

LO SPAZIO DEI VETTORI ORDINARI¹

1. L'INSIEME DEI VETTORI ORDINARI

Iniziamo il paragrafo con il fissare la nostra attenzione sul ben noto concetto di **segmento orientato**. Un segmento orientato, di primo estremo A e di secondo estremo B (con $B \neq A$), verrà indicato con $\overrightarrow{AB}$; mentre un segmento non orientato, sempre di estremi A e B, verrà indicato con $[AB]$.

Indicheremo con $\overline{AB}$ la misura o il modulo del segmento non orientato $[AB]$ rispetto ad una data unità di misura u . denoteremo con S l'insieme di tutti i segmenti orientati dello spazio.

Dati due segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ diremo che il segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ è **equipollente** al segmento orientato $\overrightarrow{CD}$ e scriveremo:

$$\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$$

se si verificano le seguenti condizioni:

- a) $\overline{AB} = \overline{CD}$ (rispetto ad una qualunque unità di misura);
- b) la retta AB è parallela alla retta CD (parallele o coincidenti);
- c) verso di $\overrightarrow{AB} =$ verso di $\overrightarrow{CD}$.

In altre parole due segmenti si dicono **equipollenti** se hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e lo stesso verso.

TEOREMA

La relazione “essere equipollenti” è una relazione di equivalenza.

DIMOSTRAZIONE. Occorre provare che la relazione “**essere equipollenti**” verifica le proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

1) Riflessiva

Si ha banalmente $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{BA}$ in quanto:

$$\overline{AB} = \overline{BA}; \text{ retta } AB = \text{retta } BA; \text{ verso } AB = \text{verso } BA.$$

2) Simmetrica

Supposto $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{CD}$ si deve provare che $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{AB}$. Ciò segue dal fatto che le tre condizioni a), b), c) sono simmetriche.

¹A cura del Prof. FRANCO Eugeni – Ordinario presso l'Università di Teramo e della Prof.ssa ANNAMARIA VICECONTE – Università di Teramo

3) Transitiva

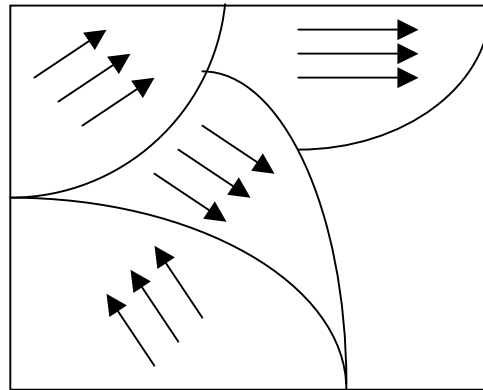
Supposto che sia $AB \cong CD$ e $CD \cong HK$ proviamo che: $AB \cong HK$.

Se $AB \cong CD$ e $CD \cong HK$ allora:

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{HK}$;
- b) la retta AB è parallela alla retta CD parallela alla retta HK ;
- c) $\text{verso } AB = \text{verso } CD = \text{verso } HK$

da cui l'asserto.

Poiché la relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza possiamo *ripartire* l'insieme S in *classi* di segmenti equipollenti.



L'insieme quoziente $S/\cong$, cioè l'insieme di tutte le possibili classi di equipollenza, sarà denotato con $\mathbb{V}_0$ e le classi, ovvero gli elementi di $\mathbb{V}_0$, si chiameranno **vettori** (liberi).

Un generico vettore si indicherà con $\overrightarrow{AB}$ o anche con una lettera minuscola sormontata da una freccia:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \{HK: HK \in S, HK \cong AB\}$$

Il segmento orientato $AB \in \overrightarrow{AB}$ si dice **rappresentante** del vettore $\overrightarrow{AB}$.

All'insieme $\mathbb{V}_0$ si aggiunge un elemento esterno che prende il nome di **vettore nullo** e si denota con $\vec{0}$. Da un punto di vista intuitivo tale elemento si introduce come derivante dall'idea intuitiva di segmento nullo. Come nuova classe di equivalenza, avrà per elementi “*tutti i punti dello spazio ovvero tutti i segmenti nulli*”. Porremo nel seguito

$$\mathbb{V} := \mathbb{V}_0 \cup \{\vec{0}\} := S/\cong \cup \{\vec{0}\}$$

L'insieme $\mathbb{V}$ si dirà **sostegno dello spazio vettoriale ordinario**. A volte un rappresentante AB di un vettore ordinario $\vec{u}$ si dirà anche **vettore applicato** in A . Se

$\vec{u}$ è un vettore, con u si indica il suo **modulo** rispetto all'unità di misura fissata. Un vettore di modulo unitario sarà detto **versore**.

Dato un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$, chiamiamo **vettore opposto** di $\vec{u}$ il vettore $\vec{v}$ tale che:

$$\vec{v} = \begin{array}{l} \text{stesso modulo di } \vec{u} \\ \text{stessa direzione di } \vec{u} \\ \text{verso opposto ad } \vec{u} \end{array}$$

e porremo per definizione $\vec{v} := -\vec{u}$.

2. LA STRUTTURA ALGEBRICA DELLO SPAZIO DEI VETTORI ORDINARI.

Introduciamo ora alcune operazioni su $\mathbb{V}$.

Definiamo l'**addizione** (+) tra due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ definendo la **somma** di due vettori come segue:

a) se almeno uno dei due vettori è nullo, si pone:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{0} &= \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} & \forall \vec{u} \in \mathbb{V} \\ \vec{0} + \vec{0} &= \vec{0} \end{aligned}$$

b) se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} = -\vec{u}$ allora per definizione di opposto si ha:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

c) se invece $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ ed inoltre i due vettori non sono opposti, si pone

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$$

$\vec{w}$ si dice **somma** dei vettori dati e si costruisce nel modo seguente:

si fissa in modo arbitrario un punto **O** nello spazio (fig. 1) e si considerano i segmenti OP e OQ tali che:

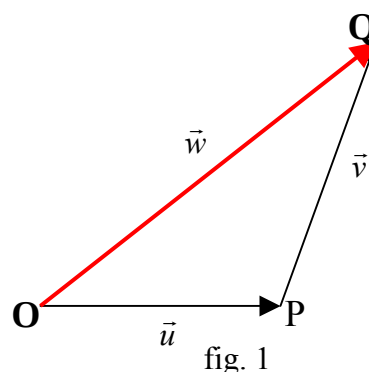
$$OP \in \vec{u} \quad \text{oppure} \quad \overrightarrow{OP} = \vec{u}$$

$$PQ \in \vec{v} \quad \text{oppure} \quad \overrightarrow{PQ} = \vec{v}$$

unendo O con Q si ottiene il segmento non nullo

OQ (essendo $Q \neq O$) che determina il vettore $\vec{w}$

tale che $OQ \in \overrightarrow{OQ} = \vec{w}$.



OSSERVAZIONE Può sembrare a prima vista che il vettore $\vec{w}$ somma di due vettori dipenda dalla scelta del punto O; dimostriamo che il vettore $\vec{w}$ non dipende dalla scelta iniziale del punto O.

