

Situazioni problematiche aperte in Probabilità

Roberto Tortora
roberto.tortora@unina.it

Castellammare di Stabia
Scuola estiva
15 Luglio 2018

Abstract.

In questo intervento si presenta un esempio di problema riguardante una semplice situazione di valutazione di probabilità. Si suggerisce un articolato percorso didattico per la risoluzione del problema che consente, in un ambiente collaborativo, di confrontare ed integrare i vari approcci alla probabilità. Peraltro l'attività didattica potrebbe continuare coinvolgendo molti altri argomenti di matematica. Complessivamente la proposta e l'approccio adottato si inseriscono in una visione della matematica che privilegia gli aspetti della modellizzazione.

Matematica e realtà.

Modellizzazione

Il punto di vista generale entro il quale si inserisce il presente intervento è quello di privilegiare nella matematica, in tutta la matematica, l'aspetto della modellizzazione.

Da notare che con questa parola si intende di solito un tipo particolare di costruzione matematica, spesso complessa, che serve a descrivere un fenomeno della realtà altrettanto complesso. In tali casi si fa uso quasi sempre di strumenti di analisi matematica e in particolare delle equazioni differenziali.

Qui si dà invece a questa parola un significato più generale e adatto a situazioni più svariate e di difficoltà da minima ad elevata.

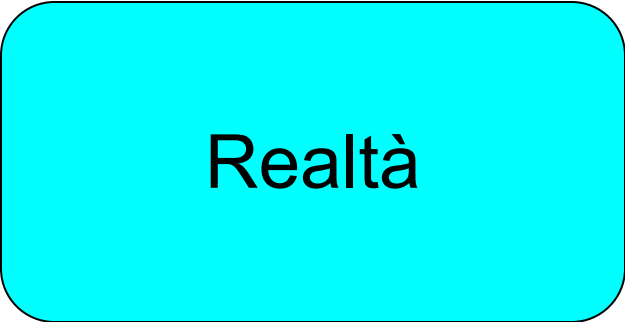
Parleremo di modellizzazione tutte le volte che della matematica non ci interessa sapere soltanto quali sono le sue regole interne, ma invece ci interessa altrettanto se non di più il suo rapporto con la realtà.

E quindi ogni volta che usiamo i numeri naturali per contare degli oggetti stiamo facendo attività di modellizzazione, e la stiamo facendo quando misuriamo le dimensioni di una stanza e così via.

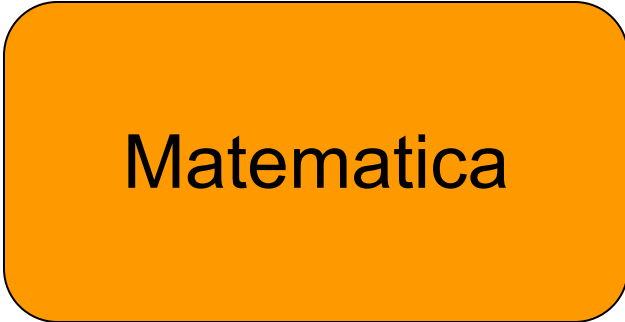
Se le matematiche vengono così spesso riguardate come inutile peso dagli allievi, dipende in parte almeno dal carattere troppo formale che tende a prendere quell'insegnamento, da un falso concetto del rigore tutto intento a soddisfare certe minute esigenze di parole, da una critica analitica eccessiva e fuori di posto... Ma queste tendenze si riattaccano ad una causa più generale; cioè al fatto che le matematiche siano state studiate come un organismo a sé, riguardandone piuttosto la sistemazione astratta conseguita dopo uno sviluppo secolare, che non l'intima ragione storica. **Si dimenticano per tal modo i problemi concreti** che conferiscono interesse alle teorie, e sotto la formula o lo sviluppo del ragionamento non si vedono più i fatti ormai da lungo tempo acquisiti, ma soltanto la concatenazione in cui noi artificialmente li abbiamo stretti.

Se le matematiche vengono così spesso riguardate come inutile peso dagli allievi, dipende in parte almeno dal carattere troppo formale che tende a prendere quell'insegnamento, da un falso concetto del rigore tutto intento a soddisfare certe minute esigenze di parole, da una critica analitica eccessiva e fuori di posto... Ma queste tendenze si riattaccano ad una causa più generale; cioè al fatto che le matematiche siano state studiate come un organismo a sé, riguardandone piuttosto la sistemazione astratta conseguita dopo uno sviluppo secolare, che non l'intima ragione storica. **Si dimenticano per tal modo i problemi concreti** che conferiscono interesse alle teorie, e sotto la formula o lo sviluppo del ragionamento non si vedono più i fatti ormai da lungo tempo acquisiti, ma soltanto la concatenazione in cui noi artificialmente li abbiamo stretti.

(**F. Enriques**, *Sulla preparazione degli insegnanti di scienze*, relazione tenuta al V Congresso degli insegnanti di scuole medie, 1906).

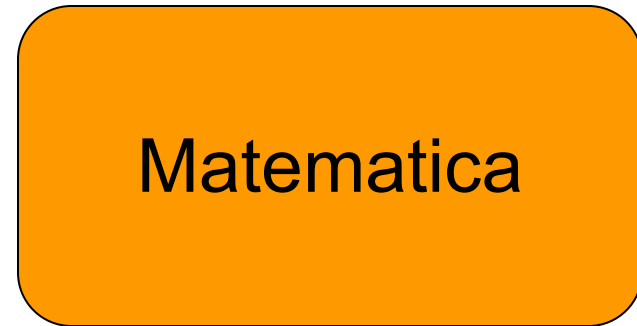
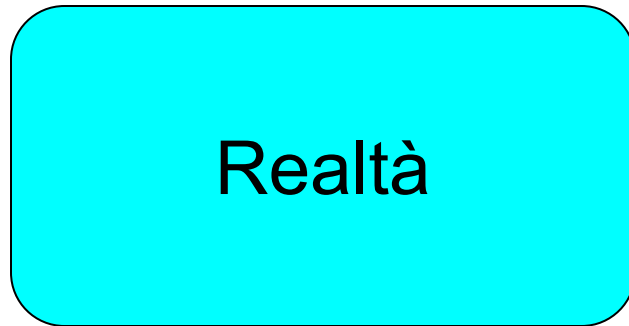
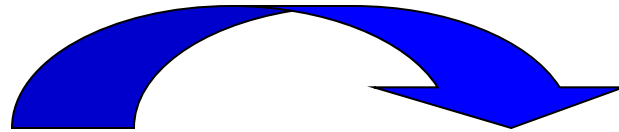


