

Accademia Piceno – Aprutina dei Velati in Teramo e
Sezioni Mathesis di Napoli e di Castellammare di Stabia

Scuola Estiva di Formazione per i docenti della Scuola Secondaria del Secondo Ciclo di Istruzione
Castellammare di Stabia; Istituto Suore Compassioniste

La Matematica dell'Incerto

Insegnamento della Probabilità e della Statistica

15; 16; 17 E 18 LUGLIO 2018

Indizi, Pre-giudizi e il Ragionamento Bayesiano

Aniello Buonocore

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”

Università degli Studi Napoli Federico II

aniello.buonocore@unina.it

NOTAZIONI

Utilizzerò la lettera $\mathbb{P}$ per rappresentare sia una probabilità che una frequenza relativa

$$\mathbb{P}[A]$$

$$\mathbb{P}_B[A]$$

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

Nel mese di dicembre del 1992 i professori Carla Rossi e Romano Scozzafava inviano ad alcuni dei maggiori quotidiani nazionali una lettera dal provocatorio titolo “Dalle leggere alle pesanti?”. Come si intuisce abbastanza facilmente essi intendono “intromettersi” nel dibattito, in quel frangente molto controverso della dialettica politico-sociale, avvertito di estrema importanza da parte dell’opinione pubblica sulla punibilità e sul recupero dei tossicodipendenti. Ovviamente, la loro finalità era “solo” quella di smascherare una fallacia nel ragionamento “dalle leggere alle pesanti”:

Gli aspetti emotivi prevalgono su quelli razionali, si indaga sulle storie individuali e si interroga il consumatore di droghe per sapere, in particolare, se fumava spinelli (cioè le cosiddette droghe “leggere”, come hashish e marijuana) prima di diventare tossicodipendente. La risposta è di solito affermativa, e nei dibattiti questo fatto viene regolarmente usato per sostenere la necessità di proibire anche queste sostanze, che sarebbero la “porta d’ingresso” alla tossicodipendenza.

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

Ora, se anche uno volesse fare l'avvocato del diavolo per dire che i fautori del proibizionismo usassero l'argomento in maniera strumentale, è stupefacente constatare come esso facesse (e fa ancora) molta presa sugli ascoltatori delle trasmissioni televisive e sui lettori dei giornali.

Dalla Prefazione di S. Rao al Volume della Scuola Estiva per i docenti
Della Scuola Secondaria del Secondo Ciclo di Istruzione
La Matematica dell'Incerto – Insegnamento della Probabilità e della Statistica

Insegnamento della Probabilità e della Statistica nella Scuola. Perché? Come?

Più in generale, nella loro vita quotidiana, le persone fanno scelte ed esprimono giudizi intuitivi secondo euristiche spesso non consapevoli e molto distanti da forme di razionalità scientifica (si vedano per esempio $[3]^2$ e $[4]^3$).

D'altra parte si può assumere che una buona conoscenza delle basi del calcolo delle probabilità e della statistica potrebbe certo aiutarci a prendere decisioni più consapevoli e più vantaggiose. O almeno a renderci conto della distanza di molte delle nostre intuizioni da fatti scientificamente accertati. Con vantaggio nostro e di tutti. Ecco perché è importante sviluppare queste conoscenze nelle scuole (si pensi, per esempio, alla piaga sociale della dipendenza dal gioco).

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

L'argomentazione con la quale i professori Rossi e Scozzafava demoliscono il ragionamento “dalle leggere alle pesanti” è di tipo paradossale: se alle stesse persone intervistate fosse stata posta la domanda “ti piaceva mangiare le caramelle da piccolo?” la percentuale di risposte affermative certamente sarebbe stata maggiore di quella ottenuta con la domanda sul consumo delle droghe leggere. Ma nessuno si sogna di mettere in relazione caramelle e droghe. E6

Alla fine della lettera gli autori forniscono una spiegazione più tecnica per la non validità del ragionamento “dalle leggere alle pesanti”:

In conclusione, quindi, è fra i consumatori di spinelli che andrebbe fatta un'indagine per vedere quanti diventeranno consumatori di droghe “pesanti”, e non viceversa: ma è stata mai fatta una tale indagine?

Diapositiva 5

E6

Emilia; 18/07/2018

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

Da parte mia, faccio osservare che il disegno sperimentale (la procedura per ottenere i dati), che è del tipo

“tempo corrente” - “qualche anno prima”,

contribuisce molto a ingenerare la convinzione della validità del ragionamento “dalle leggere alle pesanti”:

le persone sono indotte a credere che è agli attuali tossicodipendenti che bisogna chiedere se prima fumassero gli spinelli.

È invece molto più difficile far accettare la modalità di raccolta dei dati proposta dagli autori:

è agli attuali fumatori di spinelli che tra qualche anno bisognerà chiedere se nel frattempo sono diventati tossicodipendenti.

Ma ciò non è necessario. Nel linguaggio che ho utilizzato per il titolo di questo seminario si potrebbe dire che sono stati confusi (volutamente o meno) gli indizi con le conclusioni del ragionamento ovvero, nel linguaggio bayesiano, le verosimiglianze (ovvero le probabilità tratte dai dati) con le probabilità *a posteriori*.

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

In effetti, indicata con Ω la popolazione obiettivo (ben individuata e circoscritta prima dell'avvio dell'indagine), la tesi che i fautori del proibizionismo volevano promuovere è che la percentuale dei tossicodipendenti (evento T) nella parte di Ω costituita dalle sole persone che prima di diventare tossicodipendenti “fumavano gli spinelli” (evento S) fosse molto più grande di quella valutata sulla totalità della popolazione Ω e rasantasse l'unità. In simboli:

$$\mathbb{P}[T] \ll \mathbb{P}_S [T] \cong 1.$$

Invece, il loro ragionamento è quello di “produrre” solo il risultato dell'indagine da loro individuata, ovvero la percentuale

$$\mathbb{P}_T [S]$$

e affermare che tale quantità è “impressionantemente” grande (ovvero, abbastanza vicino a 1).

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

A mio avviso, c'è ancora un aspetto da sottolineare nel ragionamento fallace: la mancanza assoluta dei pre-giudizi che nel linguaggio bayesiano rappresentano le *probabilità a priori*.

In altri termini la percentuale dei tossicodipendenti nella totalità della popolazione Ω non gioca alcun ruolo.

In termini più generali, nel ragionamento fallace è trascurata quella che Julia Galef asserisce essere la regola numero uno per chi voglia ragionare in modo bayesiano: tenere bene in mente la propria valutazione delle probabilità a priori.

In maniera formale (*legge delle probabilità congiunte o composte*) le cose stanno così:

$$\mathbb{P}[S] \cdot \mathbb{P}_S[T] = \mathbb{P}[T \cap S] = \mathbb{P}[T] \cdot \mathbb{P}_T[S]$$

Julia Galef è co-fondatrice del “Center for Applied Rationality”, una organizzazione non-profit con sede a Berkeley, che organizza workshop sul miglioramento del ragionamento e del processo decisionale.