Infatti se consideriamo altri due segmenti $O'P'$ e $P'Q'$ (equipollenti ai precedenti), essi per composizione forniscono un segmento $O'Q'$ che è equipollente ad OQ.

Occupiamoci ora delle principali **proprietà** della somma di vettori.

1) Proprietà commutativa

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V} \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

- Se almeno uno dei vettori è nullo, allora la proprietà commutativa è verificata per la definizione di un vettore con il vettore nullo.
- Se i due vettori sono uno l'opposto dell'altro, in qualunque ordine si sommino danno il vettore nullo.
- Se i due vettori non sono opposti e non sono nulli, allora

si fissi un punto O (fig. 2) e si costruiscano a partire da O due segmenti orientati $OP \in \vec{u}$ e

$PR \in \vec{v}$; segue che

$$\overrightarrow{OR} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Sempre a partire da O costruiamo $OQ \in \vec{v}$ e

$QR' \in \vec{u}$. Si ha ovviamente $R \equiv R'$, quindi

$$\overrightarrow{OR} = \vec{v} + \vec{u}.$$

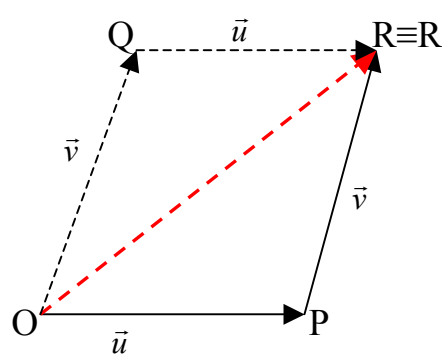


fig. 2

OSSERVAZIONE La prova della *proprietà commutativa* va sotto il nome di **regola del parallelogramma**.

2) Proprietà associativa

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V} \quad \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

Per la dimostrazione distinguiamo tre casi.

- Se almeno uno dei tre vettori è nullo, la prova è banale.
- Supponiamo che due consecutivi dei tre vettori siano tra loro opposti. Sia ad esempio $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, da ciò deriva che il secondo membro dell'uguaglianza è $\vec{w}$. Facciamo vedere che anche il primo membro è eguale a $\vec{w}$.
Siano allora

$$OP \in \vec{u}, PQ \in \vec{v}, QR \in \vec{w}.$$

Essendo $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ risulta $Q = O$ e quindi

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OP} + (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OR}) = \overrightarrow{OR} = \vec{w}$$

- supponiamo ora che i tre vettori siano non nulli e che due consecutivi non siano opposti.

Consideriamo, riferendoci alla fig. 3, i segmenti orientati

$$OP \in \vec{u}, PQ \in \vec{v}, QK \in \vec{w}.$$

Costruiamo $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ e $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

separatamente.

A partire dal punto P il segmento orientato $PK \in (\vec{v} + \vec{w})$ e $OK \in \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$; quindi il

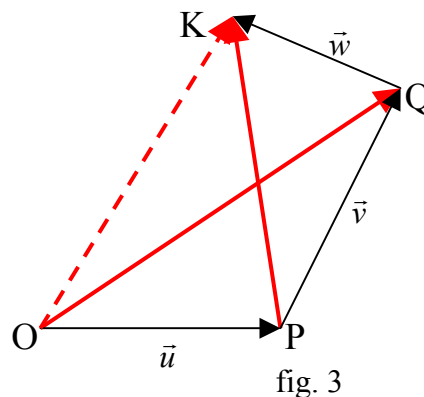
segmento orientato $OQ \in (\vec{u} + \vec{v})$ e $OK \in (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

Risulta pertanto

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PK} = \overrightarrow{OK} \quad \text{e}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QK} = \overrightarrow{OK}$$

da cui l'asserto.



La seconda operazione che definiamo è la **moltiplicazione** di un numero per un vettore o **moltiplicazione scalare**.

Allo scopo definiamo il risultato dell'operazione e lo chiamiamo **prodotto di un vettore per uno scalare**.

Diciamo **prodotto** per uno scalare $\lambda \vec{u}$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{V}$) il vettore che gode delle seguenti proprietà:

- a) se $\lambda = 0$ oppure $\vec{u} = \vec{0}$ oppure $\lambda = 0$ e $\vec{u} = \vec{0}$ si pone $\lambda \vec{u} = \vec{0}$
- b) se $\lambda > 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$ il prodotto $\lambda \vec{u}$ è un vettore avente la *stessa direzione* e lo *stesso verso* di $\vec{u}$ e *modulo* dato dal prodotto λu , essendo u il modulo di $\vec{u}$.
- c) se $\lambda < 0$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$ allora $\lambda \vec{u}$ è un vettore avente la *stessa direzione* di $\vec{u}$, *verso opposto* ad $\vec{u}$ e *modulo* dato dal prodotto del valore assoluto di λ per il modulo di $\vec{u}$, cioè da $(|\lambda|u)$.
Il modulo λu dipende solo dalla scelta dell'unità di misura di $\vec{u}$ dato che λ è un numero puro.

Proviamo ora alcune importanti **proprietà** della moltiplicazione scalare.

1)
$$1 \vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}$$

Ovvio.

2)
$$(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}$$

Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ il vettore $(\alpha \vec{u} + \beta \vec{u})$ ha modulo $(\alpha u + \beta u)$ e direzione e verso di $\vec{u}$, cioè di $(\alpha + \beta) \vec{u}$.

Analogamente si dimostrano gli altri casi relativi ai segni di α e di β .

3)
$$\alpha \times (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \times \vec{u} + \alpha \times \vec{v} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$$

Si può provare nell'ipotesi di $\alpha > 0$.

In entrambi i casi ($0 < \alpha < 1$ e $\alpha > 1$) α è il rapporto di similitudine tra OA e OA' e AB e $A'B'$. Il rapporto si conserva anche per il terzo lato.

$$4) \quad \alpha (\beta \vec{u}) = (\alpha \beta) \vec{u} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}$$

Si noti che sono ovvi i seguenti casi:

$$(-1) \times \vec{u} = -\vec{u}$$

$$\alpha \times \vec{u} = S(\alpha) \vec{u} \quad (\text{con } S(\alpha) = \text{segno di } \alpha)$$

Inoltre risulta:

$$\alpha (\beta \times \vec{u}) = S(\alpha) |\alpha| \left[S(\beta) |\beta| \times \vec{u} \right] = S(\alpha) S(\beta) \left[|\alpha| \left[|\beta| \times \vec{u} \right] \right]$$

I vettori $|\alpha| \left[|\beta| \vec{u} \right]$ e $\left[|\alpha| |\beta| \right] \vec{u}$ coincidono avendo stesso modulo, stessa

direzione e stesso verso, dunque

$$\alpha (\beta \times \vec{u}) = S(\alpha) S(\beta) \left[\left[|\alpha| |\beta| \right] \vec{u} \right] = \alpha \beta \vec{u}$$

cioè l'asserto.

3. DIPENDENZA ED INDIPENDENZA LINEARE

Nel presente paragrafo vogliamo illustrare una nozione fondamentale, la nozione di **indipendenza lineare**. Tale nozione si ritroverà più avanti, in altri ambienti, come gli spazi vettoriali numerici e non, pertanto è opportuno fin dall'inizio comprendere bene il concetto.