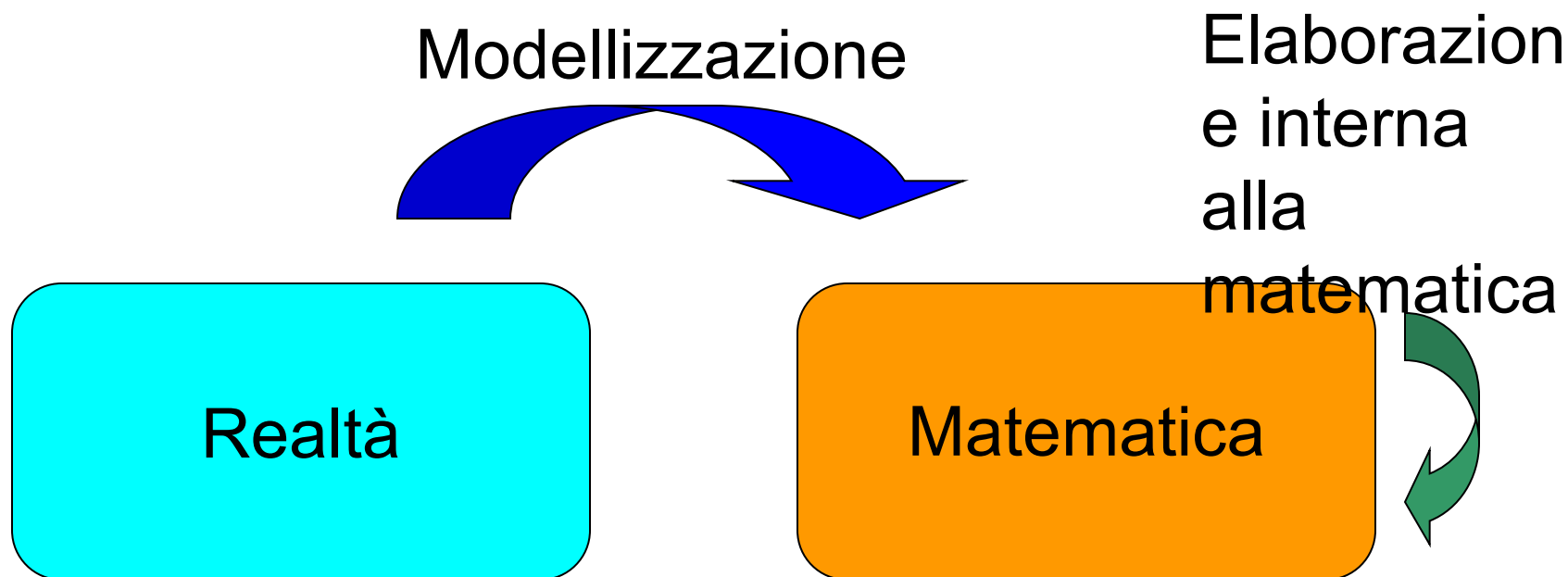
Realtà

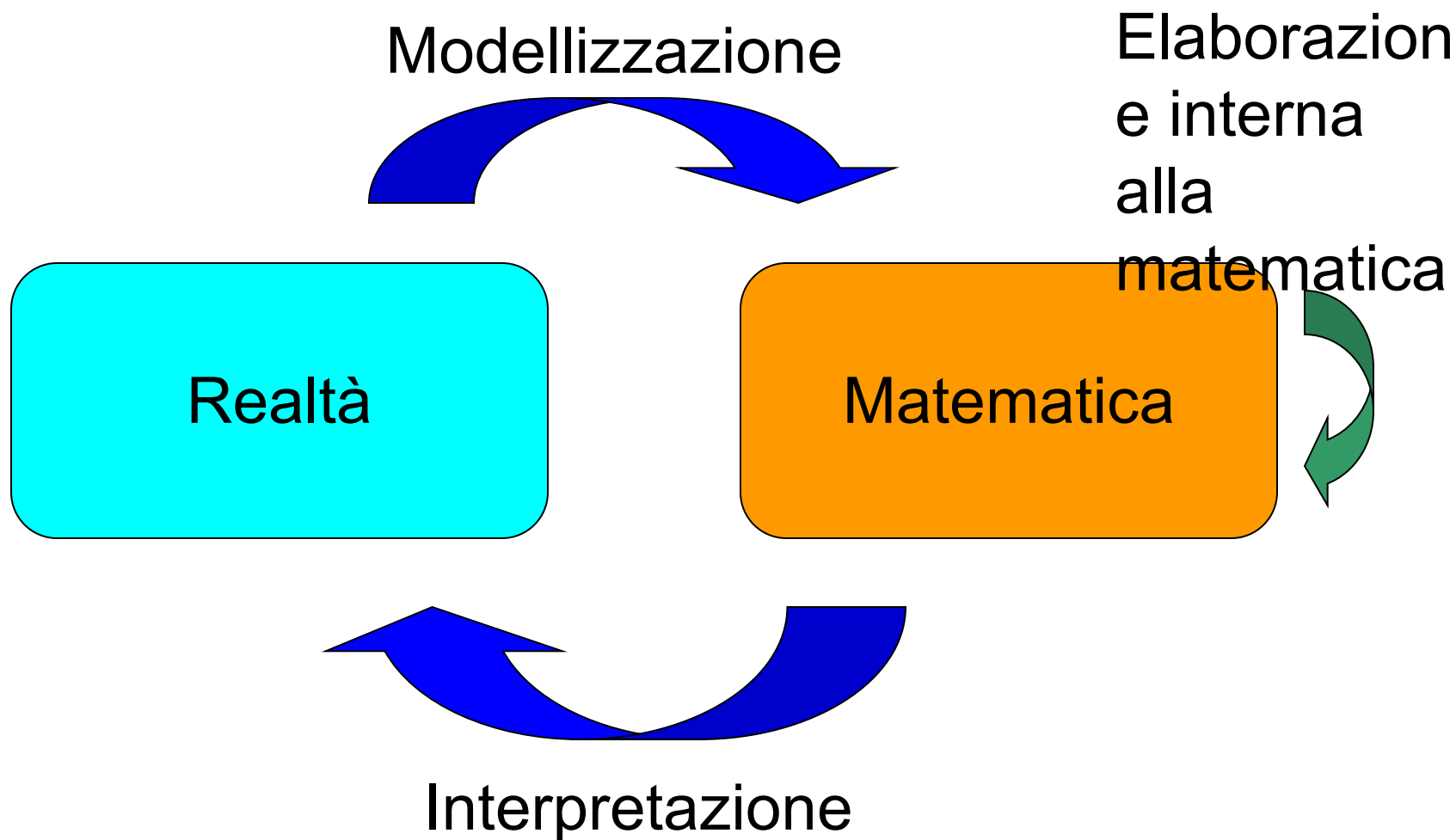


Matematica

Modellizzazione







Un ruolo speciale nei processi di modellizzazione lo rivestono **i problemi**.

Non quelli stereotipati che si trovano tipicamente fra gli esercizi dei libri di matematica della scuola.

Ma quelli che scaturiscono direttamente dalla realtà.

Il caso della probabilità.

Nel processo di matematizzazione siamo qui a metà del guado.

Forse perché fra tutte le branche della matematica è nata parecchio più tardi,

forse perché viene percepita come parte “meno affidabile” di altre (la distinzione di senso comune che viene fatta fra **matematica del certo e dell'incerto**, se pure descrive un dato di fatto, genera anche spesso una sorta di gerarchia di valori fra matematica di serie a e matematica di serie b),

o forse semplicemente per l'oggetto al quale si applica,

sta di fatto che nel modo comune come viene presentata, la probabilità non ha il rango di disciplina astratta che basta a se stessa, come accade per l'aritmetica, l'algebra, la geometria.

Aritmetica, algebra, geometria, che sono parti antiche della matematica, si usa presentarle come scienze autonome, scienze che vivono di vita propria e che solo per chi ha voglia di occuparsene si ritrovano nella vita reale.

Presentare invece la probabilità come una parte astratta della matematica ovviamente anche si può, ma non si usa, almeno non nelle scuole.