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

$$\mathbb{P}[S] \cdot \mathbb{P}_S[T] = \mathbb{P}[T \cap S] = \mathbb{P}[T] \cdot \mathbb{P}_T[S]$$

Essa si interpreta facilmente: la probabilità di essere un tossicodipendente che ha iniziato fumando gli spinelli è uguale

- 1) alla probabilità di essere un attuale fumatore di spinelli moltiplicata per la probabilità di diventare nel prossimo futuro tossicodipendente; oppure
- 2) alla probabilità di essere un attuale tossicodipendente moltiplicata per la probabilità di essere stato anni prima fumatore di spinelli.

Dalla formula delle probabilità congiunte è facile ricavare la formula di Bayes:

$$\mathbb{P}_S[T] = \mathbb{P}[T] \cdot \frac{\mathbb{P}_T[S]}{\mathbb{P}[S]}.$$

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

$$\mathbb{P}_S[T] = \mathbb{P}[T] \cdot \frac{\mathbb{P}_T[S]}{\mathbb{P}[S]}$$

Quindi, la percentuale dei tossicodipendenti tra i fumatori di spinello è proporzionale alla percentuale dei tossicodipendenti nella totalità della popolazione Ω .

Il fattore di proporzionalità α è il rapporto della percentuale dei fumatori di spinelli tra i tossicodipendenti e la percentuale dei fumatori di spinello nella totalità della popolazione Ω .

Allora, dal momento che i tossicodipendenti censiti annualmente dai “SerT” sono dell’ordine di poche centinaia di migliaia su una popolazione di qualche decina di milioni di persone, se anche si ponesse $\alpha=3$, si avrebbe che l’affermazione

$$\mathbb{P}[T] \ll \mathbb{P}_S[T] \cong 1$$

non è esatta sia nel senso del molto minore che nel senso del circa uguale.

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

$$\mathbb{P}_S[T] = \mathbb{P}[T] \cdot \frac{\mathbb{P}_T[S]}{\mathbb{P}[S]}$$

In effetti, si può raggiungere una conclusione del ragionamento senza passare attraverso una valutazione quantitativa della percentuale dei fumatori di spinello nella totalità della popolazione Ω .

Basta applicare la formula di Bayes anche all'evento $\bar{T}$:

$$\mathbb{P}_S[\bar{T}] = \mathbb{P}[\bar{T}] \cdot \frac{\mathbb{P}_{\bar{T}}[S]}{\mathbb{P}[S]}$$

e rapportare membro a membro le relazioni così ottenute:

$$\frac{\mathbb{P}_S[T]}{\mathbb{P}_S[\bar{T}]} = \frac{\mathbb{P}[T]}{\mathbb{P}[\bar{T}]} \cdot \frac{\mathbb{P}_T[S]}{\mathbb{P}_{\bar{T}}[S]}.$$

DALLE LEGGERE ALLE PESANTI?

$$\frac{\mathbb{P}_S[T]}{\mathbb{P}_S[\bar{T}]} = \frac{\mathbb{P}[T]}{\mathbb{P}[\bar{T}]} \cdot \frac{\mathbb{P}_T[S]}{\mathbb{P}_{\bar{T}}[S]}.$$

Quindi, tra i fumatori di spinelli il rapporto tra la percentuale dei tossicodipendenti e quella dei non tossicodipendenti (rapporto delle probabilità a posteriori) è proporzionale al rapporto tra le percentuali degli stessi eventi valutate nella totalità della popolazione Ω (rapporto delle probabilità a priori).

Il fattore di proporzionalità è uguale al rapporto tra la verosimiglianza di fumare gli spinelli essendo tossicodipendente e la verosimiglianza di fumare gli spinelli essendo non tossicodipendente.

La formula evidenzia il fatto che la popolazione Ω è ripartita nei due eventi incompatibili T e $\bar{T}$ e che quello che è rilevante ai fini del ragionamento bayesiano (o induttivo) è la considerazione dell'evento S che nel suo primo membro si suppone realizzato.

SALOMONE E LE DUE MERETRICI (Bibbia, 1° Re 3).

In quel tempo vennero due donne meretrice al Re e si presentarono dinanzi a lui. Una di esse disse: “Ascoltami, te ne prego, o mio signore; io e questa donna abitavamo nella medesima casa, e io partorii presso di essa nella stessa stanza. Tre giorni dopo che io ebbi partorito, anche costei ebbe un figliolo, e stavamo insieme, e non vi era altri con noi nella casa all’infuori di noi due.

Ora morì il figliolo di questa donna durante la notte, avendolo essa soffocato mentre dormiva. Levatosi allora nel cuor della notte, di nascosto tolse il mio figlio dal fianco della tua ancella, che dormiva, e se lo collocò sul suo seno, mentre il suo figlio, che era morto, lo pose sul mio seno.

Il mattino nell’alzarmi per dare il latte al figliol mio, lo vidi morto: ma avendo guardato con maggior diligenza alla luce del giorno, m’accorsi che non era quello che io avevo generato”.

SALOMONE E LE DUE MERETRICI (Bibbia, 1° Re 3)

L'altra donna rispose: “Non è vero quanto tu dici, ma il figlio tuo è morto; il mio vive”. Al contrario l'altra diceva: “Tu menti poiché il mio figlio vive e il tuo è morto”; e così litigavano alla presenza del Re.

Allora il Re disse: “Una dice: Il mio figlio vive e il tuo figlio è morto. E l'altra risponde: “No, ma è il figlio tuo che è morto, il mio vive””. E il Re continuò: “Portatemi una spada”. Quando ebbero portato la spada davanti al Re, egli soggiunse: “Dividete il bambino in due parti e datene una metà all'una e una metà all'altra”.

La donna, madre del figlio vivo, siccome si sentì commuovere le viscere per amore del proprio figliolo, disse al Re: “Te ne scongiuro, o signore, dà a lei il bambino vivo e non volerlo uccidere”. Al contrario l'altra diceva: “Non sia né mio, né tuo, ma sia diviso”. Rispose allora il Re e disse: “Date a costei il bambino vivo e non si uccida, poiché costei è la vera madre”.

SALOMONE E LE DUE MERETRICI (Bibbia, 1° Re 3)

Per formalizzare il ragionamento di Salomone si consideri l'evento

D : “la prima donna che si è rivolta al Re è la madre del bambino vivo”

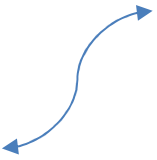
e si noti che

- a) la prima frase sottolineata nel racconto (*e non vi era altri con noi nella casa all'infuori di noi due*) comporta che la popolazione (in questo caso l'evento certo) è partizionata da D e dal suo negato $\bar{D}$;
- b) la seconda frase sottolineata (*Una dice: Il mio figlio vive e il tuo figlio è morto. E l'altra risponde: “No, ma è il figlio tuo che è morto, il mio vive”*) è la valutazione delle probabilità a priori, ovvero la probabilità dei precedenti pre-giudizi, effettuata dal Re: non ha altra scelta che assegnare uguale probabilità a D e a $\bar{D}$;
- c) nella terza frase sottolineata (*Dividete il bambino in due parti e datene una metà all'una e una metà all'altra*), si evidenzia l'indizio che il Re ha utilizzato:

U : “si uccida il bambino rimasto in vita”.