Siano assegnati n vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ n numeri reali o scalari. Si chiama **vettore combinazione lineare** degli n vettori dati, tramite gli n scalari, il vettore

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

Supponiamo assegnati i vettori $\vec{u}_i$ (con $i = 1, 2, \dots, n$) e trattiamo come variabili gli scalari λ_i (con $i = 1, 2, \dots, n$). Ha senso considerare la seguente **equazione vettoriale** nelle incognite λ_i e coefficienti $\vec{u}_i$

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0} \quad (1)$$

Le soluzioni dell'equazione (1) sono n-pole ordinate $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ di numeri reali. Una di esse è quella ottenuta ponendo le a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) tutte eguali a 0. tale soluzione si dirà **soluzione nulla** o **banale** della (1).

La (1) naturalmente potrà essere verificata anche da valori delle a_i non tutti nulli.

ESEMPIO

Dati i vettori $\vec{u}, -\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e considerate l'equazione

$$\lambda_1 (\vec{u}) + \lambda_2 (-\vec{u}) + \lambda_3 (\vec{v}) + \lambda_4 (\vec{w}) = \vec{0}$$

Si ha

$$1 \vec{u} + 1(-\vec{u}) + 0 \vec{v} + 0 \vec{w} = 1 (\vec{u} - \vec{u}) = \vec{0}$$

Dunque esiste la soluzione $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (1, 1, 0, 0) \neq (0, 0, 0, 0)$; si osserva inoltre che ogni quaterna del tipo $(h, h, 0, 0)$ è soluzione.

Può accadere quindi che la (1), oltre alla soluzione nulla, ammetta anche altre soluzioni.

Dati n vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$, essi si dicono **linearmente indipendenti** (L. I.), se l'equazione nelle incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0} \quad (2)$$

ha *soltanto* la soluzione nulla, cioè se

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Gli n vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ si dicono invece **linearmente dipendenti** (L. D.) se l'equazione (2), oltre alla soluzione nulla, ne ammette anche altre non nulle.

OSSERVAZIONE E' importante osservare che se $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ è una soluzione non nulla della (2) e se $k \neq 0$, allora anche la n-pla $(kc_1, kc_2, \dots, kc_n)$ è soluzione della (2). Inoltre se $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ è un' ulteriore soluzione della (2), allora anche le n-pole $(kc_1 + hd_1, kc_2 + hd_2, \dots, kc_n + hd_n)$ con k, h numeri reali sono soluzioni. In altre parole, se esistono soluzioni non nulle della (2) esse sono **infinite**.

Il teorema seguente è fondamentale per il calcolo vettoriale.

TEOREMA

Dati n vettori e sia $m \leq n$. Se m vettori tra gli n dati sono L. D., allora tutti gli n vettori sono L. D.

DIMOSTRAZIONE Siano $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ n vettori assegnati, possiamo supporre che gli m tra essi che per ipotesi sono L. D. siano i primi m

$$\underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_m}_{\text{L. D.}}, \dots, \vec{u}_n$$

Relativamente ad essi, essendo L. D., si ha

$$c_1 \vec{u}_1 + c_2 \vec{u}_2 + \dots + c_m \vec{u}_m = \vec{0}$$

con

$$(c_1, c_2, \dots, c_m) \neq (0_1, 0_2, \dots, 0_m).$$

Ne segue allora che l'equazione nelle incognite h_i con $i = 1, 2, \dots, n$

$$h_1 \vec{u}_1 + h_2 \vec{u}_2 + \dots + h_m \vec{u}_m + h_{m+1} \vec{u}_{m+1} + \dots + h_n \vec{u}_n = \vec{0}$$

ha come soluzione la n -pla

$$(c_1, c_2, \dots, c_m, 0_{m+1}, \dots, 0_n) \neq (0_1, 0_2, \dots, 0_m)$$

e quindi ciò significa che gli n vettori sono L. D. come volevasi dimostrare.

Vogliamo ora provare alcuni teoremi che ci permetteranno, almeno nel caso dello spazio ordinario, di dare un'interpretazione geometrica della dipendenza lineare, in termini di **parallelismo e complanarità**.

PROPOSIZIONE 1

Un vettore è L. I. se e solo se esso è diverso dal vettore nullo.

DIMOSTRAZIONE

$$\vec{u} \text{ L. I.} \iff \vec{u} \neq \vec{0}$$

Questa implicazione può essere scritta anche nella forma :

$$\vec{u} \text{ L. I.} \iff \vec{u} \neq \vec{0}$$

← Proviamo che $\vec{u} \neq \vec{0}$ implica $\vec{u}$ linearmente indipendente.

L'equazione (2) adattata al nostro caso diventa:

$$\lambda \vec{u} = \vec{0}.$$

Essendo $\vec{u} \neq \vec{0}$, per ipotesi, se fosse anche $\lambda \neq 0$, il modulo di $\lambda \vec{u}$ sarebbe diverso da 0 e dunque $\lambda \vec{u} \neq \vec{0}$. Necessariamente, allora, l'equazione data deve avere solo la soluzione $\lambda = 0$, cioè $\vec{u}$ è linearmente indipendente.

→ Viceversa supponiamo che $\vec{u}$ sia L. I., cioè che l'equazione

$$\lambda \vec{u} = \vec{0}$$

ammetta soltanto la soluzione nulla. Se, per assurdo, fosse $\vec{u} = \vec{0}$ si avrebbe $\lambda \vec{0} = \vec{0}$, anche per $\lambda \neq 0$; dunque l'equazione non ammetterebbe solo la soluzione nulla in contrasto con l'ipotesi.

OSSERVAZIONE Se in un insieme di vettori c'è il vettore nullo, o due di essi sono opposti, allora i vettori sono tutti L. D.

Il teorema che segue è un'interpretazione geometrica della dipendenza lineare di due vettori, come parallelismo.

Due vettori non nulli si dicono **paralleli** se due qualsiasi loro rappresentanti, uscenti da un punto dello spazio appartengono ad una stessa retta. La nozione di parallelismo è manifestamente indipendente dalla scelta del punto di applicazione.

PROPOSIZIONE 2

Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non nulli sono L. D. se e solo se sono paralleli.

$$\vec{u}, \vec{v} \text{ L. D.} \iff \vec{u} // \vec{v}$$

DIMOSTRAZIONE

→ Essendo per ipotesi i due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ linearmente dipendenti, l'equazione $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$ avrà come soluzioni infinite coppie di valori (a, b) diverse da quella nulla. Si potrà allora, se $a \neq 0$, scrivere $\vec{u} = -\frac{b}{a} \vec{v}$; ciò, ricordando la definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare (la direzione del vettore $\lambda \vec{u}$, per $\lambda \neq 0$, è uguale a quella del vettore $\vec{v}$), significa dire che $\vec{u}$ è parallelo a $\vec{v}$.

