

Choice and Chance: calcolo combinatorio e probabilità discreta

***Salvatore Rao
(salvatore.rao@unina.it)***

Castellammare di Stabia, domenica 15 luglio 2018

***Scuola Estiva di Formazione per i docenti
della Scuola Secondaria del Secondo Ciclo di Istruzione***

***La Matematica dell'incerto
Insegnamento della Probabilità e della Statistica***

*<<Ripudiavamo fermamente
l'idea
che la conoscenza
utile
fosse preferibile
alla conoscenza
inutile>>*

**John Maynard KEYNES
(1883-1946)**



John M. KEYNES nel 1933

In origine,
calcolo combinatorio e ***probabilità discreta***
erano quasi sinonimi:

la teoria (matematica) delle probabilità
è in effetti nata come calcolo combinatorio,
occupandosi soprattutto di questioni combinatorie
relative ai giochi d'azzardo,
o a problemi di questo tipo:

In una scatola vi sono **sette** palline,
tre bianche e **quattro** nere.

Estraendo (a caso) **quattro** palline dalla scatola,
qual è la probabilità di ottenere esattamente
due palline bianche e **due** palline nere?

Per esempio,
uno dei primi manuali inglesi
sulla combinatoria,
un *classico* usato per molti anni,
è stato il seguente.

Choice and Chance

Prima edizione **1867**

Quinta edizione **1901**

William Allen WHITWORTH
(1840-1905)

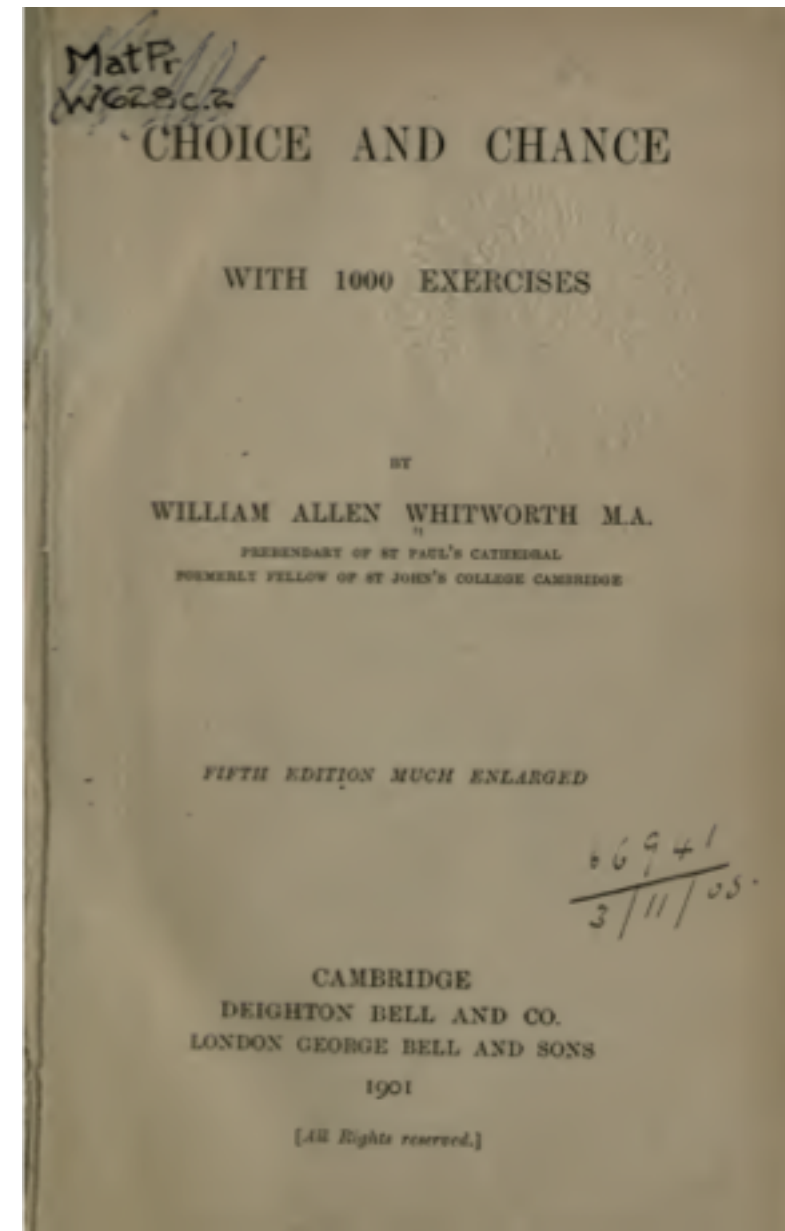
Matematico inglese e sacerdote della Chiesa
d'Inghilterra

Direttore fondatore di

Messenger of Mathematics

E' sua la notazione « $E[X]$ »

per il valore atteso di una variabile casuale X



CONTENTS.