SALOMONE E LE DUE MERETRICI (Bibbia, 1° Re 3)

Applicando la formula di Bayes agli eventi D e $\bar{U}$, quindi ragionando sul negato dell'indizio punto c) dell'elenco precedente, e utilizzando la formula delle probabilità congiunte si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\bar{U}}[D] &= \frac{\mathbb{P}[D] \cdot \mathbb{P}_D[\bar{U}]}{\mathbb{P}[\bar{U}]} \stackrel{\text{a)}}{=} \frac{\mathbb{P}[D] \cdot \mathbb{P}_D[\bar{U}]}{\mathbb{P}[(D \cap \bar{U}) \cup (\bar{D} \cap \bar{U})]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[D] \cdot \mathbb{P}_D[\bar{U}]}{\mathbb{P}[D \cap \bar{U}] + \mathbb{P}[\bar{D} \cap \bar{U}]} \quad \text{Teorema di Bayes} \\ &\stackrel{\text{b)}}{=} \frac{\cancel{\mathbb{P}[D]} \cdot \mathbb{P}_D[\bar{U}]}{\cancel{\mathbb{P}[D]} \cdot \mathbb{P}_D[\bar{U}] + \cancel{\mathbb{P}[\bar{D}]} \cdot \mathbb{P}_{\bar{D}}[\bar{U}]} \\ &= \frac{\mathbb{P}_D[\bar{U}]}{\mathbb{P}_D[\bar{U}] + \mathbb{P}_{\bar{D}}[\bar{U}]}.\end{aligned}$$


SALOMONE E LE DUE MERETRICI (Bibbia, 1° Re 3)

$$\mathbb{P}_{\bar{U}}[D] = \frac{\mathbb{P}_D[\bar{U}]}{\mathbb{P}_D[\bar{U}] + \mathbb{P}_{\bar{D}}[\bar{U}]}$$

Per completare l'analisi è necessario interpretare come il Re abbia valutato le verosimiglianze dell'indizio:

$$\mathbb{P}_D[\bar{U}] = 1 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}_{\bar{D}}[\bar{U}] = 0$$

Infatti, solo se la donna che è la madre del bambino vivo non teme di contrastare l'autorità del Re contestando la soluzione da lui prospettata.

In definitiva:

$$\mathbb{P}_{\bar{U}}[D] = \frac{\mathbb{P}_D[\bar{U}]}{\mathbb{P}_D[\bar{U}] + \mathbb{P}_{\bar{D}}[\bar{U}]} = \frac{1}{1 + 0} = 1.$$

IL DILEMMA DI MONTHY HALL

Si tratta di una situazione nella quale l'evento certo è partizionato in tre eventi.

Nel programma televisivo americano degli anni settanta “Let's Make a Deal” il conduttore Monty Hall presentava al concorrente di turno tre porte numerate da 1 a 3, informandolo che una di queste nascondeva un ricco premio mentre le altre due avrebbero rivelato solo premi scherzosi o di consolazione.

Dopo che il concorrente aveva effettuato una prima scelta sulle tre porte Monty Hall ne apriva un'altra mostrando che essa non nascondeva l'ambito premio (nel seguito PREMIO).

A questo punto veniva offerta al concorrente la possibilità di confermare la sua scelta o di cambiarla a favore dell'altra porta rimasta chiusa.

La questione allora è la seguente: al concorrente conveniva confermare la sua scelta iniziale o cambiarla?

IL DILEMMA DI MONTHY HALL

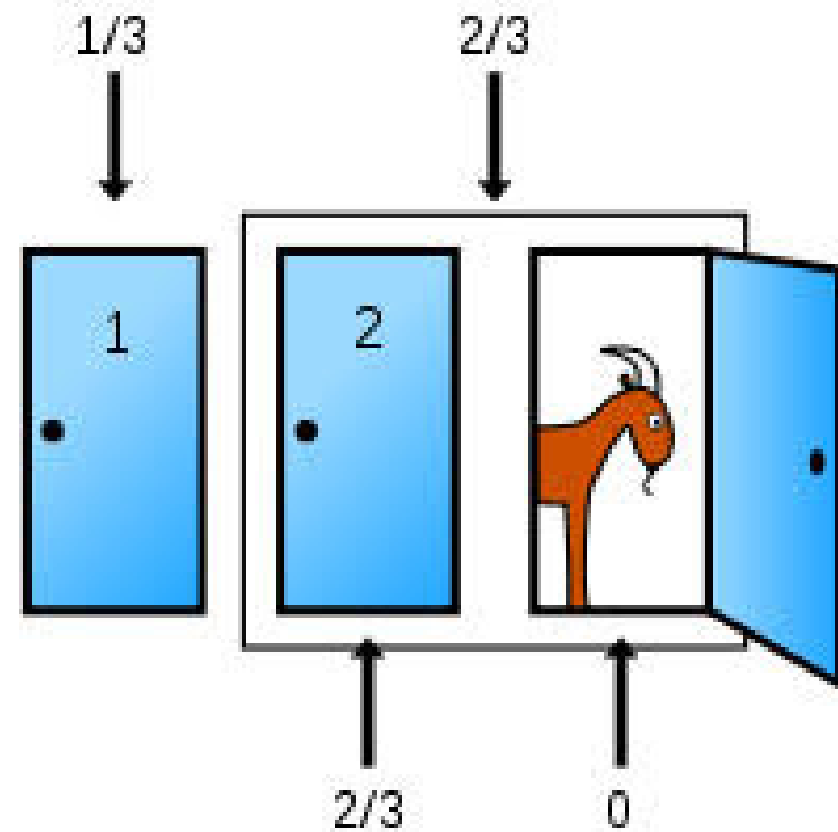
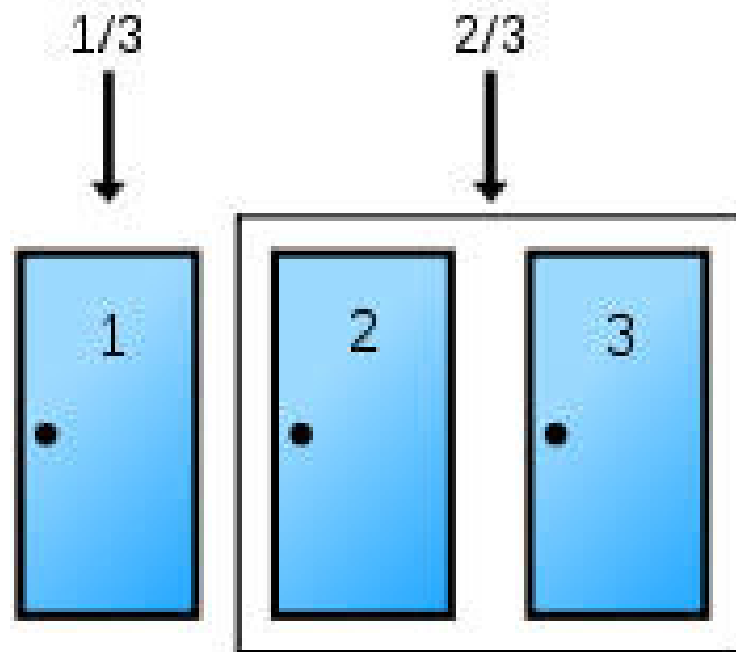
In un problema così impostato, la risposta corretta è che al concorrente conviene sempre cambiare la sua scelta originale, ma ciò appare fortemente contro intuitivo.