Questa presentazione astratta sarebbe quella che viene chiamata probabilità “assiomatica” e introdotta al più come uno dei possibili modi (il meno accessibile) di trattare la probabilità.

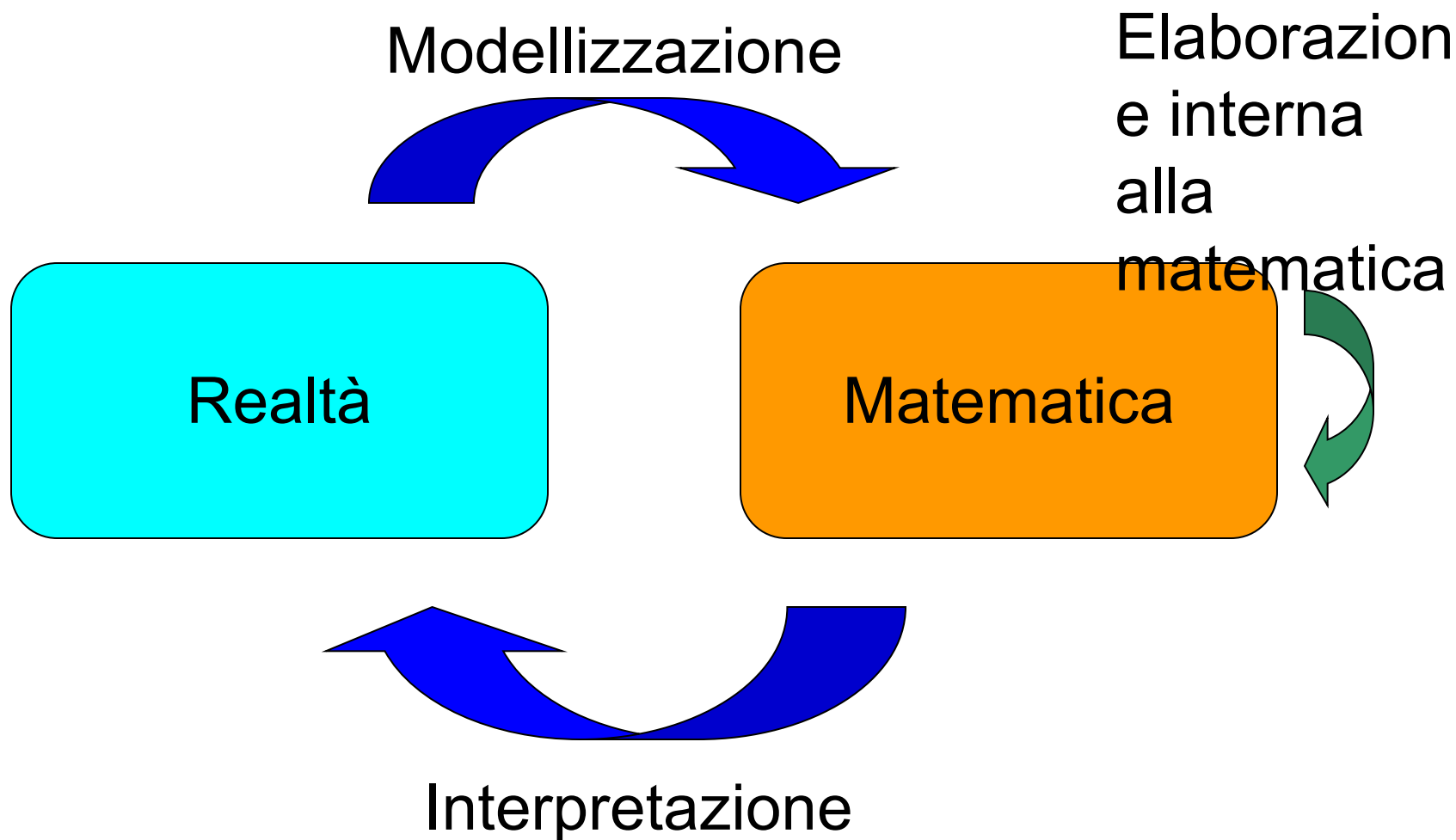
Ricordiamo che gli altri tre modi tradizionali sono la trattazione classica o *a priori*, quella frequentista o *a posteriori* e quella soggettiva.

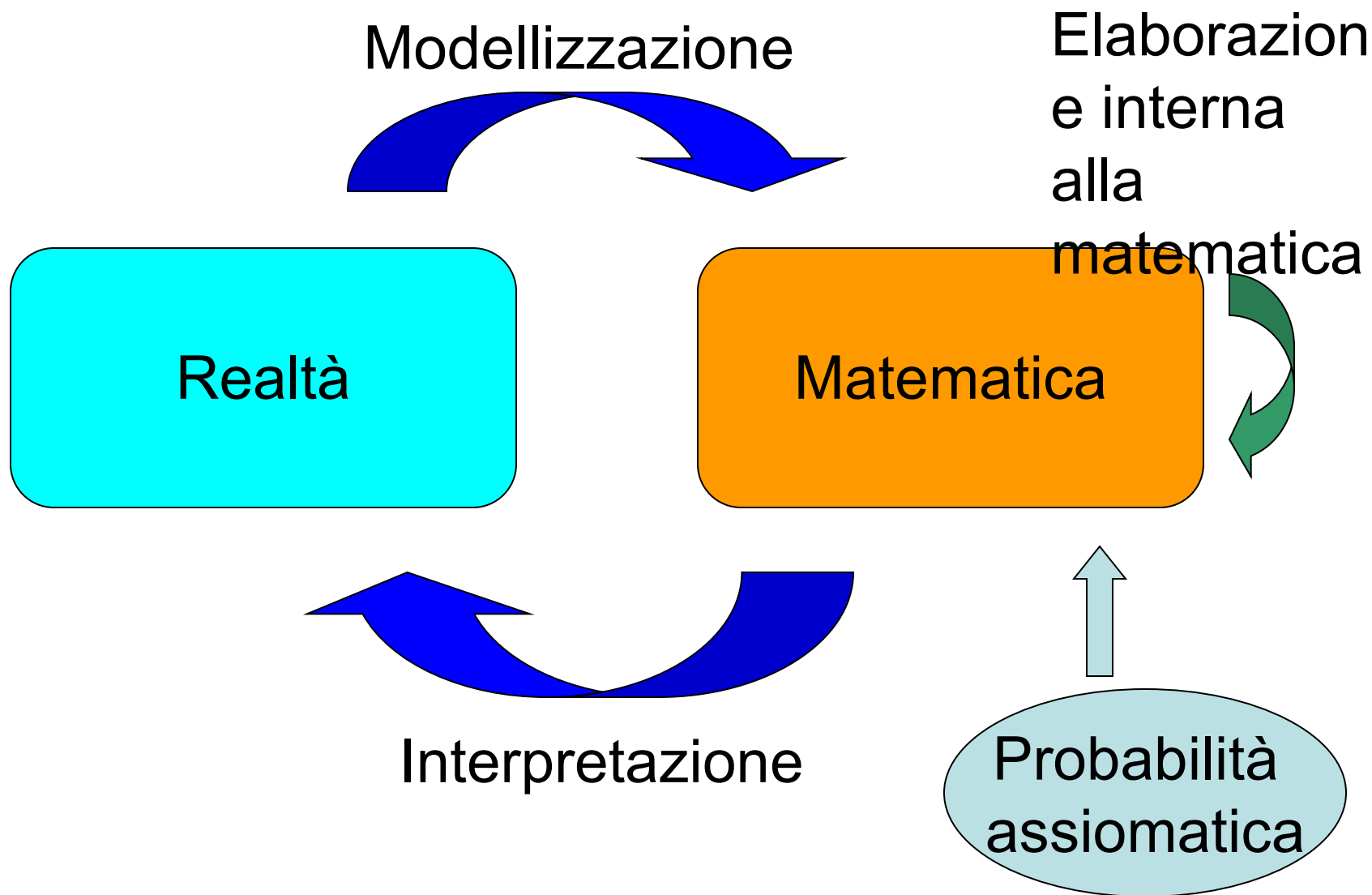
A mio modo di vedere le cose non stanno così.