CHOICE.

CHAPTERS I. AND II.

	PAGE
Multiplication of Choice. Rule i. p. 8, or Prop. i.	54
Continued-multiplication of Choice. Rule ii. p. 12, or Prop. ii.	55
Permutations, all the things together. Rule iii. p. 17, or Prop. iii.	56
Permutations, a given number together. Rule iv. p. 21, or Prop. iv.	57
Division into two classes. Rule v. p. 23, or Prop. v.	58
Division into a number of classes. Rule vi. p. 25, or Prop. vi.	59
Permutations, some of the things being alike. Rule vii. p. 30, or Prop. vii.	60
Combinations. Rules viii. and ix. pp. 32, 33, or Prop. viii.	61
Combinations with repetition. Rule x. p. 42, or Prop. ix.	63
Permutations with repetition. Rule xi. p. 47, or Prop. x.	65
Total number of combinations. Rule xii. p. 48, or Prop. xi.	66
The same, some of the things being alike. Rule xiii. p. 51, or Prop. xii.	66
The Binomial Theorem. Prop. xiii.	67
Occurrences of stated conditions among the various ways of performing an operation. Prop. xiv.	68
EXCURSUS.	
On the Summation of certain Series	71

Distributions CHAPTER III.

	PAGE
Distribution of a given number of different things into different groups.	
Prop. xv. and xvi.	83
The same, into indifferent groups. Prop. xvii.	84
Distribution out of a given number of different things into different groups. Prop. xviii. and xix.	84, 85
The same, into indifferent groups. Prop. xx.	86
Distribution of different things into different parcels. Props. xxi. and xxii.	86, 87
Distribution of different things into indifferent parcels. Props. xxiii. and xxiv.	88
Distribution of indifferent things into different parcels. Props. xxv. and xxvi.	89, 90
The same, when the number in each parcel is limited. Props. xxvii. and xxviii.	90, 91
Distribution of indifferent things into indifferent parcels. Props. xxix. and xxx.	93, 97
Table of the number of r -partitions of n	99

Derangements CHAPTER IV.

Sub-factorial notation	100
Number of derangements of a series of elements, so that no element remains <i>in situ</i> . Prop. xxxi.	102
The same, so that no original sequence of two terms remains. Props. xxxii. and xxxiii.	103, 104
Derangements of terms in circular order. Prop. xxxiv.	105
Table of factorials and sub-factorials	107

Priority CHAPTER V.

Questions involving the consideration of priority	108
Order of gains and losses, the losses never exceeding the gains. Props. xxxv. to xxxviii.	110—114
The case when the excess is to be limited to a certain amount. Prop. xxxix.	116

CHANCE.

CHAPTERS VI. AND VII.

	PAGE
Complementary probabilities. Rule i. p. 125, or Prop. xi.	177
Relation between probability and odds. Rule ii. p. 127, or Prop. xli. .	177
Fundamental Proposition in the calculation of chances. Rules iii. and iv. pp. 128, 130, or Props. xlii. and xliii.	178
Expectation. Rule v. p. 142, or Prop. xlv.	178
Multiplication of chances of independent events. Rule vi. p. 144, or Prop. xlv.	179
Multiplication of chances of events not independent. Rule vii. p. 147, or Prop. xlv.	181
Continued-multiplication of chances. Rule viii. p. 151, or Prop. xlvii. .	181
Vital Statistics. Population and Expectation of life	159, 184
Inverse probabilities. Rule ix. p. 162, or Prop. xlviii.	181
Credibility of testimony	169
Game of Whist	172—176

CHAPTER VIII.

The Rule of Succession (so called)	188
--	-----

CHAPTER IX.

Successive trials	196
Average number of trials before succeeding. Prop. xlix.	198
Relation of chance to average. Props. l. and li.	199, 200
Chance of consecutive successes. Props. lii. and liii.	201
Average number of trials before consecutive successes. Prop. liv. . .	203

Print CHAPTER X.