← Proviamo che se $\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ è possibile trovare un numero c tale che $\vec{u} = c \vec{v}$. Si ha infatti che

$$\vec{u} = \begin{cases} \left(\frac{u}{v}\right) \vec{v} & \text{se } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ sono equiversi} \\ -\left(\frac{u}{v}\right) \vec{v} & \text{se } \vec{u} \text{ e } \vec{v} \text{ sono hanno verso contrario} \end{cases}$$

Dunque è $\vec{u} = c \vec{v}$ e si può scrivere:

$$(-1) \vec{u} + c \vec{v} = \vec{0}$$

Pertanto l'equazione $\lambda + c \vec{v} = \vec{0}$ ammette come soluzione la coppia $[(-1), c]$ che è diversa dalla nulla. Segue che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente dipendenti.

Siano $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tre vettori non paralleli a due a due.

Si dice che i tre vettori sono **complanari** se, preso un punto dello spazio O e riportati da O i rappresentanti dei tre vettori, questi tre segmenti orientati giacciono tutti nello stesso piano (fig. 4). La nozione di **complanarità** è manifestamente indipendente dalla scelta di O .

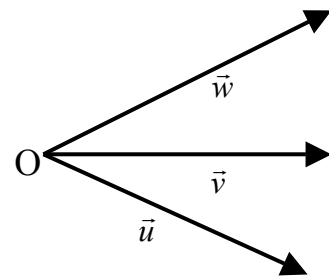


fig. 4

PROPOSIZIONE 3

Tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono complanari.

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ L. D. } \longleftrightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ complanari.}$$

DIMOSTRAZIONE Iniziamo ad osservare che se uno almeno dei tre vettori è nullo, oppure se due almeno di essi sono paralleli, per la **proposizione 0** essi sono linearmente dipendenti.

Dal punto di vista geometrico essi sono anche banalmente complanari. Dunque il teorema, vero nel caso particolare, va provato per vettori non nulli e a due a due non paralleli.

→ Proviamo in primo luogo che se i vettori sono L. D. allora essi sono complanari.

Per ipotesi esiste una terna $(c_1, c_2, c_3) \neq (0, 0, 0)$ tale che :

$$c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v} + c_3 \vec{w} = \vec{0}.$$

Supposto ad esempio $c_2 \neq 0$, possiamo scrivere:

$$\vec{v} = -\frac{c_1}{c_2} \vec{u} - \frac{c_3}{c_2} \vec{w} = h\vec{u} + k\vec{w}$$

Dunque $\vec{v}$ è contenuto nel piano di due vettori paralleli ad $\vec{u}$ e $\vec{w}$. Segue che $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono complanari.

← Dimostriamo ora, inversamente, che se i vettori sono complanari allora sono linearmente dipendenti.

Riportiamo a partire da un punto O (fig.5) i tre rappresentanti dei vettori complanari OB, OC, OD.

Detta H la proiezione di B su OC si ha:

$$\vec{OB} = \vec{OH} + \vec{HB} \quad (a)$$

OH, inoltre, giace sulla stessa retta di OC, per cui si può scrivere: $\vec{OH} = \alpha \vec{v}$ ed inoltre, $\vec{HB}$ è parallelo a OD, dunque $\vec{HB} = \beta \vec{u}$.

Possiamo allora scrivere, dall'espressione (a) di $\vec{OB}$:

$$\vec{w} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{u} \text{ ovvero}$$

$$\alpha \vec{v} + \beta \vec{u} + (-1) \vec{w} = \vec{0}.$$

Si può notare allora che la terna $[\alpha, \beta, (-1)]$ è soluzione non nulla dell'equazione $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w} = \vec{0}$. Ne segue che i tre vettori sono linearmente dipendenti.

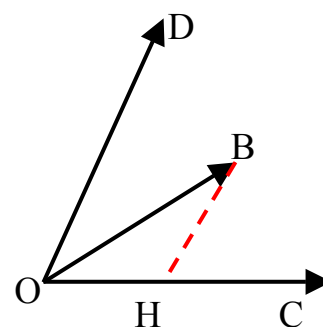


fig. 5

Abbiamo dato un'interpretazione della dipendenza lineare di uno, due ovvero tre vettori, interpretazione che corrisponde rispettivamente all'essere vettore nullo, o all'essere vettori paralleli ovvero all'essere vettori complanari.

Il teorema che segue riguarda il caso di un numero di vettori maggiore di tre. Precisamente proviamo che:

PROPOSIZIONE 4

Quattro o più vettori dello spazio ordinario sono sempre linearmente dipendenti.

DIMOSTRAZIONE E' sufficiente provare che esattamente quattro vettori sono sempre linearmente dipendenti.

Infatti, in tal caso ogni insieme di n vettori, con $n > 4$, contenendo quattro vettori linearmente dipendenti, sarà formato da vettori che sono tutti linearmente dipendenti. Se dei quattro vettori almeno uno è nullo o almeno due sono paralleli o almeno tre sono complanari, la dimostrazione è banale in virtù della **proposizione 0**.

Supponiamo dunque che i quattro vettori siano a tre a tre non complanari.

Riportiamo a partire da un qualunque punto dello spazio O (fig.6) i rappresentanti dei quattro vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$. Sia $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$. Tracciamo a partire da esso la retta parallela a $\vec{w}$ fino ad incontrare il piano dei rappresentanti dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ in P_1 . Da P_1 tracciamo la retta parallela a $\vec{v}$ fino ad incontrare il rappresentante di $\vec{u}$ in P_2 . I punti P, P_1 , P_2 ed O sono tutti distinti (per le ipotesi di non complanarità) e si ha:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$$

Dal fatto che $\overrightarrow{OP_2}$ è parallelo ad $\vec{u}$, che $\overrightarrow{P_1P_2}$ è parallelo a $\vec{v}$ e che $\overrightarrow{P_1P}$ è parallelo a $\vec{w}$, segue:

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

ovvero

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} + (-1)\vec{x} = \vec{0}$$

Dunque i quattro vettori considerati sono linearmente dipendenti.

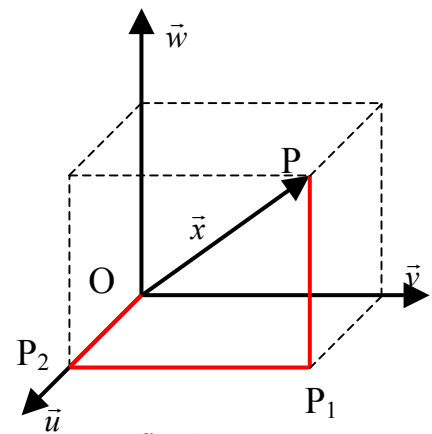


fig.6

OSSERVAZIONE Si osservi ora che se l'ambiente è una retta (spazio 1-dimensionale) esiste un vettore L.I. e non più di uno ed ogni altro è dipendente (ovvero $\parallel$) a questi.

Se siamo in un piano (spazio 2-dimensionale) esistono due, e non più di due, vettori L.I. (basta prenderli non $\parallel$) ad ogni altro vettore è combinazione lineare di questi due.

Nello spazio 3-dimensionale esistono tre, e non più di tre, vettori indipendenti (basta prenderne tre non complanari) ed ogni altro è combinazione lineare di essi.

Concludendo:

il numero massimo di vettori linearmente indipendenti di un sottospazio vettoriale dello spazio ordinario o euclideo coincide con la dimensione del sottospazio stesso.

Negli spazi a più dimensioni, di cui ci occuperemo in un successivo paragrafo, incontreremo un maggior numero di vettori indipendenti.