L'unico modo di vedere la probabilità in termini matematici (e fra l'altro come capitolo di pari livello di affidabilità di tutti gli altri) sarebbe quello della sua trattazione assiomatica.

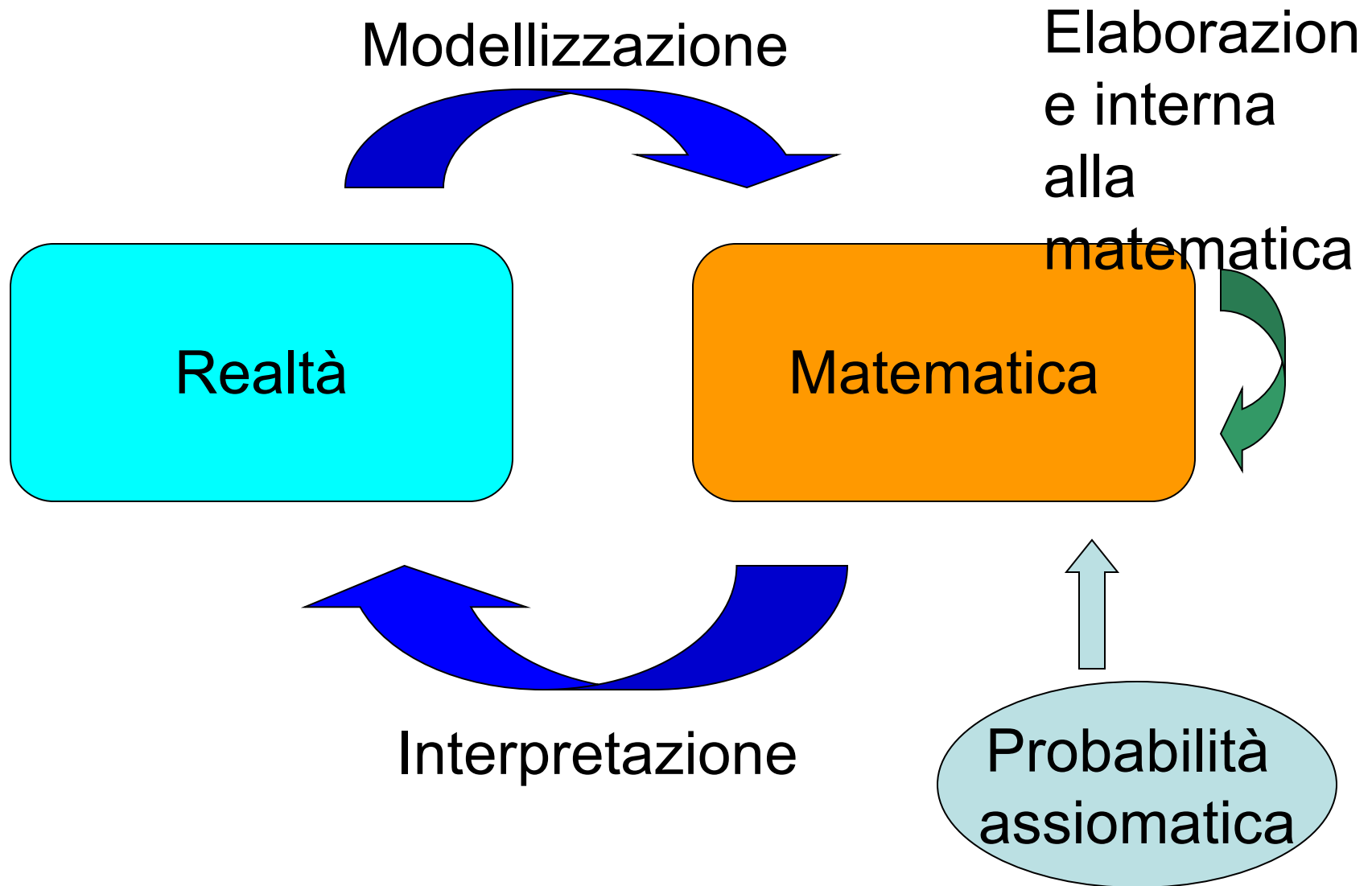
Gli altri tre modi sono, come dire, adattamenti alla realtà di questo modello matematico, sono cioè il *trait d'union* fra la matematica e alcuni specifici fenomeni della realtà (quelli in cui si fanno previsioni sugli avvenimenti), sono in definitiva nient'altro che “metodi di modellizzazione”.

Attenzione! Non sto dicendo che bisogna trattare la probabilità a scuola con metodo astratto, ma esattamente il contrario, che quello che si fa con la probabilità, e che è pratica scolastica, si dovrebbe fare anche con le altre parti, evitando di fare trattazioni astratte svincolate dalle loro applicazioni.





Probabilità a priori, frequentista e soggettiva



Secondo me, se non si capisce come si devono intendere “i vari modi di trattare la probabilità” si rischiano gravi **misconcezioni**.

La più comune: **abusare** dello slogan: “matematica del certo e dell’incerto”: che cosa c’è di incerto in una parte della teoria della misura? E che cosa c’è di certo nel pretendere che nel mondo ci siano punti rette e piani?

Un’altra ricaduta negativa: la ricorrente tentazione di diffidare dello strumento di modellizzazione matematica e ricorrere invece a vecchi modelli di tipo magico.

Ancora un’altra difficoltà sta nel fare molta matematica difficile “interna”, che riesce utile nelle scienze e in svariate applicazioni (economia, medicina, demografia, ecc.), senza aver chiarito a sufficienza gli aspetti elementari e il rapporto tra realtà e formalizzazione.

Che cosa faremo

Nel lavoro che vi proporrò cercherò di mettere in luce questa visione delle cose. Lavoreremo su un solo problema, elementare ma di livello comunque adeguato ad un pubblico adulto. A quale età lo si possa proporre ai ragazzi della scuola lo potremo discutere alla fine.

Il lavoro sarà di tipo laboratoriale, con partecipazione attiva di tutti e discussione come momenti essenziali dell'attività.

Un esempio, fra i tanti possibili, di una situazione problematica riguardante una **valutazione di probabilità** (preferisco questo termine – valutazione – al più riduttivo termine *calcolo*), ed una proposta di conduzione didattica di una tale situazione, diversa dall'usuale. Questo esempio, particolarmente ricco sia di contenuti matematici che di aspetti metodologici, vuole mostrare come sia possibile, a proposito di probabilità, giustificare varie regole e procedure matematiche e se del caso metterne in luce eventuali aspetti critici, proprio collegandosi ripetutamente e ostinatamente con la realtà.