	PAGE
The expectation of parts. Prop. lv.	207
Parts in order of magnitude. Prop. lvi.	207
General Theorem. Prop. lvii.	208
Applications. Props. lviii. to lxi.	213—219

CHAPTER XI.

The disadvantage of gambling	220
Insurance the reverse of gambling	227
Effect of the repetition of a fair wager. Prop. lxi.	231
Effect of the repetition of a wager at odds. Prop. lxii.	233
Repetition of a fair wager on a scale proportioned to the speculator's means. Prop. lxiii.	235
Price which a man of limited means may pay for a given chance of a prize. Prop. lxiv.	236
The general case of a lottery with prizes of different value. Props. lxi. and lxii.	238, 241
The Petersburg problem. Prop. lxiii.	243

Print CHAPTER XII.

Geometrical Representation of Chances	248
---	-----

EXERCISES.

On Choice	255
On Chance	280
Answers to the Exercises	338

ERRATUM.

Page 217. In Prop. lxiii. w must not be negative.

choice

scelta

alternativa

preferenza

chance

caso

probabilità

avvenimento fortuito

sorte fortuna

azzardo

rischio

occasione

opportunità possibilità

to chance

arrischiare

rischiare

accadere

capitare

by (mere or sheer) chance

per (puro) caso

by a lucky chance

per un caso fortunato

on the off chance

nell'eventualità

game of chance

gioco d'azzardo

to take a chance

correre un rischio

the main chance

la grande occasione

I've missed a chance

ho perso un'occasione

it is your last chance

è l'ultima tua occasione

to have an even chance

avere uguali possibilità di
riuscire o di fallire

to stand a good chance

avere buone probabilità

the chances are ...

le probabilità sono ...

I've missed a chance

ho perso un'occasione

I'll chance it

correrò il rischio

to chance the consequences

rischiare le conseguenze

I chanced to meet him

mi capitò di incontrarlo

Dunque almeno inizialmente,
calcolo combinatorio e probabilità discreta
erano quasi sinonimi
o comunque strettamente intrecciati.

D'altra parte, alcuni autori
– per esempio

L.E. MAISTROV (*Probability Theory – A Historical Sketch*),

I. HACKING (*L'emergenza della probabilità*) –
sostengono che la nascita della teoria delle probabilità
è dovuta all'interesse per altre questioni meno futili:
relative all'economia, alle assicurazioni, alla attendibilità
delle opinioni in ambito teologico o giuridico.

E dal punto di vista didattico
certamente è preferibile
considerare problematiche fondate
sull'analisi di dati statistici reali,
in ambito sia *deterministico*
(fisico, chimico, biologico,...)
che *non deterministico*
(biologico, medico, demografico, economico, sociale, ...),
piuttosto che trattare **solo** questioni
di dadi e giochi d'azzardo.

Per cui, dal punto di vista didattico, è preferibile
che lo studio del calcolo delle probabilità
sia preceduto dallo studio della statistica
e, naturalmente,
preceda lo studio dell'inferenza statistica.

[Cfr. C. ROSSI, *La matematica dell'incertezza – Didattica
della probabilità e della statistica*, Zanichelli, 1999]

Ma è indubbio che i primi sviluppi
di una teoria matematica si sono avuti studiando
problemi relativi a giochi d'azzardo.

D'altra parte questi giochi hanno regole
abbastanza chiare e semplici
che spesso permettono
la costruzione quasi immediata
di semplici e adeguati modelli matematici.

I quali, una volta realizzati,
possono essere poi usati per affrontare
anche problemi di natura molto diversa.

A partire da una nascita comune,
nel corso di quattro secoli,
calcolo combinatorio e calcolo delle probabilità
si sono poi sviluppati
secondo storie e modalità indipendenti.

Naturalmente,
almeno gli elementi del calcolo combinatorio
sono tuttora al servizio di varie questioni
di probabilità discreta.

Ora, però, vorrei mostrare un esempio
in cui può accadere il contrario:
gli elementi di probabilità discreta
al servizio
di una questione di calcolo combinatorio.

Supponiamo di scegliere ***a caso***
una permutazione π di
 $\hat{n} = \{1, 2, \dots, n\}$
(di *grado* o *lunghezza* n).
Quanti *punti fissi* avrà π ?