Difatti la quasi totalità delle persone, anche quelle che possono vantare una solida formazione statistica, preferisce confermare la propria scelta dato che nella fase finale del gioco attribuisce la stessa probabilità di celare il PREMIO ad entrambe le porte rimaste chiuse.

Ma le cose in realtà non stanno così.

Nell'ottobre del 1990 Marilyn vos Savant, curatrice della rubrica *Ask to Marilyn* tenuta su *Parade*, un periodico di ampia tiratura, risolse il problema e l'episodio fece un certo scalpore, in quanto anche diversi accademici non riconobbero la correttezza della sua soluzione.

IL DILEMMA DI MONTHY HALL



IL DILEMMA DI MONTHY HALL

RAGIONAMENTO DEL TIPO “FORZIAMO LA SITUAZIONE”

Sì, dovresti cambiare scelta.

1. La prima porta offre una probabilità di vittoria di $1/3$.
2. Ma la seconda offre una possibilità di vittoria di $2/3$.
3. Ecco un esempio per farti capire.
4. Immagina che le porte siano un milione e tu scegli la prima.
5. Poi il conduttore, che sa cosa c'è dietro le porte e eviterà quindi di aprire quella con il premio, le apre tutte tranne la numero 777mila e 777.
6. **Scegliaresti al volo la 777mila e 777, giusto?**

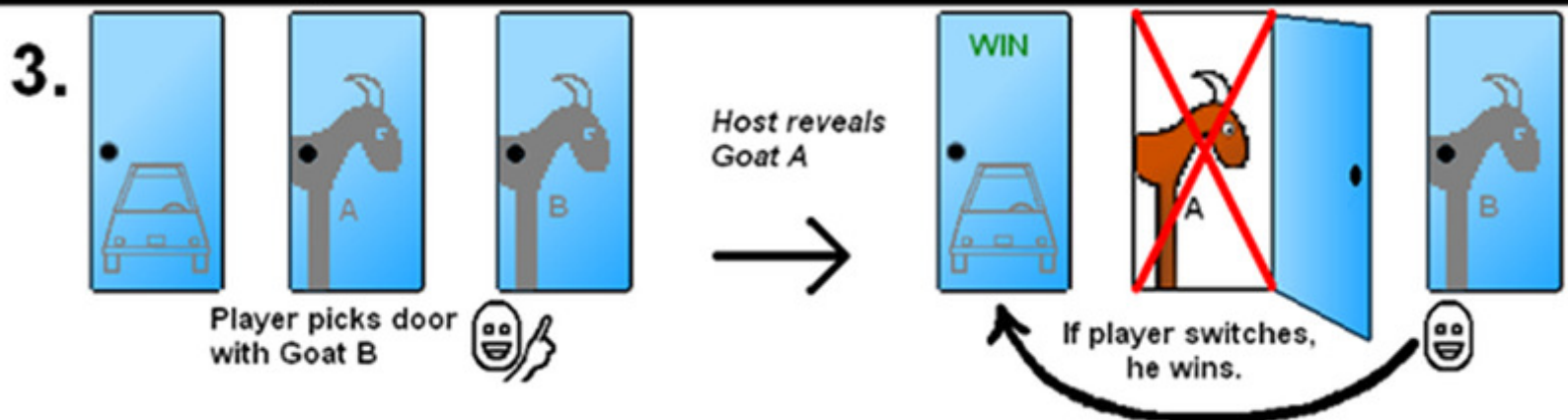
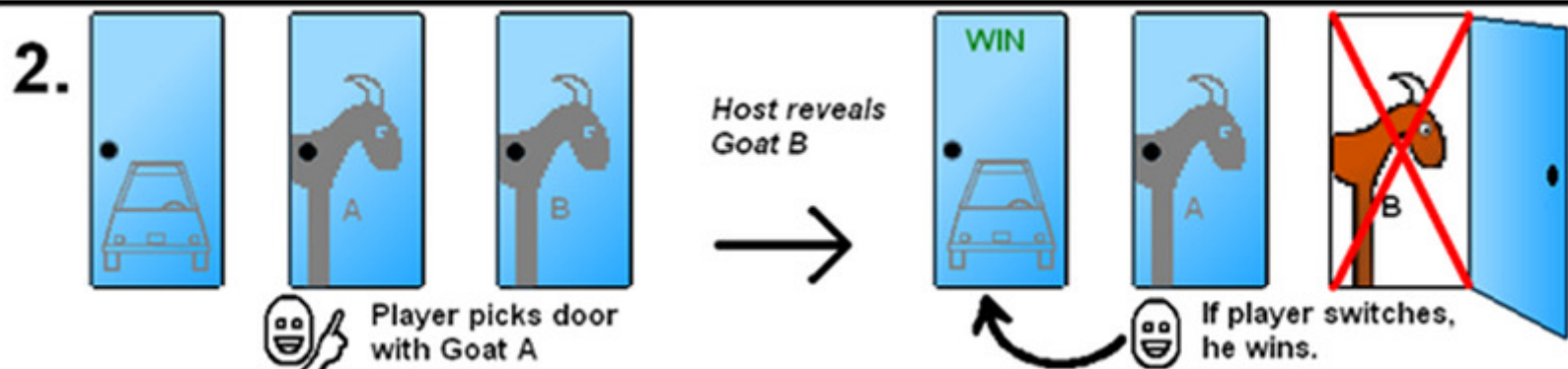
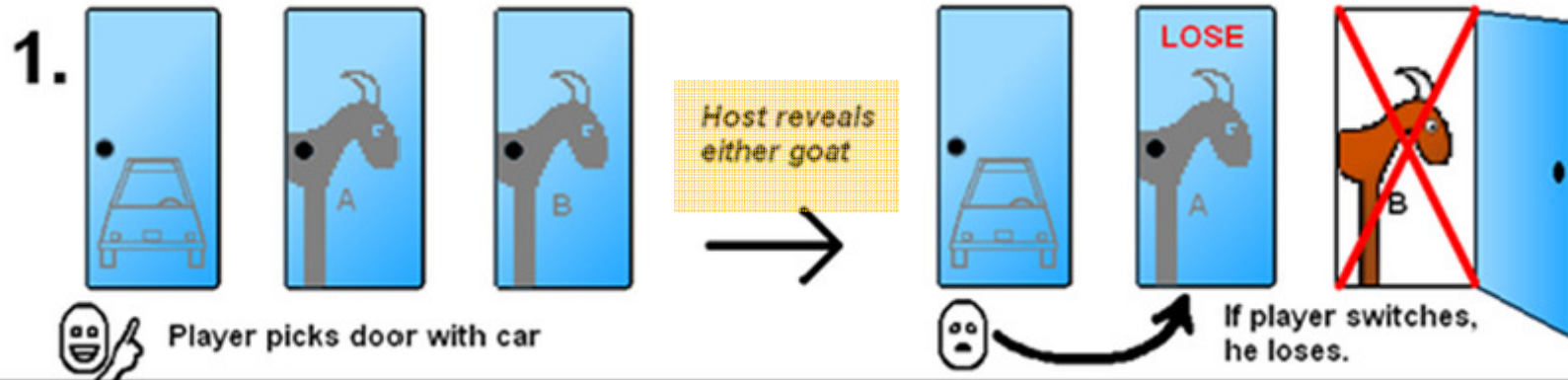
IL DILEMMA DI MONTHY HALL

... ricevette circa 10mila lettere e nella maggior parte c'erano critiche per la sua risposta e, in certi casi, insulti nei suoi confronti. Vos Savant ne rimase molto colpita e si mise a contare in quante di quelle lettere i lettori le davano ragione: erano meno di 100. Decise allora di continuare a parlarne anche in altre e successive rubriche ... in cui continuò a spiegare le sue ragioni. Disse che dopo settimane di nuove rubriche era riuscita a convincere solo il 56 per cento delle persone che nel frattempo avevano continuato a mandarle lettere.



