziale è definita su tutto l'asse reale. Inoltre, l'esponente è un polinomio, anch'esso definito su tutto l'asse reale. Quindi:

$$\text{C.E.} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}$$

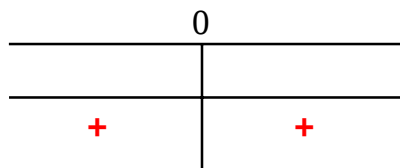
SEGNO DELLA FUNZIONE.

$$y > 0 \Leftrightarrow e^{x^3-1} > 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

(una funzione esponenziale, indipendentemente dall'esponente, è sempre positiva!!!)

Quindi:

$$y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

$$x = 0 \Rightarrow y(x) = y(0) = e^{(0)^3-1} = e^{-1} = \frac{1}{e^{+1}} = \frac{1}{e} \Rightarrow A = \left(0, \frac{1}{e}\right)$$

$$y = 0 \Rightarrow e^{x^3-1} = 0 \Rightarrow \text{tale condizione non è mai verificata}$$

(una funzione esponenziale non interseca MAI l'asse delle x!!!)

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Bisogna studiare i limiti per x che tende sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^3-1}) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x^3-1}) = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ A.O.}$$

Dunque la funzione data ammette solo un asintoto orizzontale per x che tende a $-\infty$.

DERIVATA PRIMA.

$$y' = e^{x^3-1} \cdot (3x^2)$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow e^{x^3-1} \cdot (3x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{x^3-1} > 0 \\ 3x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

cioè la funzione data è sempre crescente.

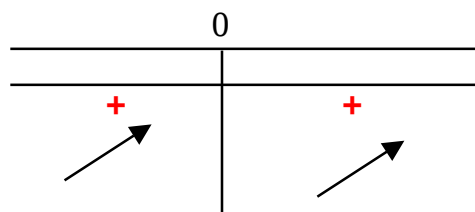


GRAFICO.