4. RAPPRESENTAZIONE CARTESIANA DEI VETTORI

La Geometria analitica del piano è un argomento noto fin dalle Scuole Secondarie. Si parla spesso di questa disciplina come di un vero e proprio “ponte” tra la Geometria sintetico-grafica e l’Algebra. Traducendo quindi enti geometrici in enti algebrici e viceversa, la Geometria si avvale di quel naturale arricchimento che una disciplina fornisce all’altra quando si effettuano queste operazioni di interpretazione.

La geometria analitica ha come punto di partenza i **referimenti cartesiani**, che andiamo ad introdurre nel modo che segue.

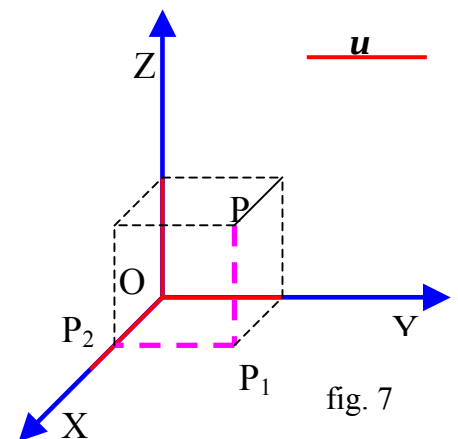
Fissiamo nello spazio:

- 1) un punto O detto **origine**
- 2) tre rette orientate uscenti da O non complanari X, Y, Z detti **assi coordinati** o **assi cartesiani di riferimento**
- 3) **tre unità di misura**

$$\underline{\quad u_x \quad} \quad \underline{\quad u_y \quad} \quad \underline{\quad u_z \quad}$$

su ciascuna delle rette citate.

In generale, due assi formano tra loro un certo angolo. Se i tre angoli xy yz zx sono retti, il riferimento cartesiano si dice **ortogonale**. Inoltre, se le tre unità di misura sono tutte e tre diverse allora si parlerà di riferimento **trimetrico**; se invece due di esse sono uguali il riferimento si dirà **dimetrico**; se infine le tre unità di misura risultano tutte uguali, si parlerà di riferimento **monometrico** (fig. 7).



Fissiamo un riferimento nello spazio e consideriamo un qualsiasi punto P dello spazio. Tracciamo da P la parallela all'asse Z , otteniamo il punto P_1 sul piano XY ; la retta per P_1 , parallela all'asse Y interseca l'asse X nel punto P_2 (fig. 7).

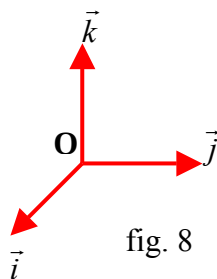
Al punto P possiamo associare i tre numeri reali:

$$x = \text{mis } O P_2 \quad y = \text{mis } P_2 P_1 \quad z = \text{mis } P_1 P.$$

I tre numeri reali x, y, z si dicono l'**ascissa**, l'**ordinata**, e la **quota** di P e la terna ordinata (x, y, z) si dice **terna delle coordinate** di P .

La corrispondenza tra i punti P dello spazio e le terne ordinate di numeri reali (x, y, z) è chiaramente una **corrispondenza biunivoca**, che si dice **coordinazione dello spazio**.

Consideriamo un sistema cartesiano qualunque. Ciascuna unità di misura individua un vettore avente lunghezza unitaria, pari a u_x , u_y , u_z , direzione e verso quello dell'asse sul quale è fissato (fig. 8).



Tali vettori sono chiamati **versori fondamentali** e si indicano con

$$\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}.$$

L'insieme formato da essi si dice che forma una **base** di $\mathbb{V}$.

Ricordando che ogni vettore $\vec{v}$ dello spazio può essere espresso come combinazione lineare di tre vettori non complanari si può scrivere:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}.$$

Questa relazione viene detta **rappresentazione cartesiana del vettore** $\vec{u}$. I tre numeri reali u_x , u_y , u_z sono chiamati le **componenti del vettore** $\vec{u}$, rispetto alla base fissata.

Proviamo la seguente

PROPOSIZIONE

La rappresentazione di un vettore rispetto ad una base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ è unica.

DIMOSTRAZIONE Si abbiano le due seguenti rappresentazioni

$$\vec{x} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{x} = a' \vec{i} + b' \vec{j} + c' \vec{k}$$

Sottraendo membro e membro si ottiene la soluzione

$$(a - a') \vec{i} + (b - b') \vec{j} + (c - c') \vec{k} = \vec{0}.$$

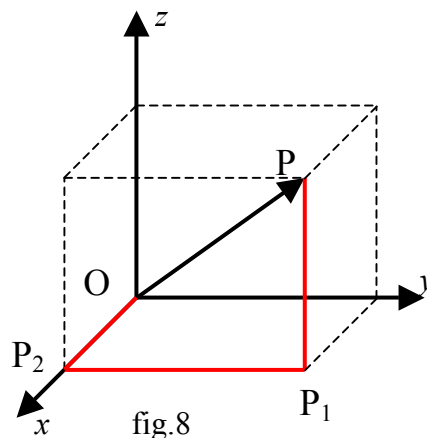
Dato che i tre vettori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sono indipendenti (in quanto non complanari), la relazione precedente è vera se e solo se si annullano tutti i coefficienti, cioè $(a - a') = 0$, $(b - b') = 0$, $(c - c') = 0$, cioè $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.

Vediamo ora quale sia il legame tra la rappresentazione dei punti nello spazio e quella dei vettori e come sia possibile ricavare le componenti di un vettore dato $\vec{u}$ in funzione delle coordinate dei suoi estremi.

Affrontiamo la questione dapprima in un caso particolare: supponiamo che il segmento orientato abbia il suo primo estremo nell'origine (fig. 8). In tal caso si ha

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$$

Se dunque il primo estremo del segmento che rappresenta il vettore $\vec{u}$ si trova nell'origine, le componenti del vettore coincidono con le coordinate (x, y, z) del punto P.



Si ha pertanto

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

Analizziamo ora il caso in cui gli estremi del segmento orientato rappresentante il vettore $\vec{u}$ non coincidano con l'origine (fig. 9).

Si ha:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} \\ \overrightarrow{OP_2} &= x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \quad \text{e} \\ \overrightarrow{OP_1} &= x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \\ \vec{u} &= \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \\ &= (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}.\end{aligned}$$

Questa formula esprime in particolare il vettore $\vec{u}$ in funzione delle coordinate dei suoi estremi. Possiamo quindi affermare che le componenti di un vettore, del quale siano noti un rappresentante e le relative coordinate degli estremi, sono date dalla differenza delle coordinate delle secondo estremo con quelle del primo estremo.

