

SOLUZIONI DELL'ESONERO PARZIALE 3
DI MATEMATICA
C.so di Laurea STATISTICA
21 – 01 – 04

1. $4\sqrt{x^3} yy' = 1 - y^2$

Equazione differenziale lineare omogenea del primo ordine a variabili separabili.

$$4\sqrt{x^3} yy' = 1 - y^2 \Rightarrow \frac{y}{1-y^2} y' = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \Rightarrow \int \frac{y}{1-y^2} dy = \frac{1}{4} \int x^{-\frac{3}{2}} dx \Rightarrow -\frac{1}{2} \int \frac{-2y}{1-y^2} dy = \frac{1}{4} \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \ln|1-y^2| = \frac{1}{4} \left(-\frac{3}{2}+1\right) x^{-\frac{1}{2}} + c \Rightarrow -\frac{1}{2} \ln|1-y^2| = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} + c \Rightarrow \ln|1-y^2| = \frac{1}{\sqrt{x}} + c \Rightarrow$$

$$1-y^2 = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}+c} \Rightarrow 1-y^2 = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot e^c \text{ posto } e^c = c_1 \text{ si ha } y^2 = 1 - e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot c_1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \left(e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot c_1\right)}$$

2. $y' = (ctgx)y + \sin x$

Equazione differenziale del primo ordine non omogenea.

Si può risolvere in due modi:

a) $y' = (ctgx)y + \sin x \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} y + \sin x$

Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione lineare omogenea associata a quella data:

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \Rightarrow \ln|y| = \ln|\sin x| + c \Rightarrow y = \sin x \cdot c_1(x)$$

posto $e^c = c_1(x)$

Calcoliamo la derivata prima di y:

$$y' = \cos x \cdot c_1(x) + c_1'(x) \cdot \sin x$$

e andiamo a sostituire nell'equazione data:

$$\cos x \cdot c_1(x) + c_1'(x) \cdot \sin x = \frac{\cos x}{\sin x} (\sin x \cdot c_1(x)) + \sin x \Rightarrow \cos x \cdot c_1(x) + c_1'(x) \sin x = \cos x \cdot c_1(x) + \sin x$$

$$\Rightarrow c_1'(x) \sin x = \sin x \Rightarrow c_1'(x) = 1 \Rightarrow c_1(x) = \int dx \Rightarrow c_1(x) = x + c_2$$

Sostituiamo il valore di $c_1(x)$ nell'integrale generale:

$$y = \sin x(x + c_2)$$

b) L'equazione differenziale $y' = (\operatorname{ctgx})y + \sin x$ è del tipo:

$$y' = a(x)y + b(x)$$

quindi essendo $a(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ si ha $A(x) = \ln|\sin x|$ essendo $A(x)$ una primitiva di $a(x)$ e, applicando la formula risolutiva, si ha:

$$y = e^{\ln|\sin x|} \cdot \int e^{-\ln|\sin x|} \cdot \sin x dx \Rightarrow y = \sin x \cdot \int \frac{1}{\sin x} \cdot \sin x dx \Rightarrow y = \sin x \cdot \int dx \Rightarrow y = \sin x \cdot (x + c)$$

$$3. \quad y' = \frac{(\log x)y}{x}$$

Equazione differenziale del primo ordine lineare omogenea a variabili separabili.

$$y' = \frac{(\log x)y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\log x}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = \int \frac{\log x}{x} dx$$

L'integrale $\int \frac{\log x}{x} dx$ si può risolvere per parti ponendo come *fattore finito*

$$f(x) = \log x \Rightarrow f'(x)dx = \frac{1}{x} dx \quad \text{e come } \textit{fattore differenziale} \quad g'(x)dx = \frac{1}{x} dx \Rightarrow g(x) = \log x \text{ da cui}$$

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \log x \cdot \log x - \int \frac{\log x}{x} dx \Rightarrow 2 \int \frac{\log x}{x} dx = \log^2 x \Rightarrow \int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2} \log^2 x + c \quad \text{quindi}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \log^2 x + c \Rightarrow y = c_1 \cdot e^{\frac{\log^2 x}{2}} \quad \text{posto } e^c = c_1.$$

$$4. \quad y' = \frac{2y}{x} + \frac{x+1}{x}$$

Equazioni differenziale lineare del primo ordine non omogenea a variabili separabili.

Calcoliamo prima l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a quella data

$$y' = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = 2 \ln|x| + c \Rightarrow y = x^2 \cdot c_1(x)$$

Calcoliamo la derivata prima di y :

$$y' = 2x \cdot c_1(x) + x^2 \cdot c_1'(x) \quad \text{e sostituiamo nell'equazione differenziale data:}$$

$$2x \cdot c_1(x) + x^2 \cdot c_1'(x) = \frac{2x^2 \cdot c_1(x)}{x} + \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 \cdot c_1'(x) = \frac{x+1}{x} \Rightarrow c_1'(x) = \frac{x+1}{x^3}$$

$$c_1(x) = \int \frac{x+1}{x^3} dx \Rightarrow c_1(x) = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^3} dx \Rightarrow c_1(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c_2 \quad \text{quindi sostituendo il valore}$$

di $c_1(x)$ nell'integrale generale si ottiene:

$$y = x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c_2 \right) \Rightarrow y = -x - \frac{1}{2} + c_2 \cdot x^2.$$

$$5. \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Equazione differenziale lineare che si risolve per sostituzione

$$\text{Poniamo } \frac{y}{x} = z \Rightarrow y = zx \quad \text{e} \quad y' = z + xz'$$

Sostituendo nell'equazione data si ha:

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \Rightarrow z + xz' = \frac{1}{z} + z \Rightarrow xz' = \frac{1}{z} \quad \text{equazione differenziale a variabili separabili}$$

$$xz' = \frac{1}{z} \Rightarrow zz' = \frac{1}{x} \Rightarrow \int z dz = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{z^2}{2} = \ln|x| + c \Rightarrow z^2 = 2\ln|x| + c \Rightarrow z = \pm \sqrt{2\ln|x| + c}$$

Ricavando la y si ottiene:

$$y = \pm x \cdot \sqrt{2\ln|x| + c}$$

6. L'equazione differenziale associata al problema di Cauchy è una lineare omogenea di primo grado a variabili separabili. Calcoliamone l'integrale generale:

$$y' = \frac{1-y}{x} \Rightarrow \frac{y'}{1-y} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{1-y} dy = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow -\ln|1-y| = \ln|x| + c \Rightarrow \ln\left|\frac{1}{1-y}\right| = \ln|x| + c \Rightarrow \frac{1}{1-y} = x \cdot c_1$$

posto $e^c = c_1$ da cui

$$1 - y = \frac{1}{x \cdot c_1} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{x \cdot c_1}$$

Poiché dal testo risulta $y(1) = 0$ deve essere

$$1 - \frac{1}{1 \cdot c_1} = 0 \Rightarrow \frac{c_1 - 1}{c_1} = 0 \Rightarrow c_1 = 1.$$