

ESERCIZIO n.1

Calcolare l'integrale della funzione $y = 3x$ nell'intervallo $[1; 2]$ con il metodo di esaustione e verificare per via geometrica il risultato ottenuto.

SOLUZIONE

Si suddivide l'intervallo d'integrazione in n intervalli uguali ciascuno di ampiezza

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}.$$

Gli estremi di ciascuno intervallo saranno:

$$a = 1; x_1 = 1 + \frac{1}{n}; x_2 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{n}; \dots; x_{n-1} = 1 + (n-1) \frac{1}{n}; x_n = b = 2$$

La funzione è crescente nell'intervallo considerato, per cui lo sarà anche nei singoli intervalli parziali e assumerà il valore minimo nel primo estremo e quello massimo nel secondo estremo, come riportato dalla seguente tabella:

<u>Intervalli</u>	m_i	M_i
$\left[1, 1 + \frac{1}{n}\right]$	3	$3\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
$\left[1 + \frac{1}{n}, 1 + 2 \cdot \frac{1}{n}\right]$	$3\left(1 + \frac{1}{n}\right)$	$3\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{n}\right)$
.....		
$\left[1 + \frac{n-1}{n}, 2\right]$	$3\left(1 + \frac{n-1}{n}\right)$	6

Le somme integrali inferiori e superiori sono:

$$s_n = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + \dots + m_n \Delta x$$
$$s_n = 3 \cdot \frac{1}{n} + 3\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + \dots + 3\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \frac{1}{n}$$

e

$$S_n = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + \dots + M_n \Delta x$$
$$S_n = 3\left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + 3\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} + \dots + 6$$

s_n e S_n rappresentano due progressioni aritmetiche la cui somma è data in generale da

$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ con a_1 e a_n primo ed ultimo termine rispettivamente.

Nel caso in esame si ha:

$$s_n = \frac{n}{2} 3 \left(1 + 1 + \frac{n-1}{n} \right) \frac{1}{n} = \frac{3}{2} \left(2 + \frac{n-1}{n} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{2n+n-1}{n} \right) = \frac{9n-3}{2n}$$

e

$$S_n = \frac{n}{2} 3 \left(1 + \frac{1}{n} + 6 \right) \frac{1}{n} = \frac{n}{2} \left(3 + \frac{3}{n} + 6 \right) \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{3n+3+6n}{n} \right) = \frac{9n+3}{2n}$$

Passando ai limiti di tali successioni si ottiene:

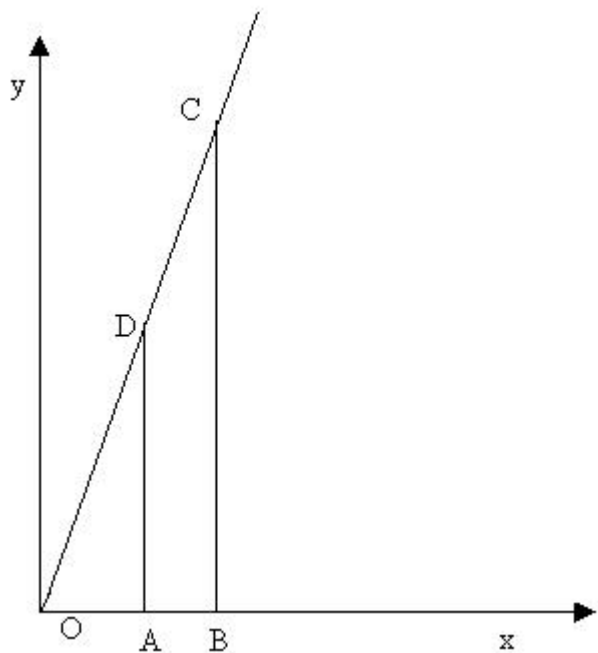
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n-3}{2n} = \frac{9}{2}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n+3}{2n} = \frac{9}{2}$$

Come si osserva i limiti delle due successioni convergono ad uno stesso valore che rappresenta l'area richiesta.

Per verificare geometricamente il valore dell'area basta considerare la rappresentazione della retta $y=3x$ in un piano cartesiano:



L'area in questione è l'area del quadrilatero ABCD che si ottiene:

$$A(ABCD) = A(BOC) - A(AOD)$$

Quindi:

$$A(ABCD) = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$$

$$A(AOD) = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$A(ABCD) = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

ESERCIZIO n.2

Enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia $y = f(x)$ una funzione integrabile nell'intervallo $[a ; b]$ e quindi integrabile in ogni intervallo $[a ; x]$, con $x \in [a, b]$; detta

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

funzione integrale della $f(x)$ in $[a ; b]$ allora

la funzione $F(x)$ è derivabile in ogni punto in cui la $f(x)$ è continua e in tali punti risulta

$$F'(x) = f(x).$$

ESERCIZIO n.3

Calcolare i seguenti integrali:

a) $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2} dx$

b) $\int \frac{x^2}{1-x^3} dx$

c) $\int \frac{x}{x-3} dx$

d) $\int \frac{2e^x}{4+3e^x} dx$

e) $\int \frac{1}{x(2+\ln 3x)} dx$

f) $\int \frac{-x^3 + 7x^2 + 10x - 32}{x^2 - 4} dx$

g) $\int \frac{1}{x^2 - x - 6} dx$

SOLUZIONE

L'integrale a) si può calcolare dividendo ogni termine del numeratore per il denominatore e quindi procedendo per decomposizione:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2} dx &= \int \left(\frac{2x^3}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) dx = 2 \int x dx + 3 \int dx + \int x^{-2} dx = \\ &= \frac{2x^2}{2} + 3x + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = x^2 + 3x - \frac{1}{x} + c \end{aligned}$$