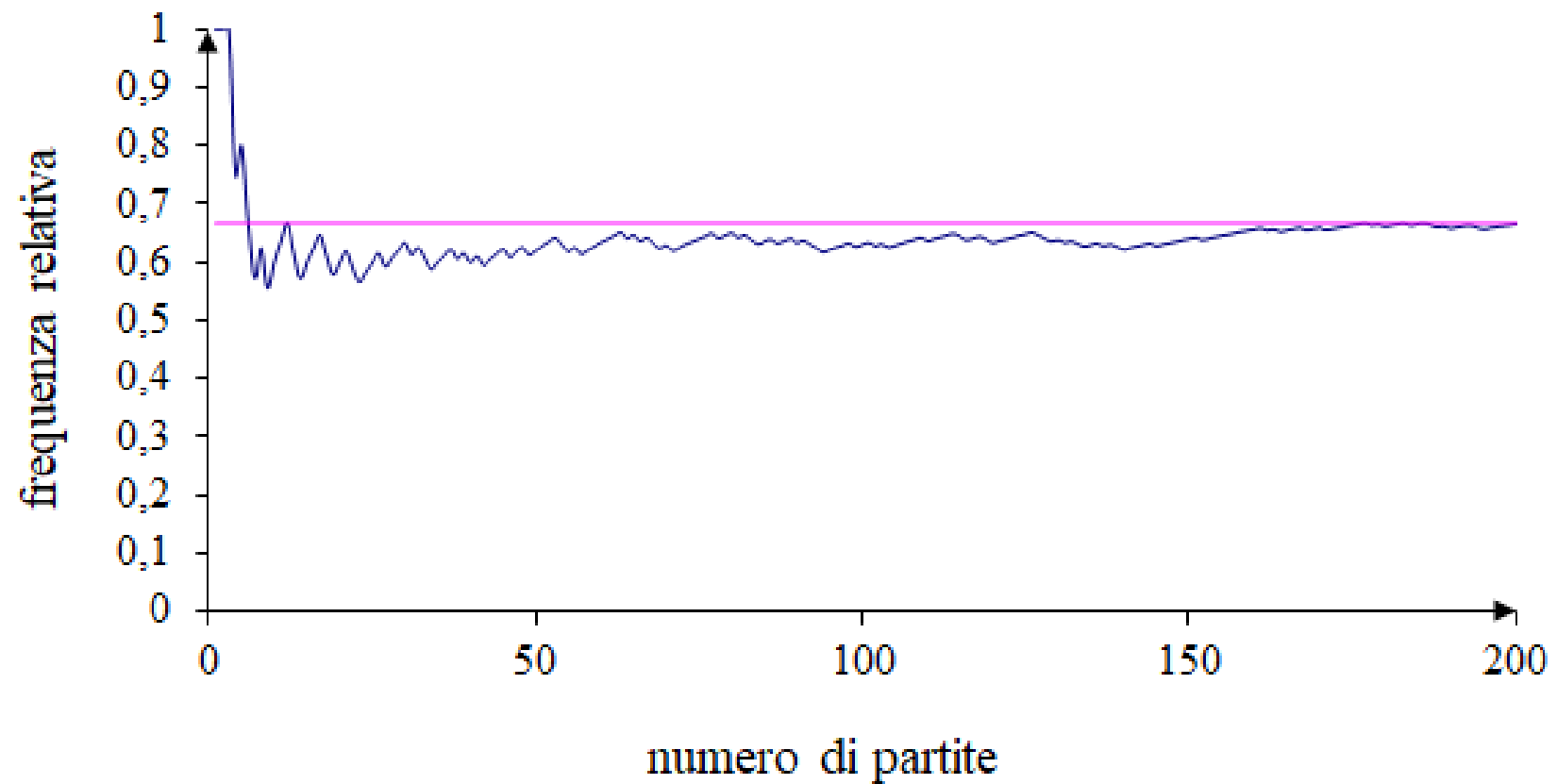
Marilyn Vos Savant

IL DILEMMA DI MONTHY HALL



IL DILEMMA DI MONTHY HALL

Il giocatore sceglie la **porta 1**
e poi la **cambia** dopo la mossa del conduttore



IL DILEMMA DI MONTHY HALL

Gillmann L. (1992) nell'articolo

The Car and the Goats - *American Mathematical Monthly*, **99**, 3-7
presenta il ragionamento bayesiano. In primo luogo è utile riconoscere che la situazione prima della scelta finale del concorrente è così schematizzabile:

- il concorrente sceglie la prima porta;
- il conduttore apre la terza porta.

Se così non fosse basterebbe permutare il numero delle porte.

Consideriamo ora gli eventi:

$$i = 1, 2, 3, \quad \begin{cases} A_i & \text{“il PREMIO è dietro la porta } i\text{”} \\ C_i & \text{“il conduttore apre la porta } i\text{”} \end{cases}$$

La prima scelta del concorrente è influente e serve solo per fissare le idee: l'indizio è costituito dall'evento C_3 .

IL DILEMMA DI MONTHY HALL

Per quanto riguarda i pre-giudizi, si osservi che essi sono costituiti dai tre eventi A_1, A_2 e A_3 che partizionano l'evento certo: per la regola numero uno di Julia Galef bisogna assegnare loro una probabilità. A tale scopo si può ipotizzare che Monty Hall non utilizzi una strategia deterministica per distribuire il premio tra le porte e si affidi al caso.

Ad esempio, si serve di un dado non truccato e, lanciandolo,

- se esce un punteggio minore di 2 allora per lui si è verificato A_1 ,
- se esce un punteggio maggiore di 4 allora per lui si è verificato A_3 ,
- altrimenti per lui si è verificato A_2 .

Pertanto, a priori si assegnano uguale probabilità ai tre eventi.

Per le conclusioni del ragionamento bayesiano scegliamo la strategia:

il concorrente vince il PREMIO cambiando la scelta iniziale.