Il problema dei rappresentanti di classe

Tratto da attività laboratoriali
condotte nei corsi SSIS a Napoli

*Una classe è composta da 25 alunni:
15 femmine e 10 maschi.
Si devono estrarre a sorte
2 rappresentanti di classe.
Qual è la probabilità che siano
un maschio e una femmina?*

La questione posta si presta a tutte e tre le impostazioni della probabilità (a priori, frequentista e soggettiva). Io propongo di presentare queste tre impostazioni nell'ordine: soggettiva - frequentista - classica.

Questo significa, per il nostro problema, in primo luogo effettuare ciascuno una stima del valore richiesto. Confrontare queste stime, discuterne, infine chiarire l'importanza di abituarsi a effettuare stime accurate.

PRIMA FASE

Dunque si comincia con l'esprimere una stima della probabilità di estrarre una coppia femmina - maschio (ed anche eventualmente la probabilità degli altri due eventi FF, MM).

La risposta sia veloce, magari risultato di riflessioni ma non di calcoli o di applicazione di formule. Poi casomai ci sarà modo di discutere dei criteri con cui sono state effettuate le stime.

Alla fine ci chiediamo: Come possiamo verificare l'attendibilità delle stime effettuate? E magari, come spiegare l'eventuale (?) diversità delle varie stime?

SECONDA FASE

Nella seconda fase si procede alle estrazioni. Occorre ripetere le prove un numero congruo di volte, per valutare la probabilità richiesta con grado più o meno grande di affidabilità.

In questa fase si incontrano nozioni delicate:

- il "tendere" della frequenza alla probabilità,
- i numeri "grandi",
- l'equivalenza dei vari successivi eventi.

Dal diario di bordo di alcune specializzande:

“Abbiamo preso dei pezzettini di carta, su 15 vi abbiamo scritto F e su 10 M, li abbiamo arrotolati e messi in un contenitore. Infine abbiamo effettuato 100 estrazioni (con reimbussolamento) e registrato i risultati ottenuti circa il verificarsi degli eventi:

(M, M) = estrazione di 2 maschi

(F, F) = estrazione di 2 femmine

(M, F) = estrazione di un maschio e di una femmina
(indipendentemente dall'ordine)

Anche se potevamo simulare tali estrazioni con Excel, abbiamo preferito constatare, testare manualmente che cosa succede se si effettuano un numero sempre più elevato di estrazioni.

In definitiva abbiamo ottenuto, su cento estrazioni, i seguenti risultati (riportati in percentuale):

MF	FF	MM
48%	37%	15%

Confrontando i risultati da noi ottenuti con quelli riportati dai nostri colleghi e mettendoli insieme abbiamo ottenuto che la probabilità di ottenere come rappresentanti di classe un maschio e una femmina si assesta intorno al 49%.

A questo punto ci siamo chieste: *“Tale probabilità su che cosa si basa, è corretto calcolarla in tal modo, è significativa?”*

Risolvere (per chi le aveva) le conoscenze in materia e documentandosi ex-novo (per chi sprovvista), possiamo affermare che i risultati dell'esperimento si basano sull'aspettativa, molto radicata nel senso comune, espressa nella **legge empirica del caso**:

“In un gran numero di prove fatte nelle stesse condizioni la frequenza relativa dei successi si avvicina alla probabilità, e l'approssimazione in genere migliora con l'aumentare del numero delle prove”.

Secondo la concezione frequentista di probabilità, è possibile basarsi esclusivamente sulle frequenze per definire che cosa è la probabilità, senza alcuna valutazione preventiva (probabilità a priori). Infatti secondo tale concezione la probabilità è: “*la frequenza relativa dei successi, in un gran numero di prove fatte nelle stesse condizioni*”. Questa affermazione è approssimativa e si presta ad alcune osservazioni tra cui: quante prove sono necessarie per arrivare ad un valore stabilizzato che si possa chiamare probabilità?

Per ovviare a tale inconveniente, si utilizza nella definizione “il limite della frequenza”, arrivando alla versione seguente (corretta) della definizione frequentista:
“La probabilità $P(E)$ di un evento E è il limite della frequenza (relativa) $f_n(E)$ dei successi (cioè delle prove in cui l’evento si verifica), quando il numero n delle prove tende all’infinito”.



Si osserva qui che le frequenze sono definite dal rapporto tra il numero n_E delle prove favorevoli all’evento e il numero totale n di prove effettuate.”

Al termine di questa fase si confronta il risultato ottenuto con la definizione frequentista con quello fornito dalle stime precedenti.

E' l'occasione per parlare di alcuni comuni errori che si fanno nel calcolare le probabilità.

Non è per nulla da sottovalutare l'importanza di coinvolgere gli allievi nell'esperimento sopra descritto, anzi l'approccio intuitivo contenuto nella definizione frequentista è da preferirsi in prima istanza, perché, “sporcandosi le mani”, i ragazzi sono “costretti” a familiarizzare con strumenti empirici per risolvere, seppur in via approssimata, problemi la cui soluzione esatta, algebrica od analitica, non sia praticabile e, aspetto non secondario, a porsi domande, e perciò a cercare risposte che contribuiscono alla costruzione della conoscenza.

TERZA FASE

Infine si procede alla costruzione del modello corrispondente alla probabilità a priori. E si discute di che cosa significa casi possibili, casi favorevoli, equiprobabilità. E di quali requisiti matematici sono necessari per questi calcoli (con cenno al calcolo combinatorio).

Alla fine emerge il risultato del problema, già ragionevolmente intuito in verità alla fine della fase 2.

Passare alle formule significa in particolare introdurre la matematica come modello di situazioni reali (**modellizzazione**), e questo non può che essere l'ultimo passo, giustificato dai tentativi precedenti e da approcci più ingenui.

Definizione classica (o a priori) della probabilità:

“La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli all’evento, e il numero dei casi possibili (purché questi ultimi siano tutti ugualmente probabili)”.

Come si contano i casi possibili?

E quelli favorevoli?

Il primo problema è dunque quello di contare.

Ma si fa presto a dire contare, come se fosse una cosa semplice!

Bisogna imparare a contare le cose più diverse fin dalla scuola elementare.

Ma altro è contare le caramelle, o le matite, altro è contare cose che non si possono toccare o perché sono lontane o perché non si vedono o perché sono troppe, o perché sono vaghe (cercare insieme tanti esempi e studiare diverse strategie per contare è un ottimo esempio di modellizzazione elementare!)

In particolare come si contano i “modi possibili”? E i “casi favorevoli”?

E’ qui che interviene il calcolo combinatorio che però viene presentato nei libri come un repertorio di strani nomi e di formule astratte e astruse di cui non si riesce mai a capire quale si deve usare.

E adesso veniamo al nostro problema...

Quanti sono i casi possibili?

Attenzione, questa non è matematica, qui si pretende di catalogare le cose del mondo, e allora non ci si può (e non ci si deve!) aspettare che, come nella matematica, ci siano risposte sicure e uniche!

[Esempi con i lanci di dadi o di monete. O con la nascita di maschi e femmine. O con ogni altra cosa del mondo reale.]

Attenzione: nei giochi e nelle lotterie si tende, per ovvie ragioni, a rendere minima l'opinabilità delle classificazioni. Ma il mondo è quello che è: di nuovo, la matematica ne fornisce un modello!