ESEMPIO

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_3 &= \text{Sym} \hat{3} = \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_3 &= \text{Sym}\hat{3} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_3 &= \text{Sym}\hat{3} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \{123, 132, 213, 231, 312, 321\} = \\
&= \{(1), (23), (12), (123), (132), (13)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_3 &= \text{Sym}\hat{3} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \{123, 132, 213, 231, 312, 321\} = \\
&= \{(1), (23), (12), (123), (132), (13)\} = \\
&= \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_3 &= \text{Sym}\hat{3} = \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} \right\} = \\
&= \{123, 132, 213, 231, 312, 321\} = \\
&= \{(1), (23), (12), (123), (132), (13)\} = \\
&= \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}
\end{aligned}$$

#punti fissi: $1 \times \mathbf{3} + 3 \times \mathbf{2} + 2 \times \mathbf{0}$

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

#punti fissi: $1 \times \mathbf{3} + 3 \times \mathbf{1} + 2 \times \mathbf{0}$

S_3

t tipo	#t					
(●)	1					
(●●)	3					
(●●●)	2					
	6					

$$\mathbb{S}_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

#punti fissi: $1 \times \mathbf{3} + 3 \times \mathbf{1} + 2 \times \mathbf{0}$

$\mathbb{S}_3$

t tipo	#t	f #punti fissi di t				
(●)	1	3				
(●●)	3	1				
(●●●)	2	0				
	6					

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

#punti fissi: $1 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times 0$

S_3

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf			
(●)	1	3	3			
(●●)	3	1	3			
(●●●)	2	0	0			
	6		6			

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

#punti fissi: $1 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times 0$

S_3

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf			
(●)	1	3	3			
(●●)	3	1	3			
(●●●)	2	0	0			
$\mu = 1$	6		6			

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

#punti fissi: $1 \times \mathbf{3} + 3 \times \mathbf{1} + 2 \times \mathbf{0}$

S_3

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	^s $ f - \mu $		
(●)	1	3	3	2		
(●●)	3	1	3	0		
(●●●)	2	0	0	1		
$\mu = 1$	6		6			

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

#punti fissi: $1 \times \mathbf{3} + 3 \times \mathbf{1} + 2 \times \mathbf{0}$

S_3

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	^s $ f - \mu $	s^2	
(●)	1	3	3	2	4	
(●●)	3	1	3	0	0	
(●●●)	2	0	0	1	1	
$\mu = 1$	6		6			

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

#punti fissi: $1 \times \mathbf{3} + 3 \times \mathbf{1} + 2 \times \mathbf{0}$

S_3

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	^s $ f - \mu $	s ²	(#t)xs ²
(●)	1	3	3	2	4	4
(●●)	3	1	3	0	0	0
(●●●)	2	0	0	1	1	2
$\mu = 1$	6		6			6

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

#punti fissi: $1 \times 3 + 3 \times 1 + 2 \times 0$

S_3

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	^s $ f - \mu $	s ²	(#t)xs ²
(●)	1	3	3	2	4	4
(●●)	3	1	3	0	0	0
(●●●)	2	0	0	1	1	2
$\mu = 1$ $v = 1$	6		6			6

Ma in generale?

$$\mathbb{S}_n = \text{Sym}\hat{n} = \text{Sym}\{1,2,3, \dots, n\} =$$

$$= \left\{ 123 \dots (n-2)(n-1)n, 123 \dots (n-2)n(n-1), \dots \dots \dots \right. \\ \left. \dots \dots \dots, n(n-1)(n-2) \dots 321 \right\}$$

$$|\mathbb{S}_n| = n!$$

$$\mathbf{10!} = 3\,628\,800 \cong 3,6 \times \mathbf{10^6}$$

$$\mathbf{13!} = 6\,227\,020\,800 \cong 6,2 \times \mathbf{10^9}$$


$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \cong 2,4 \times 10^{18}$$

$$100! = 9\,332\,621$$

544 394 415 268 169 923 885 626 670 049

071 596 826 438 162 146 859 296 389 521

759 999 322 991 560 894 146 397 615 651

828 623 697 920 827 223 758 251 185 210

916 864 000 000 000 000 000 000 000 000

$$\cong 9,3 \times 10^{156} \gg 10^{100}$$

Formula di STIRLING

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Se si vuole evitare un calcolo diretto
(come nel caso $n = 3$),
si possono usare
linguaggio e primitivi elementi
del calcolo della probabilità (discreta).