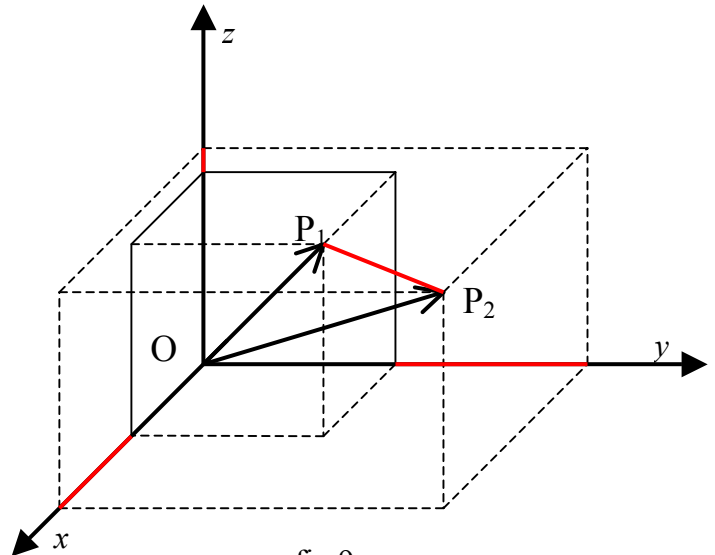


fig.9

Supponiamo di avere un vettore assegnato $\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$ e di prendere due punti: $P(x, y, z)$ e $P'(x', y', z')$ tali che $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$. Fissato il vettore la legge che ad un punto P associa il punto P' in modo che risulti $\overrightarrow{PP'} = \vec{u}$, si dice **traslazione di vettore** $\vec{u}$. Il legame che si stabilisce tra le componenti del vettore $\vec{u}$ e le coordinate dei due punti P e P' è espresso dalle seguenti relazioni:

$$x' - x = u_x \quad y' - y = u_y \quad z' - z = u_z$$

Esse vengono solitamente dette **equazioni delle traslazione**.

ESERCIZIO 1

Traslare il punto $P(2, -3, 5)$ di un vettore $\vec{u}$ di componenti $(5, 3, 1)$.

Si ha:

$$x' = x + u_x = 2 + 5 = 7 \quad y' = y + u_y = -3 + 3 = 0 \quad z' = z + u_z = 5 + 1 = 6$$

Quindi il punto P' traslato di P ha coordinate $(7, 0, 6)$.

ESERCIZIO 2

Sia $OXYZ$ un riferimento ed $O'X'Y'Z'$ un secondo riferimento con gli assi paralleli ai precedenti.

Calcolare le relazioni tra le coordinate di un punto P in $OXYZ$ e in $O'X'Y'Z'$.

Se (x, y, z) ed (x', y', z') sono le coordinate di uno stesso punto P e se O' ha coordinate (a, b, c) rispetto a $OXYZ$ si ha:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

da cui

$$\begin{aligned}x &= a + x' \\ y &= b + y' \\ z &= c + z'\end{aligned}$$

Le precedenti sono le **equazioni** di un cambiamento di riferimento per traslazione.

5. PRODOTTO SCALARE, VETTORIALE E MISTO

In tutto il paragrafo si intenderà il riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Ciò si esprimerà anche dicendo che la **base** formata da $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ è **ortonormale** (vettori unitari a due a due ortogonali).

Sono dati due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ di moduli rispettivamente $u = \|\vec{u}\|$ e $v = \|\vec{v}\|$. Si definisce **prodotto scalare** (o interno) dei due vettori, il numero reale che si indica con $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dato da

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u v \cos \theta$$

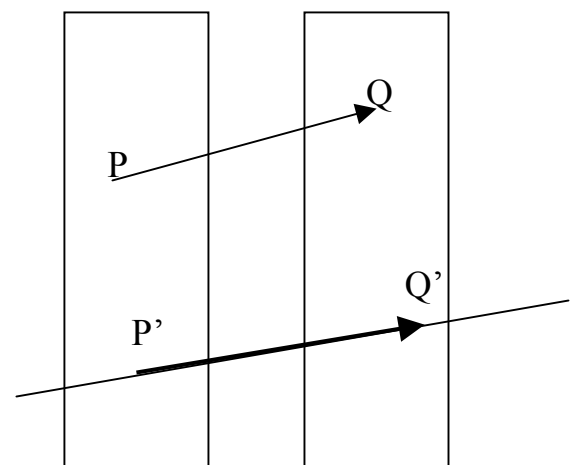
essendo θ l'angolo convesso formato dalle semirette uscenti da O e contenenti P e Q ove $\overrightarrow{OP} = \vec{u}$ e $\overrightarrow{OQ} = \vec{v}$.

Un'interessante interpretazione geometrica del prodotto scalare è la seguente (fig.9).

Sia $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$, consideriamo una retta r parallela a $\vec{v}$; consideriamo per P e per Q i due piani ortogonali ad r fino ad incontrare r in P' e Q'. Se $(P'Q')$ è la misura orientata del segmento $P'Q'$ e $v(P'Q')$ il vettore da essi individuato, risulta:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (P'Q') \quad (*)$$

Pertanto quando $\vec{v}$ è un versore $\vec{u} \cdot \vec{v}$ è quel numero che chiamiamo “componente di $\vec{u}$ secondo $\vec{v}$ ”.



Occupiamoci ora delle **proprietà** del prodotto scalare.

1) Proprietà commutativa

$$\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$$

La 1) è banale conseguenza della definizione, essendo θ un angolo non orientato.

2) Proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma

$$\vec{w} \circ (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \circ \vec{u} + \vec{w} \circ \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}$$

La 2) si prova tenendo conto della (*). Fissiamo una retta per O parallela a $\vec{w}$ e sia

$$\vec{u} = \overrightarrow{OU}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{US}, \quad (\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{OS}$$

Risulta

$$\vec{w} \circ \vec{u} = w(OU)$$

$$\vec{w} \circ \vec{v} = w(OV) = w(US)$$

$$\vec{w} \circ (\vec{u} + \vec{v}) = w(OS)$$

Essendo $w(OS) = w(OU) + w(US)$ l'asserto è dimostrato.

3) Proprietà associativa mista ovvero di "passeggio" dello scalare

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \circ \vec{v} = \vec{u} \circ (\alpha \vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V} \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

La prova della 3) è ovvia quando $\alpha = 0$.

Supponiamo allora $\alpha > 0$.

In questo caso $\alpha \vec{u}$ ed $\alpha \vec{v}$ hanno lo stesso verso di $\vec{u}$ e di $\vec{v}$ rispettivamente, ne segue che ciascuno dei tre membri della doppia uguaglianza è uguale a $\alpha u v \cos \theta$, dove θ è l'angolo convesso formato dalle direzioni orientate di $\vec{u}$ e di $\vec{v}$.

Sia ora $\alpha < 0$.

L'angolo convesso che $\alpha \vec{u}$ forma con $\vec{v}$ è allora il supplementare di θ come anche l'angolo convesso che $\vec{u}$ forma con $\alpha \vec{v}$.

Segue allora:

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = |\alpha|uv \cos(\pi - \theta)$$

d'altro canto risulta:

$$\alpha (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \alpha u v \cos \theta$$

con $\alpha < 0$ e $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\pi - \theta)$ e quindi l'asserto è dimostrato.

Proviamo ora il

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DEL PRODOTTO SCALARE

Se due vettori rispetto ad una base ortonormale sono rappresentati da

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad \text{e} \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

allora risulta che il prodotto scalare di due vettori eguaglia la somma dei prodotti delle componenti omonime dei vettori, ovvero

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

(espressione cartesiana del prodotto scalare).