IL DILEMMA DI MONTHY HALL

In simboli, bisogna valutare $\mathbb{P}_{C_3}[A_2]$.

$$\mathbb{P}_{C_3}[A_2] = \frac{\mathbb{P}[A_2 \cap C_3]}{\mathbb{P}[C_3]}$$

$$\mathbb{P}_{C_3}[A_2] = \frac{\mathbb{P}[A_2] \cdot \mathbb{P}_{A_2}[C_3]}{\mathbb{P}[A_1 \cap C_3] + \mathbb{P}[A_2 \cap C_3] + \mathbb{P}[A_3 \cap C_3]}$$

$$\mathbb{P}_{C_3}[A_2] = \frac{\cancel{\mathbb{P}[A_2]} \cdot \mathbb{P}_{A_2}[C_3]}{\cancel{\mathbb{P}[A_1]} \cdot \mathbb{P}_{A_1}[C_3] + \cancel{\mathbb{P}[A_2]} \cdot \mathbb{P}_{A_2}[C_3] + \cancel{\mathbb{P}[A_3]} \cdot \mathbb{P}_{A_3}[C_3]}$$

$$\mathbb{P}_{C_3}[A_2] = \frac{\mathbb{P}_{A_2}[C_3]}{\mathbb{P}_{A_1}[C_3] + \mathbb{P}_{A_2}[C_3] + \mathbb{P}_{A_3}[C_3]}$$

IL DILEMMA DI MONTHY HALL

$$\mathbb{P}_{C_3}[A_2] = \frac{\mathbb{P}_{A_2}[C_3]}{\mathbb{P}_{A_1}[C_3] + \mathbb{P}_{A_2}[C_3] + \mathbb{P}_{A_3}[C_3]}$$

Si ricordi che per fissare le idee la prima scelta del concorrente è stata la **porta 1**.

La probabilità a posteriori dell'evento A_2 dipende solo dalle verosimiglianze; anche in questa situazione non è necessario ricorrere a dati sperimentali per la loro valutazione.

$$\mathbb{P}_{A_2}[C_3] = 1$$

$$\mathbb{P}_{A_3}[C_3] = 0$$

$$\mathbb{P}_{A_1}[C_3] = ? = \frac{1}{2}$$

Il concorrente ha scelto la prima porta che nasconde il PREMIO e pertanto il conduttore può, a propria scelta, aprire la seconda o la terza porta.

Anche qui, per evitare di dare vantaggi a eventuali telespettatori che registrassero le sue scelte nel corso delle varie trasmissioni, si può ipotizzare che Monty Hall si affidi al caso (ad esempio, lanciando nuovamente il suo dado onesto).

IL DILEMMA DI MONTHY HALL

$$\mathbb{P}_{C_3}[A_2] = \frac{\mathbb{P}_{A_2}[C_3]}{\mathbb{P}_{A_1}[C_3] + \mathbb{P}_{A_2}[C_3] + \mathbb{P}_{A_3}[C_3]}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{A_1}[C_3] &= \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}_{A_2}[C_3] &= 1 \\ \mathbb{P}_{A_3}[C_3] &= 0\end{aligned}$$

In definitiva:

$$\mathbb{P}_{C_3}[A_2] = \frac{1}{1/2 + 1 + 0} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Così, con i pre-giudizi equiprobabili, l'indizio “Monty Hall apre la terza porta” sbilancia la probabilità di vincita del PREMIO a favore della seconda porta esattamente come aveva sostenuto Marilyn.

STORIA DI UN RITRATTO E UNA DIDASCALIA

Downloaded from <http://rstl.royalsocietypublishing.org/> on July 10, 2018

P H I L O S O P H I C A L *T R A N S A C T I O N S :*

LII. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, A. M. F. R. S

E3

late Rev. Mr. Bayes, F. R. S.

Phil. Trans. 1763 **53**, 370-418, published 1 January 1763

Diapositiva 30

E3

F. R. S. : membro della Società Reale

Emilia; 17/07/2018

STORIA DI UN RITRATTO E UNA DIDASCALIA

LII. *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A. M. F. R. S.*

Dear Sir,

Read Dec. 23, 1763. **I** Now send you an essay which I have found among the papers of our deceased friend Mr. Bayes, and which, in my opinion, has great merit, and well deserves to be preserved.

E1

P R O B L E M.

Given the number of times in which an unknown event has happened and failed: *Required* the chance that the probability of its happening in a single trial lies somewhere between any two degrees of probability that can be named.

Diapositiva 31

E1

Ti invio un saggio che ho ritrovato tra i documenti del nostro scomparso amico Mr. Bayes, a che, a mio avviso, merita di non andare disperso.

Emilia; 17/07/2018

STORIA DI UN RITRATTO E UNA DIDASCALIA

1. Bayesian Algorithm; Anova; A/B testing; Additive Regression Trees; Artificial Intelligence
2. Bayesian **Bootstrap**; Big Data; Boosting Model; Binomial Test; Binary Sensor; Beta Regression
3. Bayesian **Clustering**; Classification in data Mining; Computation; Central Limit Theorem
4. Bayesian **Decision Theory**; Data analysis; Diagnostic; Domain Adaptation; Disease Mapping
5. Bayesian **Econometrics**; Epistemology; Equilibrium; Error Propagation; Evolution; Entropy
6. Bayesian **Filtering**; Forecasting; Factor; Finance; Face Recognition; Fuzzy Clustering; Fertility
7. Bayesian **Genetic Algorithm**; Graphical Models; Generalized Linear Model; Gibbs; Games
8. Bayesian **Hierarchical Model**; Hypothesis Testing; Hidden Markov Model; Homogeneity Test
9. Bayesian **Inference**; Inversion; Bayesian Item Response Modeling; Isotonic Regression
10. Bayesian **Jump Diffusion**; Jags Random Effects; Judgement; Joint Probability
11. Bayesian **Kalman Filter** ; Knowledge Tracing Algorithm; K Means; Kelly Criterion
12. Bayesian **Logic**; Logistic Regression; Latent Class Analysis; Linear Regression; Lasso
13. Bayesian **Machine Learning**; Model Selection; Multivariate Time Series; Matrix Factorization
14. Bayesian **Network**; Nash Equilibrium; Bayesian Nonparametric Models; Nuisance Parameters
15. Bayesian **Optimization**; Ordinal Factor Analysis; Occupancy Model; Ordered Probit Model
16. Bayesian **Portfolio**; Power Analysis; Prediction; Pattern Recognition; Pursuit Algorithms
17. Bayesian **Quantum Mechanics**; Quadrature; Quality Control; Quantile Regression;
18. Bayesian **Reasoning**; Risk Analysis; Random Forest; Robotics; Ranking; Random effects model
19. Bayesian **Spectrum Analysis**; Sequential Monte Carlo Methods; Statistics; Survival Analysis
20. Bayesian **Time Series Analysis**; Tobit model; Tomography; Tactile Vision; Tensor Factorization
21. Bayesian **Uncertainty quantification**; Updating; Utility Theory; Urn Problem
22. Bayesian **Variational Inference**; Visual Perception; Vector Autoregression; Variable Selection
23. Bayesian **Weather Prediction**; Warped Gaussian Processes; Wilcoxon Test; Wavelet Shrinkage
24. Bayesian **Xgboost Parameters**
25. Bayesian **Ying-Yang Learning**
26. Bayesian **Zero Inflated Poisson**; Z Test

STORIA DI UN RITRATTO E UNA DIDASCALIA

E5

Fonte: Terence O'Donnell,
*History of Life Insurance in Its
Formative Years*
Chicago: American Conservation
Co., 1936, p. 335

Caption "Rev. T. Bayes:
Improver of the Columnar
Method developed by Barrett."