spazio di probabilità uniforme $(\Omega, \mathbb{p})$

$$\Omega = \mathbb{S}_n \qquad \mathbb{p} : \Omega \longrightarrow [0,1] \qquad (\forall \pi \in \Omega) \left(\mathbb{p}(\pi) = \frac{1}{n!} \right)$$

spazio di probabilità uniforme $(\Omega, \mathbb{p})$

$$\Omega = \mathbb{S}_n \quad \mathbb{p} : \Omega \longrightarrow [0,1] \quad (\forall \pi \in \Omega) \left(\mathbb{p}(\pi) = \frac{1}{n!} \right)$$

variabile casuale $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(\pi) = |\text{Fix}(\pi)| \quad \text{Fix}(\pi) = \{i \in \hat{n} \mid i^\pi = i\}$$

spazio di probabilità uniforme $(\Omega, \mathbb{P})$

$$\Omega = \mathbb{S}_n \quad \mathbb{P} : \Omega \longrightarrow [0,1] \quad (\forall \pi \in \Omega) \left(\mathbb{P}(\pi) = \frac{1}{n!} \right)$$

variabile casuale $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(\pi) = |\text{Fix}(\pi)| \quad \text{Fix}(\pi) = \{i \in \hat{n} \mid i^\pi = i\}$$

$$\mathbb{E}[F] = ?$$

$$\forall i \in \hat{n} \qquad F_i : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \qquad F_i(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } i^\pi = i \\ 0, & \text{se } i^\pi \neq i \end{cases}$$

$$\forall i \in \hat{n} \quad F_i : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \quad F_i(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } i^\pi = i \\ 0, & \text{se } i^\pi \neq i \end{cases}$$

(F_i assume il valore 1 in $(n - 1)!$ permutazioni)

$$\forall i \in \hat{n} \quad F_i : \Omega \longrightarrow \{0,1\} \quad F_i(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } i^\pi = i \\ 0, & \text{se } i^\pi \neq i \end{cases}$$

(F_i assume il valore 1 in $(n - 1)!$ permutazioni)

$$\therefore \quad \mathbb{E}[F_i] = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Omega} F_i(\pi) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$\forall \pi \in \Omega \qquad F(\pi) = F_1(\pi) + F_2(\pi) + \cdots + F_n(\pi)$$

$$\therefore \qquad F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$

$$\forall \pi \in \Omega \quad F(\pi) = F_1(\pi) + F_2(\pi) + \cdots + F_n(\pi)$$

$$\therefore \quad F = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$$

Ma $\mathbb{E}$ è un operatore *lineare*.

$$\therefore \quad \mathbb{E}[F] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[F_i] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

$$\mathbb{E}[F^2] =$$

$$\mathbb{E}[F^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^2\right]$$

$$\mathbb{E}[F^2] = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n F_i \right)^2 \right] =$$

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j \right]$$

$$\mathbb{E}[F^2] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^2\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[F_i F_j]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^2\right] = \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{E}[F_i F_j] = \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[F_i^2] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[F_i F_j]
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[F^2] =$$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[F_i^2] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[F_i F_j]$$

$$F_i(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } i^\pi = i \\ 0, & \text{se } i^\pi \neq i \end{cases} \implies F_i^2 = F_i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[F_i^2] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[F_i] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

$$(F_i F_j)(\pi) = F_i(\pi) F_j(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } i^\pi = i \text{ e } j^\pi = j \\ 0, & \text{se } i^\pi \neq i \text{ o } j^\pi \neq j \end{cases}$$

$$(F_i F_j)(\pi) = F_i(\pi) F_j(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } i^\pi = i \text{ e } j^\pi = j \\ 0, & \text{se } i^\pi \neq i \text{ o } j^\pi \neq j \end{cases}$$

$(F_i F_j)$ assume il valore 1 in $(n - 2)!$ permutazioni)

$$(F_i F_j)(\pi) = F_i(\pi) F_j(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } i^\pi = i \text{ e } j^\pi = j \\ 0, & \text{se } i^\pi \neq i \text{ o } j^\pi \neq j \end{cases}$$