Quanti sono i possibili esiti dell'estrazione nel nostro problema (“i casi possibili”)?

(a) Tre?

(b) Due?

(c) Quattro?

(d) Tanti quante sono le possibili coppie di persone?

E a qualcuno potrebbero venire in mente anche altre risposte.

Sono esatte tutte queste risposte! Guai a sostenere che una sola risposta è quella esatta.

Esaminiamo separatamente (a), (b) (c) e (d).

Chi sceglie (a) (tre casi) inquadra bene l'essenza del problema. Capisce che non c'è ragione di distinguere fra l'uno e l'altro maschio né fra l'una e l'altra femmina, ma che le possibili situazioni degne di essere distinte sono solo il caso FF, il caso FM ed il caso MM. Ritene anche, come è giusto, che l'ordine non sia importante, e quindi non distingue fra FM ed MF. Allora i casi possibili sono tre. Fra questi uno solo è “favorevole”. Applicando la formula a priori si ottiene $p = 1/3$. **Ma il risultato è sbagliato!** Come mai? Come si fa a capirlo, a capire cioè che i tre casi considerati non sono equivalenti? La mia tesi è che bisogna maturare una capacità di fiuto che deriva solo dal far precedere le esperienze e le stime all'uso delle formule.

Chi sceglie (b) (due casi) va al sodo. I casi sono due infatti: o i due estratti sono dello stesso sesso oppure sono di sesso diverso. Come dargli torto? La formula qui dà subito come risposta $p = 1/2$. Il bello è che questa volta la risposta è esatta, ma il ragionamento è sbagliato. E' sbagliato perché sarebbe come dire che la probabilità di qualunque evento è sempre $1/2$, perché è sempre possibile dire che i casi sono due: favorevole o sfavorevole. Attenzione, perché questa maniera di ragionare è tutto sommato abbastanza frequente e si adatta a molti casi (nascita di un maschio o di una femmina, numeri pari o dispari, piove o non piove), e può essere utile capire che non ci sarebbe calcolo delle probabilità se tutto l'esistente si suddivide sempre in modo dicotomico.

Chi sceglie (c) (quattro casi) ha forse cominciato a intuire una cosa importante, vale a dire che la suddivisione in casi deve tenere conto della loro equivalenza. I quattro casi per lui sono FF, FM, MF, MM. O magari ha intuito che è possibile suddividere le due estrazioni in due tappe e rendere così meglio conto di tutto ciò che potrebbe capitare: allora l'ordine è importante e occorre distinguere FM da MF. La formula qui dà come risposta $p = 2/4 = 1/2$.

Di nuovo la risposta è esatta, ma il ragionamento è ancora una volta sbagliato. Ma capire qui perché il ragionamento è sbagliato è più difficile, e di nuovo arriva in soccorso l'esperienza fatta nella fase precedente, quando si è visto, come è peraltro intuitivo, che il caso FF è più frequente del caso MM.

Non resta che la risposta (d), che è “quella giusta”. Ma non è affatto facile arrivarci e faremmo torto all’intelligenza degli studenti, a imporgliela. Perché se facciamo così, qualcuno fra gli studenti ci sarà pure che capisce bene e ci segue, ma sarà solo quello particolarmente dotato; la gran maggioranza invece non ci riuscirà.

Per avere casi sicuramente equivalenti dunque conviene trattare tutti gli studenti come diversi uno dall’altro. Qui però diventa difficile l’operazione del conteggio. Difficile anche perché gli studenti sono tanti (25), e sarebbe arduo elencare tutte le coppie distinguendoli uno per uno con dei nomi o con altre etichette (ad esempio numeri). Se fossero molti di meno l’espedito dell’elenco puro e semplice sarebbe il migliore approccio.

Si possono individuare due strategie. La prima consiste nel separare la prima estrazione dalla seconda, la seconda nel trovare un modo per contare le possibili coppie.

Esaminiamo la prima strategia. Alla prima estrazione ci sono 25 studenti, di cui 15 femmine e 10 maschi. La probabilità, con la formula a priori, che si estragga una femmina alla prima estrazione è dunque

$$p(F_1) = 15/25,$$

quella che si estragga un maschio è

$$p(M_1) = 10/25.$$

Qui dovrebbe ormai essere chiaro che la formula può adoperarsi con sicurezza, perché si può supporre che tutti gli individui abbiano la medesima chance di essere estratti.

Veniamo alla seconda estrazione. Qui dobbiamo distinguere il caso in cui nella prima è stata estratta una femmina da quello in cui è stato estratto un maschio.

Nel primo caso su 24 studenti ci sono ora 14 femmine e 10 maschi. La probabilità di avere una femmina è

$$p(F_2/F_1) = 14/24,$$

quella di avere un maschio è

$$p(M_2/F_1) = 10/24.$$

Analogamente si trova per il secondo caso

$$p(F_2/M_1) = 15/24$$

e

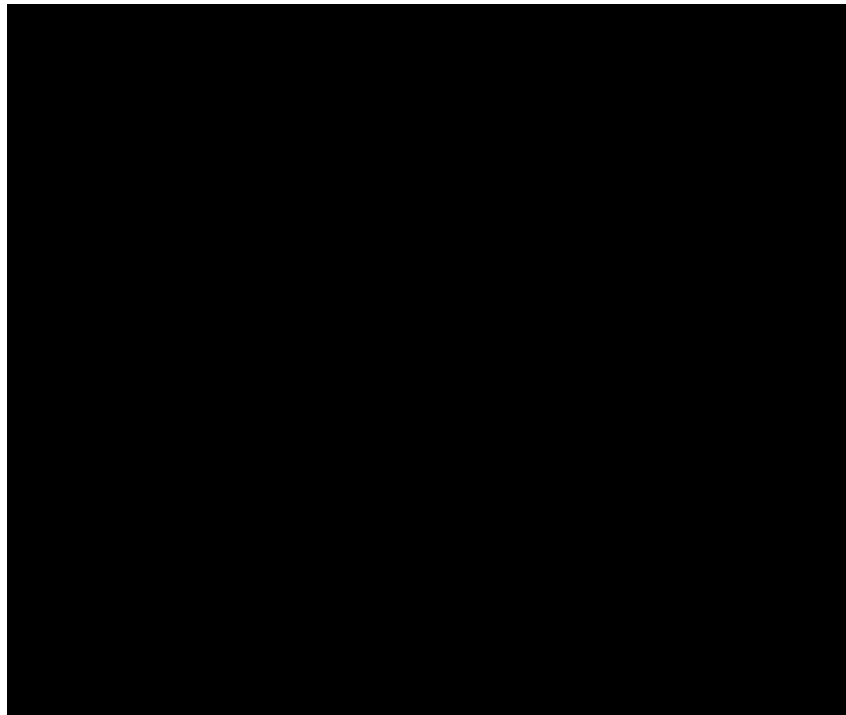
$$p(M_2/M_1) = 9/24,$$

perché su 24 studenti ora le femmine sono 15 e i maschi 9.

Si tratta ora di moltiplicare due a due i valori trovati, secondo il criterio della probabilità composta, che si applica quando si prende in considerazione il susseguirsi di due eventi.

Capire perché si debba moltiplicare non è banale, ma ci si può arrivare come al solito facendo prima esperienza concreta o anche usando rappresentazioni grafiche. Ma non mi ci voglio ora soffermare.