DIMOSTRAZIONE

Intanto osserviamo che, essendo la base ortonormale, risulta

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 * 1 \cos 0 = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 1 * 1 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

quindi

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{i} &= (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \cdot \vec{i} = (v_x \vec{i}) \cdot \vec{i} + (v_y \vec{j}) \cdot \vec{i} + (v_z \vec{k}) \cdot \vec{i} = \\ &= v_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + v_y (\vec{j} \cdot \vec{i}) + v_z (\vec{k} \cdot \vec{i}) = v_x \end{aligned}$$

ed analogamente

$$\vec{v} \cdot \vec{j} = v_y \quad \vec{v} \cdot \vec{k} = v_z$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \cdot \vec{v} = (u_x \vec{i}) \cdot \vec{v} + (u_y \vec{j}) \cdot \vec{v} + (u_z \vec{k}) \cdot \vec{v} = \\ &= u_x (\vec{v} \cdot \vec{i}) + u_y (\vec{v} \cdot \vec{j}) + u_z (\vec{v} \cdot \vec{k}) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \end{aligned}$$

Dal **teorema di rappresentazione** segue che:

$$\|\vec{u}\|^2 = u^2 = u \cdot u = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

(**espressione cartesiana del modulo**).

Da questa relazione è anche possibile ricavare la formula che esprime la **distanza fra due punti** $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ nello spazio:

$$d(P_1 P_2) = \|\vec{P_1 P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(**espressione cartesiana della distanza**).

Tale formula è valida, naturalmente, soltanto se la base è ortonormale. In questo ordine di idee si è fatto uso di una definizione geometrica di prodotto scalare e da questa definizione si sono provate le 1), 2), 3).

Si può anche definire il prodotto scalare in modo formale.

Chiamiamo **prodotto scalare** un'applicazione:

$$(\cdot) : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

che ad una coppia $(\vec{u}, \vec{v})$ di vettori di $\mathbb{V}$ associa il numero reale $\vec{u} \cdot \vec{v}$ soddisfacente alle condizioni (1), (2), (3). Gli sviluppi che ne conseguono non sono immediati; conviene pertanto per approfondire studiare la teoria degli spazi vettoriali astratti come prodotto interno.

Vogliamo introdurre ora la nozione di **prodotto vettoriale** di due vettori.

Consideriamo una qualsiasi coppia ordinata di vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$; chiamiamo **prodotto vettoriale** di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il nuovo vettore

$$\vec{u} \wedge \vec{v}$$

definito come segue:

a) Se uno almeno dei vettori è nullo oppure se i due vettori sono paralleli

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$$

b) Se i due vettori sono non nulli e non paralleli il vettore

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

è quello aventi le seguenti caratteristiche:

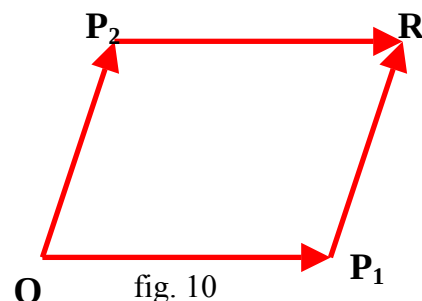
- ◆ la **direzione** è quella ortogonale al piano di due rappresentanti di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ uscenti da un fissato punto del piano;
- ◆ per la determinazione del **verso** di $\vec{w}$ ci sono innumerevoli regole pratiche. Una di queste è la **regola dell'omino** secondo cui il **verso** del prodotto vettoriale è quello lungo la direzione perpendicolare che va dai piedi alla testa di un omino, che, posto con i piedi nel punto di applicazione dei due vettori, vede il primo vettore del prodotto sul suo braccio destro e il secondo sul suo braccio sinistro.
Così facendo il vettore $\vec{u}$ per sovrapporsi a $\vec{v}$ descrive in senso antiorario un angolo α orientato e minore di π , nella faccia del piano in esame.
- ◆ il **modulo** di $\vec{w}$ è $w = u v \sin \alpha$.

OSSERVAZIONE

Se, facendo riferimento alla fig.10,

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP_1} \quad \vec{v} = \overrightarrow{OP_2}$$

allora il **prodotto vettoriale** di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è dato dall'area del parallelogramma OP_1P_2R .



Le principali **proprietà** del prodotto vettoriale sono le seguenti:

1) Proprietà anticommutativa o alternante

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = - \vec{v} \wedge \vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V}$$

La dimostrazione della 1) è immediata.

2) Proprietà di “passeggio” dello scalare

$$\lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V} \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $\lambda = 0$, allora la dimostrazione è ovvia.

Sia $\lambda > 0$, allora i tre vettori

$$\lambda (\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} \quad \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v})$$

ovviamente eguali in direzione e verso, hanno lo stesso modulo.

Sia $\lambda < 0$, allora $\lambda = -|\lambda|$.

Risulta:

$$-(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (-\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (-\vec{v})$$

Infatti sia il verso di $(-\vec{u}) \wedge \vec{v}$ che di $\vec{u} \wedge (-\vec{v})$ sono opposti a quello di $\vec{u} \wedge \vec{v}$; segue allora che

$$(-|\lambda| \vec{u}) \wedge \vec{v} \text{ e } \vec{u} \wedge (-|\lambda| \vec{v})$$

sono membri opposti del vettore

$$|\lambda| [(\vec{u}) \wedge \vec{v}]$$

E quindi segue l'asserto.

3) Proprietà distributiva rispetto all'addizione vettoriale a destra e a sinistra

$$\vec{w} \wedge (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{v}$$

Premettiamo due osservazioni.

Consideriamo il prodotto $\vec{u} \wedge \vec{v}$, essendo $\vec{u}$ versore ($u=1$), e pensiamo i vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ applicati in O (fig. 11).

Si ha ovviamente:

se $\vec{u}$ è perpendicolare a $\vec{v}$, il vettore $\vec{u} \wedge \vec{v}$ si ottiene facendo ruotare di un angolo retto $\vec{v}$ intorno alla retta orientata per O di versore $\vec{u}$, nel verso di rotazione positivo associato all'orientazione dello spazio.

Se $\vec{u}$ non è ortogonale a $\vec{v}$, possiamo decomporre $\vec{v}$ in un vettore $\vec{v}'$ perpendicolare ad $\vec{u}$ e in un vettore $\alpha \vec{u}$ parallelo ad $\vec{u}$ ($\vec{v} = \vec{v}' + \alpha \vec{u}$), come si ha subito dalla figura. Tenuto conto che l'area del parallelogramma costruito su $\vec{u}$ e $\vec{v}$ eguaglia l'area del parallelogramma

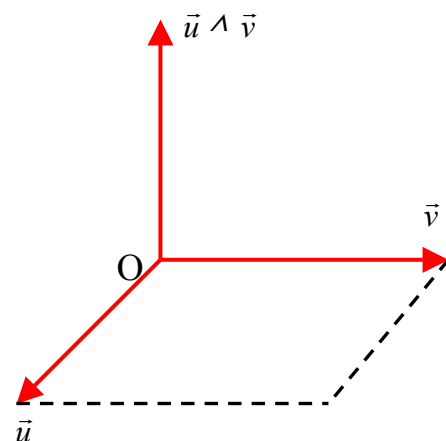


fig.11

(rettangolo) costruito su $\vec{u}$ e $\vec{v}'$, si ha:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\vec{v}' + \alpha \vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{v}' \quad (1^*)$$

Ciò posto, per provare la seconda delle 3), poniamo $\vec{w} = b \vec{u}$ dove $\vec{u}$ è un versore parallelo a $\vec{w}$ e b uno scalare. Basterà dimostrare la relazione che si ottiene sostituendo $\vec{u}$ a $\vec{w}$, giacchè si passa poi al caso generale tenendo conto della 2).