Thomas Bayes: Statistician (University of Edinburgh), philosopher and Presbyterian minister. Born c. 1701 - London, England – Died 7 April 1761 (aged 59) - Tunbridge Wells, Kent, England.

But it is doubtful whether the portrait is actually of him. (Wikipedia)

STORIA DI UN RITRATTO E UNA DIDASCALIA

The Reverend Thomas
Bayes; F.R.S. 1701?–1761

Who Is this gentleman?

*When and where was he
born?*

The first correct (or most
plausible) answer received
in the Bulletin Editorial
office in Montreal will win
a prize!



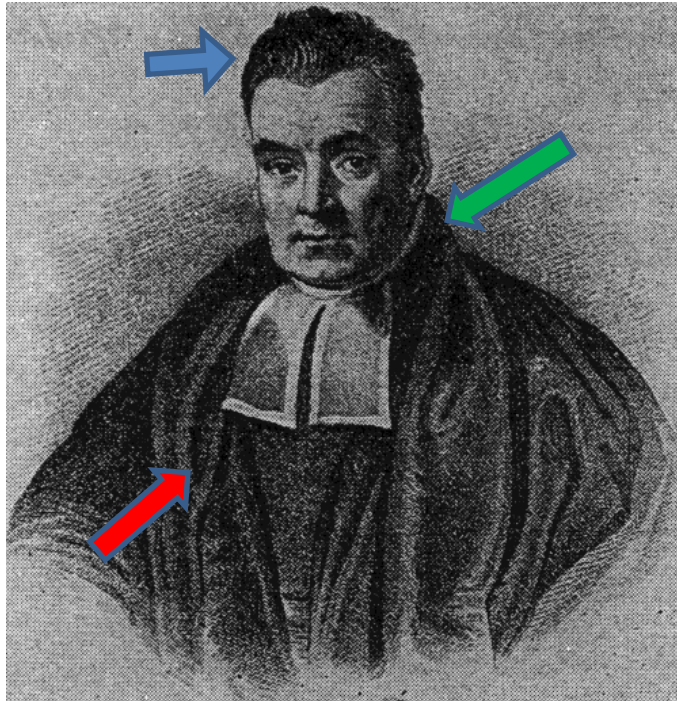
This challenge was made in *The Institute of Mathematical Statistics Bulletin*;
Vol. 17; No. 1; January/February 1988; page 49.

STORIA DI UN RITRATTO E UNA DIDASCALIA

(1) Parrucca

(2) Foggia abito clericale

(3) Colletto



Thomas Bayes

1701? – 1761

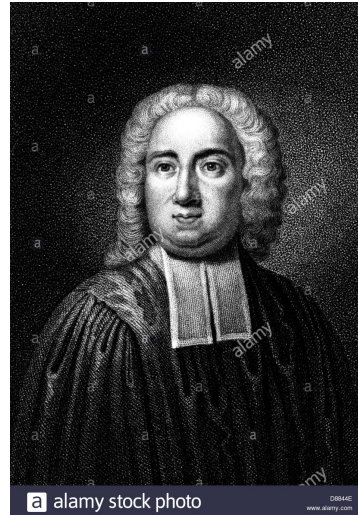
(Wikipedia)

Nonconformist minister



Risposta del Prof. David R. Bellhouse,
Università dell'Ontario dell'Ovest:

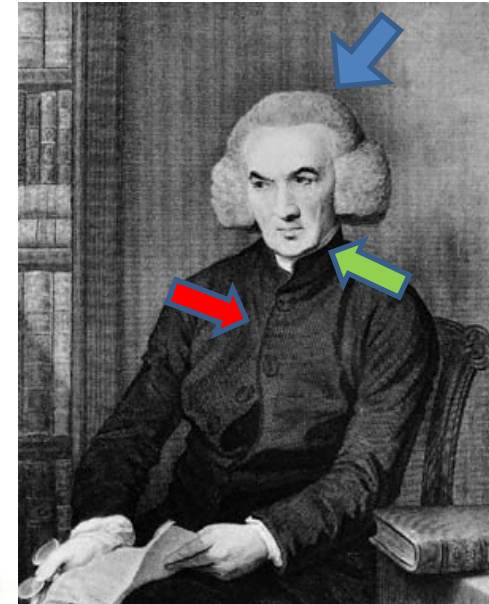
**CI SONO TRE INDIZI CONTRO
L'AUTENTICITÀ**



Joshua Bayes 1671 – 1746

(Wikipedia)

Nonconformist minister



Richard Price 1723 - 1791

(Wikipedia)

Nonconformist minister



Philip Doddridge 1702 - 1751

(Wikipedia)

Nonconformist minister

STORIA DI UN RITRATTO E UNA DIDASCALIA

Caption "Rev. T. Bayes: Improver of the Columnar Method developed by Barrett."

*George Barrett (1752-1821) fu un attuario che preparò una serie di tabelle di vita per l'Hope Life Office intorno al 1813. Veniva da Petworth Sussex e di solito è considerato il creatore in Inghilterra del metodo di **calcolo dei valori delle rendite per mezzo di una tabella di commutazione**, un metodo a volte chiamato metodo colonnare di Barrett.*

Il metodo fu presumibilmente sviluppato tra il 1788 e il 1811, spiegato a Francis Baily nel 1811 e letto alla Royal Society da Baily nel 1812.

*Se Bayes migliorò il metodo prima di morire nel 1761 fu davvero precoce. Si potrebbe notare che le inesattezze nelle didascalie di O'Donnell non invalidano necessariamente l'immagine. **Mi sembra del tutto probabile che O'Donnell abbia ottenuto l'immagine da una fonte (forse del XIX secolo) che la identificasse con Thomas Bayes.***

La domanda dovrebbe essere quindi: "Qual è la fonte e qual è stata la fonte di questa fonte?" Poco si dice di Bayes nel libro di O'Donnell il che mi fa pensare che è estremamente poco plausibile che lo scelga (...) come soggetto per una foto inventata.

Il testo delle diapositive da 30 a 32 è stato da me liberamente tradotto dalla pagina:

<https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/bayespics.htm>

Opinione del Prof. M. Stigler, Università di Chicago, USA
Terence O'Donnell non aveva particolari motivi per pubblicare deliberatamente un ritratto non autentico di Bayes.



STORIA DI UN RITRATTO E UNA DIDASCALIA

In simboli.

- L'evento certo è partizionato dall'evento

A : “il ritratto è autentico”

e dal suo complementare $\bar{A}$.

- Gli indizi (parrucca, abito clericale, colletto) raccolti sono compendati nell'evento I .
- Per la conclusione del ragionamento bayesiano si scelga il rapporto delle probabilità a posteriori.

$$\mathbb{P}_I[A] = \mathbb{P}[A] \cdot \frac{\mathbb{P}_A[I]}{\mathbb{P}[I]} \qquad \mathbb{P}_I[\bar{A}] = \mathbb{P}[\bar{A}] \cdot \frac{\mathbb{P}_{\bar{A}}[I]}{\mathbb{P}[I]}$$

$$\frac{\mathbb{P}_I[A]}{\mathbb{P}_I[\bar{A}]} = \frac{\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[\bar{A}]} \cdot \frac{\mathbb{P}_A[I]}{\mathbb{P}_{\bar{A}}[I]}$$

STORIA DI UN RITRATTO E UNA DIDASCALIA

$$\frac{\mathbb{P}_I[A]}{\mathbb{P}_I[\bar{A}]} = \frac{\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[\bar{A}]} \cdot \frac{\mathbb{P}_A[I]}{\mathbb{P}_{\bar{A}}[I]}$$

Adesso mettiamo insieme i cocci.