Avremo dunque quattro possibili casi: FF, FM, MF, MM, dove ora conta l'ordine delle due uscite. Le rispettive probabilità sono date da:



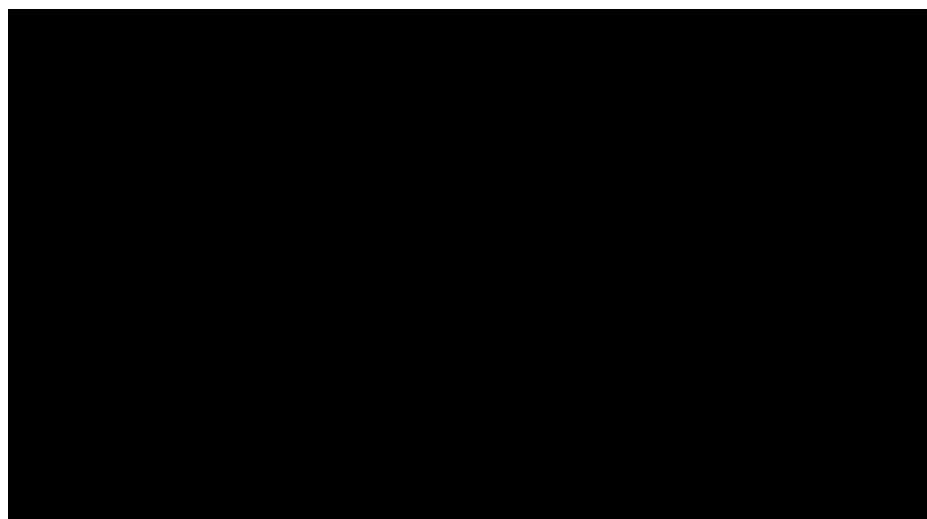
Esaminiamo la seconda strategia (più semplice della prima e secondo me preferibile, perché non richiede la nozione di probabilità composta). Si tratta di contare tutte le coppie di studenti e fra queste quelle costituite da (due femmine, da due maschi e da) una femmina e un maschio. Come si fa?

Questo è un esercizio di conta, di quelli su cui bisognerebbe molto impraticarsi.

Tutto sommato non è difficile. Si tratta solo di capire che, scelto un primo studente fra 25 (dunque in 25 modi diversi), la scelta del secondo si potrà fare in 24 modi. Vengono in tutto $25 \times 24 = 600$ coppie. Poiché però ogni coppia è presente in questo elenco due volte, bisogna poi dividere per 2, e si ottiene così il numero voluto: 300.

In modo analogo si contano le coppie costituite da due femmine, che sono $15 \times 14/2 = 105$, quelle costituite da due maschi che sono $10 \times 9/2 = 45$ e quelle costituite da un maschio e una femmina che sono tutte le rimanenti: $300 - 105 - 45 = 150$.

E si conclude di nuovo che



NON E' FINITA!

Potrebbe bastare. Se non fosse che il problema è così "bello" che, una volta risolto, ne pone subito di nuovi.

E negli sviluppi possibili si incontra "tutta la matematica", dal calcolo algebrico (non banale), allo studio di funzioni, alle successioni, all'aritmo geometria, eccetera eccetera.

E alla fine c'è un "premio": la scoperta di cose nuove, belle, inaspettate.

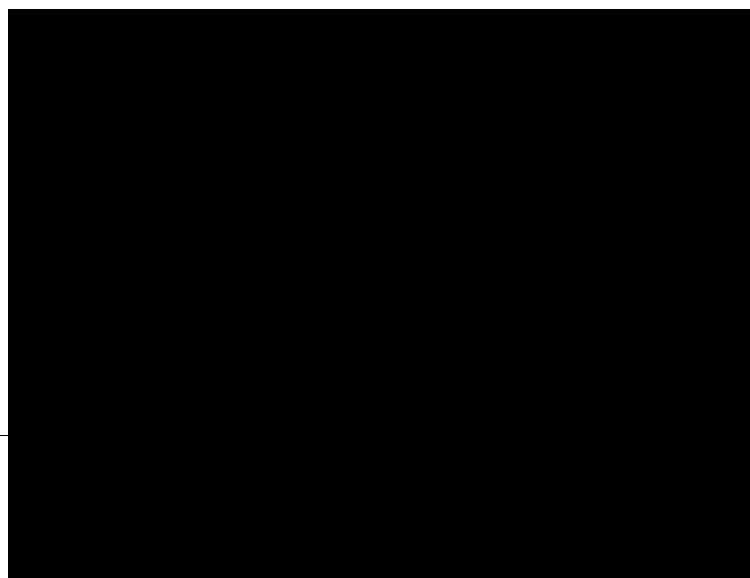
Abbiamo visto che la probabilità del problema è $1/2$: strano, no? Perché proprio $1/2$, con i numeri 10 e 15? Questi due numeri sono scelti a caso? E quando è che viene $1/2$, per quali altre coppie di numeri? E se i numeri delle femmine e dei maschi fossero uguali, verrebbe pure $1/2$? Come affrontare questo problema? Che cosa si scopre?

Prima fase. Esperimenti, verifiche.

Seconda fase. Congetture.

Terza fase. Tentativi di generalizzare.

Fra le congetture si fa largo tipicamente quella della proporzione. Per esempio, siccome $15 : 10 = 12 : 8$, si ipotizza che la proprietà (cioè probabilità uguale ad $1/2$) valga anche per una classe di 20 alunni. Si prova e si vede che invece no. Nel caso numerico scelto, si ha:



In definitiva si trova $p(\text{FM}) + p(\text{MF}) = 50,5\%$ circa. Siamo molto vicini ad $1/2$, ma non è $1/2$!

[Fra parentesi, non sarà anche possibile approfittare di un problema come questo, nel quale ci si immerge per la curiosità di trovare una risposta, per aiutare gli studenti a spraticchirsi con il calcolo delle frazioni, a passare da frazioni a numeri decimali a percentuali, a ragionare di approssimazioni: il tutto con qualche consapevolezza in più?]

Non resta che passare all'algebra! Ah, il famigerato passaggio dall'aritmetica all'algebra!

Per ragionare in generale, occorrono le lettere.

Indichiamo con n il numero totale di alunni, con f il numero delle femmine, con m quello dei maschi.

Servono tre lettere? Sì? No?

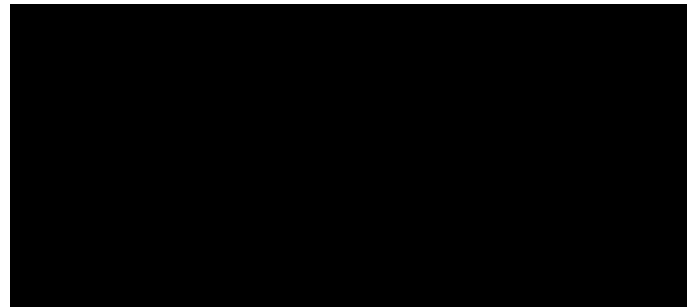
Certamente vale la relazione $f + m = n$. Che cosa ce ne facciamo? Possiamo tenerla da parte per dopo; possiamo assumerla come una delle relazioni che sussistono fra le incognite f , m , n ; possiamo usarla per ridurre le incognite da due a tre, scegliendone solo due (ma quali?).