$(F_i F_j)$ assume il valore 1 in $(n - 2)!$ permutazioni)

$$\mathbb{E}[F_i F_j] = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Omega} (F_i F_j)(\pi) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$(F_i F_j)(\pi) = F_i(\pi) F_j(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{se } i^\pi = i \text{ e } j^\pi = j \\ 0, & \text{se } i^\pi \neq i \text{ o } j^\pi \neq j \end{cases}$$

$(F_i F_j)$ assume il valore 1 in $(n - 2)!$ permutazioni)

$$\mathbb{E}[F_i F_j] = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Omega} (F_i F_j)(\pi) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\therefore \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[F_i F_j] = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n(n-1)} = \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[F^2] = \\
& = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[F_i^2] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[F_i F_j] = \\
& = 1 + 2 \frac{1}{2} = 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[F^2] = \\
& = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[F_i^2] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[F_i F_j] = \\
& = 1 + 2 \frac{1}{2} = 2
\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbb{V}[F] = \mathbb{E}[F^2] - \mathbb{E}[F]^2 = 2 - 1 = 1$$

In conclusion:

$$\mathbb{E}[F] = 1 = \mathbb{V}[F]$$

In conclusione:

$$\mathbb{E}[F] = 1 = \mathbb{V}[F]$$

*Una permutazione ha **in media** 1 ± 1 punti fissi.*

Verifichiamo la cosa per i primi valori di n .

$$\mathbb{S}_1 = \{1\} = \{(1)\}$$

#punti fissi: **1**

$\mathbb{S}_1$

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	$\begin{smallmatrix} s \\ f - \mu \end{smallmatrix}$	s^2	(#t)xs ²
(•)	1	1	1	0	0	0
$\begin{smallmatrix} \mu = 1 \\ v = 0 \end{smallmatrix}$	1		1			0

$$\mathbb{S}_2 = \{12, 21\} = \{(1), (12)\}$$

#punti fissi: **2+0**

$\mathbb{S}_2$

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	s $ f - \mu $	s^2	(#t)xs ²
(•)	1	2	2	1	1	1
(••)	1	0	0	1	1	1
$\mu = 1$ $\nu = 1$	2		2			2

$$\begin{aligned}
\mathbb{S}_3 &= \{123, 132, 213, 231, 312, 321\} = \\
&= \{(1), (23), (12), (123), (132), (13)\} = \\
&= \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\} \\
&\quad \text{\#punti fissi: } \mathbf{3+3\times 1+2\times 0}
\end{aligned}$$

$\mathbb{S}_3$

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	$\begin{smallmatrix} s \\ f - \mu \end{smallmatrix}$	s^2	(#t)xs ²
(•)	1	3	3	2	4	4
(••)	3	1	3	0	0	0
(•••)	2	0	0	1	1	2
$\begin{smallmatrix} \mu = 1 \\ v = 1 \end{smallmatrix}$	6		6			6

$$\mathbb{S}_4 = \left\{ \begin{array}{l} 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, \\ 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, \\ 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, \\ 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (1), (34), (23), (234), (243), (24), \\ (12), (12)(34), (123), (1234), (1243), (124), \\ (132), (1342), (13), (134), (13)(24), (1324), \\ (1432), (142), (143), (14), (1423), (14)(23) \end{array} \right\}$$

$$4, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 0$$

$$S_4 = \left\{ \begin{array}{l} (1), \\ (12), (13), (14), (23), (24), (34), \\ (12)(34), (13)(24), (14)(23), \\ (123), (124), (132), (134), (142), (143), (234), (243), \\ (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432) \end{array} \right\}$$

#punti fissi: $4 + 6 \times 2 + 8 \times 1 + 9 \times 0$

S_4

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	$\begin{matrix} s \\ f - \mu \end{matrix}$	s^2	(#t)xs ²
(•)	1	4	4	3	9	9
(••)	6	2	12	1	1	6
(•••)	8	1	8	0	0	0
(••)(••)	3	0	0	1	1	3
(••••)	6	0	0	1	1	6
$\begin{matrix} \mu = 1 \\ v = 1 \end{matrix}$	24		24			24