Probabilità a priori

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\bar{A}] = \frac{1}{2}$$

Opinione del Prof. M. Stigler,
**O'Donnell non aveva particolari motivi per pubblicare
deliberatamente un ritratto non autentico di Bayes.**

Verosimiglianze

$$\mathbb{P}_I[A] = 0,2$$

$$\mathbb{P}_I[\bar{A}] = 0,95$$

- (1) Parrucca (NO)
- (2) Foggia abito clericale (NO)
- (3) Colletto (NO)

$$\frac{\mathbb{P}_I[A]}{\mathbb{P}_I[\bar{A}]} = \frac{0,5}{0,5} \cdot \frac{0,2}{0,95} \cong \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

CONCLUSIONI

Come conclusione, provo a modificare un'affermazione di Gerd Gigerenzer che con poco impegno si può reperire nella sua forma originaria e confrontare.

Ai nostri figli viene insegnata l'algebra, la geometria e il calcolo infinitesimale: in altre parole, la matematica della certezza. È, invece, un po' trascurata quella dell'incertezza, ovvero il pensiero statistico. Dietro questa impostazione c'è l'idea che esercitarsi in discipline astratte migliora la qualità del pensiero e la capacità di risolvere problemi. Però, purtroppo abbiamo ancora molti medici che non comprendono le statistiche sanitarie e molti avvocati che non capiscono appieno la prova del DNA...

Gerd Gigerenzer è uno psicologo tedesco che ricopre le cariche di direttore emerito del “Center for Adaptive Behavior and Cognition (ABC)” presso il Max Planck Institute for Human Development e direttore del “Harding Center for Risk Literacy” entrambi in Berlino.

È autore, tra l'altro, del libro “Reckoning with Risk: Learning to Live with Uncertainty”, Penguin Books, 2003.

CONCLUSIONI

Allora, ai nostri studenti bisogna insegnare parallelamente sia quello che è importante in matematica e sia quello che potrà utile per la vita quotidiana e per la professione.

Ma l'aspetto che forse è maggiormente da prendere in considerazione è la modalità dell'insegnamento: quella orientata alla soluzione di problemi richiede in maniera precipua presentazioni chiare, strumenti pratici e linee guida intelligenti.

Ciò è tanto più valido per la matematica dell'incerto e credo che il ragionamento bayesiano, sollecitando oltretutto l'insegnante a prendersi carico degli standard di processo individuati dalle indicazioni nazionali, possa avere un ruolo importante a questo riguardo.

Però, per realizzare cose così nuove bisogna ricercare con convinzione l'adesione degli insegnanti.

L'ANNO DI NASCITA?

Potrebbe essere impossibile determinare la data esatta di nascita di Thomas Bayes. Tutto ciò che si sa è che morì il 7 aprile 1761, all'età di 59 anni. Questo è ciò che è registrato sulla sua tomba a Bunhill Fields a Londra. ...

L'iscrizione sulla facciata della tomba ... recita: “Cripta delle famiglie di Bayes e Cotton. Thomas Bayes Cotton, figlio di Bayes Cotton e Sarah, sua moglie, e pronipote del detto Joshua e Ann Bayes (10). 21 marzo 1787.”

*Sulla sommità della tomba è inciso: “**Rev. Thomas Bayes, figlio del detto Joshua e Ann Bayes (59). 7 aprile 1761. In riconoscimento dell'opera importante di Thomas Bayes in probabilità. La volta è stata restaurata nel 1969 con i contributi ricevuti dagli statistici di tutto il mondo.**”*

*Prima della riforma del calendario del 1752, il primo dell'anno inglese era il 25 marzo. Ora, dal momento che Bayes morì il 7 aprile 1761 il sottrarre gli 11 giorni persi per la riforma del 1752 rende la sua data di morte nel vecchio stile il 27 marzo ... **allora è quasi certo che l'anno della sua nascita sarebbe stato registrato, se registrato, nel 1701.***

Risposta del Prof. David R. Bellhouse, Università dell'Ontario dell'Ovest:

L'ANNO DI NASCITA È IL 1701

LA CITTÀ DI NASCITA?

È stato segnalato da J.D. Holland [J. Roy. Statist. Soc. Ser. A 125 (1962): 451-461] che cercò la data di nascita di Bayes nei registri parrocchiali di Bovingdon, Hemel Hempstead, Hertfordshire, i più probabili luoghi di nascita di Bayes. Ha anche riferito che i registri parrocchiali e le trascrizioni episcopali dei registri mancavano per il periodo 1700-1706, in modo che non gli riuscì possibile stabilire una data di nascita.

Credo che Holland stesse cercando nel posto sbagliato. Ho controllato l'International Genealogical Index (IGI) compilato dalla Chiesa di Gesù Cristo dei Santi degli Ultimi Giorni (Mormoni) e non ho trovato figli di Joshua Bayes elencati anche dopo il trasferimento della famiglia a Southwark e Londra.

***Questo mi porta a credere che tutti i bambini di Joshua Bayes furono battezzati nella cappella dei dissidenti, non nella chiesa ufficiale.** Attualmente sto cercando di trovare i registri degli anticonformisti che molto probabilmente contengono la registrazione battesimale di Thomas Bayes. È **improbabile** che qualcosa verrà da questa ricerca poiché molti registri anticonformisti non sono sopravvissuti.*

*Questa è la spiegazione più probabile per la mancanza di bambini Bayes che appare nell'IGI indicizzati dai mormoni. **Farò sapere se qualcosa si otterrà da questa ricerca.***

Risposta del Prof. David R. Bellhouse, Università dell'Ontario dell'Ovest:

NON LO SO, MA NON MI ARRENDO

ANCORA SUL RITRATTO

Ho fatto qualche ulteriore indagine su Bayes. Ho trovato una genealogia della sua famiglia e una famiglia imparentata, i Cottons.

Thomas non ha una data di nascita, ma potrebbe esserci qualche indizio su dove trovare una sua foto. La genealogia afferma che la famiglia Cotton possedeva alcuni ritratti di membri di un'altra famiglia che era imparentata con loro.

Inoltre, un discendente del genero di Joshua Bayes, Thomas Cotton, era un avvocato alla biblioteca Williams. Probabilmente è così che l'immagine di Joshua Bayes è finita in questa libreria. Se avevano una foto di Thomas, potrebbe essere stato tenuto in famiglia, dal momento che il figlio di Thomas Cotton si chiamava Thomas Bayes Cotton.

Il testo delle diapositive da 35 a 37 è stato da me liberamente tradotto dalla pagina:

<https://www.york.ac.uk/depts/maths/histstat/bayespics.htm>

Risposta del Prof. David R. Bellhouse, Università dell'Ontario dell'Ovest:
Ottenere un ritratto di Thomas Bayes richiede quindi la caccia ai discendenti dei Cottons, un compito difficile ma non impossibile.