La probabilità che estraendo due persone a caso esca un maschio ed una femmina è pari a:

$$p(FM) + p(MF) =$$

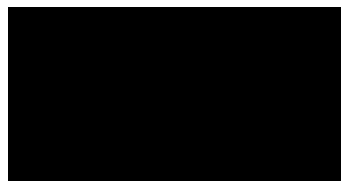


Da dove proviene questa relazione? Dalle due uguaglianze incontrate prima, cioè:



nelle quali abbiamo posto f al posto di 15, m al posto di 10 ed n al posto di 25.

Possiamo adesso chiederci quale relazione deve esserci tra n , f ed m affinché tale probabilità sia 0,5. Si ottiene così l'equazione



che si trasforma facilmente in:



Ma che equazione è: qual è l'incognita? Quante sono le incognite? Come si risolve?

[Digressione su equazioni, incognite, parametri, soluzioni, unicità, procedure...]

Si possono fare tentativi e finalmente scegliere di esprimere m come $n - f$ e risolvere l'equazione nell'incognita f con parametro n : si tratta di un'equazione di secondo grado. Ecco i passaggi:

$$4fm = n(n - 1)$$

$$4f(n - f) = n(n - 1)$$

$$4nf - 4f^2 = n^2 - n$$

$$4f^2 - 4nf + n^2 - n = 0$$

$$f = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2 - 4n + 4n}}{4} = \frac{2n \pm 2\sqrt{n}}{4} = \frac{n \pm \sqrt{n}}{2}$$

Si scopre così che n deve essere un quadrato perfetto.
Ponendo $n = b^2$, si trova:



da cui si ricava anche il valore di m :

$$m = n - f = h^2 - \frac{h^2 \pm h}{2} = \frac{2h^2 - h^2 \mp 1}{2} = \frac{h(h \mp 1)}{2}$$

Ci dicono qualcosa questi valori? Forse sì, forse no.

Ma possiamo sicuramente dare valori diversi ad b e trovare la tabella seguente, nella quale poniamo $n > 1$ e supponiamo per semplicità che sia sempre $f > m$:

b	n	f	m
2	4	3	1
3	9	6	3
4	16	10	6
5	25	15	10
6	36	21	15
7	49	28	21

Ci dicono niente questi numeri? Come sono fatte le due colonne di f e di m ? Sapremmo allungarle senza più usare la formula che genera questi numeri, ma solo guardando ai numeri già presenti?

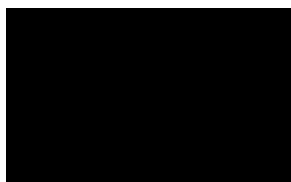
Abbiamo trovato i nostri risultati scegliendo f ed n come incognite, e poi risolvendo l'equazione rispetto ad f .

Potevamo fare altre scelte, ad esempio esprimere tutto tramite f ed m .

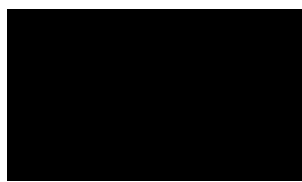
Non ci soffermiamo su questo.

Prendiamo invece in esame un altro approccio. Poiché le tre incognite della nostra equazione di origine, cioè $4fm = n(n \pm 1)$ sono legate dal fatto che $n = f + m$, e quindi gioca un ruolo la somma delle due incognite f ed m , perché non introdurre anche la loro differenza, tanto più che nelle congetture precedenti avevamo forse concepito come significativo il rapporto fra f ed m , e potrebbe invece essere significativa proprio la loro differenza.

Se dunque poniamo $d = f - m$, ci accorgiamo che possiamo esprimere f ed m in funzione di n e d . E' facile passare da



a



Se allora riprendiamo l'equazione $4fm = n(n - 1)$, e sostituiamo al posto di $2f$ e $2m$ i loro valori in termini di d ed n , troviamo $(n + d)(n - d) = n(n - 1)$, ovvero $n^2 - d^2 = n^2 - n$, e infine $d^2 = n$. Una meraviglia, rispetto all'altro approccio: praticamente è scomparsa ogni equazione di secondo grado!

Ed è una bellezza anche il risultato ultimo $d^2 = n$: la somma di femmine e maschi è uguale al quadrato della loro differenza!

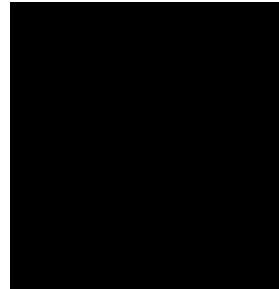
Infatti la somma di 10 e 15 è 25 e la differenza è 5!

Anche qui possiamo stilare una tabella, questa volta partendo da possibili valori dati ad n che devono essere ovviamente dei quadrati!

I valori di f e di m si trovano poi utilizzando le due relazioni



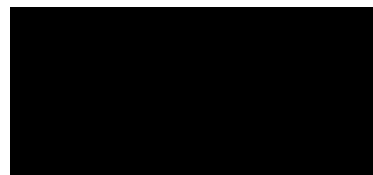
ovvero:



Ecco la tabella,
di fatto la stessa di prima:

n	d	f	m
4	2	3	1
9	3	6	3
16	4	10	6
25	5	15	10
36	6	21	15
49	7	28	21

Bene, che cosa è saltato fuori? I numeri delle due colonne sono i **numeri triangolari**! Quelli cioè che corrispondono, per ciascun n , alla somma dei numeri naturali da 1 ad n . Numeri pieni di proprietà, noti già agli antichi che li rappresentavano mediante figure geometriche (appunto, triangoli). La loro espressione generale è:



Su questi numeri c'è il famoso aneddoto di Gauss, si possono fare dimostrazioni con modalità geometriche diverse, si può ragionare per induzione; si possono fare infinite generalizzazioni.

Noi qui abbiamo dimostrato un vero e proprio (sconosciuto ai più) teorema:

TEOREMA. In una classe costituita da m maschi ed f femmine, dovendo estrarre a sorte due rappresentanti, condizione necessaria e sufficiente affinché la probabilità di estrarre un maschio ed una femmina sia uguale ad $1/2$ è che m ed f siano numeri triangolari consecutivi.

Ma non basta. Abbiamo scoperto un'altra mirabile proprietà delle coppie di numeri triangolari consecutivi, suscettibile anch'essa di svariate dimostrazioni, ed è che la loro somma è uguale al quadrato della loro differenza.

Abbiamo esaminato uno sviluppo possibile del nostro problema originario.

Esso non è l'unico. Per esempio si può studiare quanto vale la probabilità nel caso generale in cui sia $f = m$. Si tratta qui di studiare e rappresentare funzioni. Vengono fuori asintoti, rappresentazioni cartesiane, e chi più ne ha più ne metta. E si possono intravedere ancora tanti altri possibili sviluppi.

In particolare il legame che abbiamo trovato tra il problema iniziale, apparentemente banale, e curiosi risultati generali di aritmetica, dovrebbe servire ad alimentare l'interesse sia degli insegnanti sia degli allievi nei confronti della matematica, costituire la base per una gran mole di lavoro da fare subito o da procrastinare.

Una considerazione finale che si può trarre è che in matematica le cose sono sempre collegate l'una l'altra da sottili fili che bisogna saper intravedere. Un'insegnante che riesca a costruire un percorso didattico tale da rendere gli allievi consapevoli di tali collegamenti, scoperti al momento opportuno, può contribuire in modo vigoroso allo sviluppo della competenza in matematica.