Si ha:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge (\vec{v}_1' + a_1 \vec{u} + \vec{v}_2' + a_2 \vec{u}) = \vec{u} \wedge [(\vec{v}_1' + \vec{v}_2') + (a_1 + a_2) \vec{u}]$$

con a_1, a_2 scalari, $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}_2'$ perpendicolari ad $\vec{u}$ e quindi anche $(\vec{v}_1' + \vec{v}_2')$ perpendicolare ad $\vec{u}$.

Tenuto conto della (*1) i vettori $\vec{u} \wedge \vec{v}_1'$, $\vec{u} \wedge \vec{v}_2'$, $\vec{u} \wedge (\vec{v}_1' + \vec{v}_2')$ si ottengono rispettivamente da $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$, $(\vec{v}_1' + \vec{v}_2')$ ruotando di un angolo retto intorno alla retta orientata di versore $\vec{u}$; quindi:

$$\vec{u} \wedge (\vec{v}_1' + \vec{v}_2') = \vec{u} \wedge \vec{v}_1' + \vec{u} \wedge \vec{v}_2'.$$

Per la (*1) si ha perciò:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= \vec{u} \wedge (\vec{v}_1' + \vec{v}_2') = \vec{u} \wedge \vec{v}_1' + \vec{u} \wedge \vec{v}_2' = \\ &= \vec{u} \wedge (\vec{v}_1' + a_1 \vec{u}) + \vec{u} \wedge (\vec{v}_2' + a_2 \vec{u}) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1' + \vec{u} \wedge \vec{v}_2'. \end{aligned}$$

Le **proprietà** dimostrate consentono, anche per l'operazione di **prodotto vettoriale**, il calcolo agevole e non dissimile dal calcolo algebrico ordinario, fatta eccezione per la proprietà 1), anticommutativa, alla quale occorre porre particolare attenzione.+

Proviamo ora a dare una “*espressione cartesiana*” del prodotto vettoriale, nota come **determinante simbolico**.

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE

Sia data una base ortogonale $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ e siano (u_x, u_y, u_z) le componenti di $\vec{u}$ e (v_x, v_y, v_z) le componenti di $\vec{v}$, allora:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE Nella prima riga del **determinante simbolico** compaiono i versori, nella seconda riga vi sono le componenti del primo vettore e nella terza le componenti del secondo vettore.

DIMOSTRAZIONE Dalla definizione si ha:

$$\begin{aligned}\vec{i} \wedge \vec{i} &= \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \wedge \vec{j} &= \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \wedge \vec{i} &= -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}\end{aligned}$$

Calcoliamo ora i tre prodotti $(\vec{u} \wedge \vec{i})$ $(\vec{u} \wedge \vec{j})$ $(\vec{u} \wedge \vec{k})$

$$\vec{u} \wedge \vec{i} = (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \wedge \vec{i} = u_x (\vec{i} \wedge \vec{i}) + u_y (\vec{j} \wedge \vec{i}) + u_z (\vec{k} \wedge \vec{i}) = -u_y \vec{k} + u_z \vec{j}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{j} &= (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \wedge \vec{j} = u_x (\vec{i} \wedge \vec{j}) + u_y (\vec{j} \wedge \vec{j}) + u_z (\vec{k} \wedge \vec{j}) = u_x \vec{k} - u_z \vec{i} \\ \vec{u} \wedge \vec{k} &= (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \wedge \vec{k} = u_x (\vec{i} \wedge \vec{k}) + u_y (\vec{j} \wedge \vec{k}) + u_z (\vec{k} \wedge \vec{k}) = -u_x \vec{j} + u_y \vec{i}.\end{aligned}$$

Calcoliamo ora il prodotto:

$$\begin{aligned}\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} &= \vec{u} \wedge (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \vec{u} \wedge (v_x \vec{i}) + \vec{u} \wedge (v_y \vec{j}) + \vec{u} \wedge (v_z \vec{k}) = \\ &= v_x (\vec{u} \wedge \vec{i}) + v_y (\vec{u} \wedge \vec{j}) + v_z (\vec{u} \wedge \vec{k}) = \\ &= v_x (-u_y \vec{k} + u_z \vec{j}) + v_y (u_x \vec{k} - u_z \vec{i}) + v_z (-u_x \vec{j} + u_y \vec{i}) = \\ &= (u_y v_z - u_z v_y) \vec{i} + (u_z v_x - u_x v_z) \vec{j} + (u_x v_y - u_y v_x) \vec{k}\end{aligned}$$

che è appunto la stessa espressione che si ottiene dallo sviluppo del determinante simbolico dell'enunciato.

OSSERVAZIONI

- 1) Nella struttura algebrica $(\mathbb{V}, \wedge)$ **non esiste un vettore neutro**, cioè un vettore $\vec{a}$ tale che:

$$\vec{u} \wedge \vec{a} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{V}$$

Conseguenza di tutto ciò è che non essendoci un elemento neutro, non si può parlare di inverso rispetto al prodotto vettoriale.

2) Il prodotto vettoriale **non è associativo**. Vi sono infatti casi per i quali la **proprietà associativa** vale e casi per i quali la proprietà non vale:

$$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0} \wedge \vec{j} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

(in questo caso la proprietà associativa non è valida)

$$(\vec{i} \wedge \vec{j}) \wedge \vec{k} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge (\vec{j} \wedge \vec{k}) = \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{0}$$

(in questo caso la proprietà associativa è valida)

Definiamo ora il **prodotto misto**.

Dati tre vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ si chiama **prodotto misto** lo scalare:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}$$

TEOREMA

Risulta

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sono complanari}$$

DIMOSTRAZIONE Poichè il prodotto scalare di due vettori è nullo se i due vettori sono ortogonali, segue che

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} = 0 \implies \vec{u} \text{ perpendicolare a } \vec{v} \wedge \vec{w}$$

ma $\vec{u}$ perpendicolare a $\vec{v} \wedge \vec{w} \implies \vec{u}$ complanare con $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e **viceversa** se $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sono complanari, il loro prodotto misto è nullo.

Se

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

$$\vec{w} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$$

si ha

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{k}$$

e segue che

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = u_1 (v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2 (v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3 (v_1 w_2 - v_2 w_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Si ha

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Osserviamo che se $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = 0$ deve essere:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

Poiché $\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = 0 \iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sono complanari, segue che il determinante in questione è nullo se e solo se i vettori sono complanari. Quindi

TEOREMA

Tre vettori dati in forma cartesiana sono complanari se e solo se il determinante delle loro componenti è nullo.