L'integrale b) si può risolvere con l'integrazione immediata osservando che, a meno di un fattore moltiplicativo, il numeratore è la derivata del denominatore; pertanto, moltiplicando e dividendo per -3, si ottiene:

$$\text{b) } \int \frac{x^2}{1-x^3} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{-3x^2}{1-x^3} dx = -\frac{1}{3} \ln|1-x^3| + c$$

Per risolvere **l'integrale c)** basterà aggiungere +3 e -3 al numeratore e poi procedere per decomposizione:

$$\begin{aligned} \text{c) } \int \frac{x}{x-3} dx &= \int \frac{x-3+3}{x-3} dx = \int \left(\frac{x-3}{x-3} + \frac{3}{x-3} \right) dx = \int dx + 3 \int \frac{1}{x-3} dx = \\ &= x + 3 \ln|x-3| + c \end{aligned}$$

Anche nel caso dell'**integrale d)** si può procedere con l'integrazione immediata: infatti, a meno del fattore moltiplicativo 3, il numeratore è la derivata del denominatore:

$$\text{d) } \int \frac{2e^x}{4+3e^x} dx = 2 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{3e^x}{4+3e^x} dx = \frac{2}{3} \ln(4+3e^x) + c$$

Osserviamo che nella primitiva non compare l'argomento in valore assoluto, essendo questo sempre positivo.

L'integrale e) è di immediata risoluzione, se si osserva che, a meno del fattore moltiplicativo 3, $\frac{1}{x}$ è la derivata del $\ln$, quindi:

$$\text{e) } \int \frac{1}{x(2+\ln 3x)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3 \frac{1}{x}}{2+\ln 3x} dx = \frac{1}{3} \ln|2+3x| + c$$

Per risolvere **l'integrale f)** si potrà procedere utilizzando innanzitutto il metodo di decomposizione, dopo aver osservato che, nella funzione integranda, poiché il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, si può effettuare la divisione tra i due polinomi, ricordando che è valida l'eguaglianza $\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$ con $Q(x)$ e $R(x)$ rispettivamente quoziente e resto della divisione tra numeratore e denominatore.

Dividiamo con il metodo tradizionale i due polinomi:

$-x^3$	$+7x^2$	$+10x$	$+32$	$x^2 - 4$
$+x^3$		$-4x$		$-x+7$
0				
	$+7x^2$	$+6x$	-32	
	$-7x^2$		$+28$	
0				
		$+6x$	-4	

Risulterà per quanto detto in precedenza:

$$\frac{-x^3 + 7x^2 + 10x + 32}{x^2 - 4} = -x + 7 + \frac{6x - 4}{x^2 - 4}$$

e quindi:

$$f) \int \frac{-x^3 + 7x^2 + 10x - 32}{x^2 - 4} dx = \int \left(-x + 7 + \frac{6x - 4}{x^2 - 4} \right) dx = -\int x dx + 7 \int dx + \int \frac{6x - 4}{x^2 - 4} dx \quad (*)$$

I primi due integrali sono di risoluzione immediata, mentre per risolvere il terzo bisogna applicare alla funzione integranda il principio di identità dei polinomi; cioè:

$$\frac{6x - 4}{x^2 - 4} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 2}$$

e determinare il valore di A e B .

$$\begin{aligned} \frac{6x - 4}{x^2 - 4} &= \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 2} \\ \frac{6x - 4}{x^2 - 4} &= \frac{A(x - 2) + B(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} \Rightarrow \frac{6x - 4}{x^2 - 4} = \frac{Ax - 2A + Bx + 2B}{(x + 2)(x - 2)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{6x-4}{x^2-4} = \frac{(A+B)x + (2B-2A)}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=6 \\ B-A=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=6-B \\ 2B=4 \end{cases} \quad \text{quindi in definitiva:}$$

$$\begin{cases} B=2 \\ A=4 \end{cases} \quad \text{cioè:} \quad \frac{6x-4}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \Rightarrow \frac{6x-4}{x^2-4} = \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2}$$

Pertanto sostituendo nella (*) si ha:

$$\begin{aligned} &= \int \left(-x + 7 + \frac{6x-4}{x^2-4} \right) dx = -\int x dx + 7 \int dx + \int \frac{6x-4}{x^2-4} dx = \\ &= -\frac{x^2}{2} + 7x + \int \left(\frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} \right) dx = -\frac{x^2}{2} + 7x + 4 \int \frac{1}{x+2} dx + 2 \int \frac{1}{x-2} dx = \\ &= -\frac{x^2}{2} + 7x + 4 \ln|x+2| + 2 \ln|x-2| \end{aligned}$$

L'integrale g) si risolve applicando alla funzione integranda il principio di identità dei polinomi e quindi il metodo di decomposizione.

$$\frac{1}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x^2-x-6} = \frac{A(x-3) + B(x+2)}{(x+2)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-x-6} = \frac{Ax-3A+Bx+2B}{(x+2)(x-3)} \Rightarrow \frac{1}{x^2-x-6} = \frac{(A+B)x + (2B-3A)}{(x+2)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B-3A=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-B \\ 2B+3B=1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = \frac{1}{5} \\ A = -\frac{1}{5} \end{array} \right. \quad \text{E quindi risulta}$$

$$\frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{-\frac{1}{5}}{x+2} + \frac{\frac{1}{5}}{x-3}$$

Pertanto:

$$\int \frac{1}{x^2 - x - 6} dx = \int \left(-\frac{\frac{1}{5}}{x+2} + \frac{\frac{1}{5}}{x-3} \right) dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-3} dx =$$

$$= -\frac{1}{5} \ln|x+2| + \frac{1}{5} \ln|x-3| + c$$