$$S_5 =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12345, 12354, 12435, 12453, 12534, 12543, 13245, 13254, 13425, 13452, 13524, 13542, \\ 14235, 14253, 14325, 14352, 14523, 14532, 15234, 15243, 15324, 15342, 15423, 15432, \\ 21345, 21354, 21435, 21453, 21534, 21543, 23145, 23154, 23415, 23451, 23514, 23541, \\ 24135, 24153, 24315, 24351, 24513, 24531, 25134, 25143, 25314, 25341, 25413, 25431, \\ 31245, 31254, 31425, 31452, 31524, 31542, 32145, 32154, 32415, 32451, 32514, 32541, \\ 34125, 34152, 34215, 34251, 34512, 34521, 35124, 35142, 35214, 35241, 35412, 35421, \\ 41235, 41253, 41325, 41352, 41523, 41532, 42135, 42153, 42315, 42351, 42513, 42531, \\ 43125, 43152, 43215, 43251, 43512, 43521, 45123, 45132, 45213, 45231, 45312, 45321, \\ 51234, 51243, 51324, 51342, 51423, 51432, 52134, 52143, 52314, 52341, 52413, 52431, \\ 53124, 53142, 53214, 53241, 53412, 53421, 54123, 54132, 54213, 54231, 54312, 54321 \end{array} \right\}$$

$$=$$

$$\mathbb{S}_5 =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1), (45), (34), (345), (354), (35), (23), (23)(45), (234), (2345), (2354), (235), \\ (243), (2453), (24), (245), (24)(35), (2435), (2543), (253), (254), (25), (2534), (25)(34), \\ (12), (12)(45), (12)(34), (12)(345), (12)(3543), (12)(35), \\ (123), (123)(45), (1234), (12345), (12354), (1235), \\ (1243), (12453), (124), (1245), (124)(35), (12435), \\ (12543), (1253), (1254), (125), (12534), (125)(34), \\ (132), (132)(45), (1342), (13452), (13542), (1352), \\ (13), (13)(45), (134), (1345), (1354), (135), \\ (13)(24), (13)(245), (1324), (13245), (13524), (135)(24), \\ (13)(254), (13)(25), (13254), (1325), (134)(25), (13425), \\ (1432), (14532), (142), (1452), (142)(35), (14352), \\ (143), (1453), (14), (145), (14)(35), (1435), \\ (1423), (14523), (14)(23), (145)(23), (14)(235), (14235), \\ (14253), (143)(25), (14)(253), (14325), (14)(25), (1425), \\ (15432), (1532), (1542), (152), (15342), (152)(34), (1543), (153), (154), (15), (1534), (15)(34), \\ (15423), (1523), (154)(23), (15)(23), (15234), (15)(234), \\ (153)(24), (15243), (15324), (15)(243), (1524), (15)(24) \end{array} \right\} =$$

$$S_5 =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1), \\ (12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35), (45), \\ (123), (124), (125), (132), (134), (135), (142), (143), (145), (152), (153), (154), \\ (234), (235), (243), (245), (253), (254), (345), (354), \\ (1234), (1235), (1243), (1245), (1253), (1254), (1324), (1325), (1342), (1345), (1352), (1354), \\ (1423), (1425), (1432), (1435), (1452), (1453), (1523), (1524), (1532), (1534), (1542), (1543), \\ (2345), (2354), (2435), (2453), (2534), (2543), \\ (12345), (12354), (12435), (12453), (12534), (12543), (13245), (13254), (13425), (13452), \\ (13524), (13542), (14235), (14253), (14325), (14352), (14523), (14532), (15234), (15243), \\ (15324), (15342), (15423), (15432), \\ (12)(34), (12)(35), (12)(45), (13)(24), (13)(25), (13)(45), \\ (14)(23), (14)(25), (14)(35), (15)(23), (15)(24), (15)(34), \\ (23)(45), (24)(35), (25)(34), \\ (12)(345), (12)(354), (13)(245), (13)(254), (14)(235), (14)(253), \\ (15)(234), (15)(243), (23)(145), (23)(154), (24)(135), (24)(153), \\ (25)(134), (25)(143), (34)(125), (34)(152), (35)(124), (35)(142), (45)(123), (45)(132) \end{array} \right\}$$

$$S_5 = \left\{ \begin{array}{l} (1), \\ (12), (13), (14), (15), (23), (24), (25), (34), (35), (45), \\ (123), (124), (125), (132), (134), (135), (142), (143), (145), (152), (153), (154), \\ (234), (235), (243), (245), (253), (254), (345), (354), \\ (1234), (1235), (1243), (1245), (1253), (1254), (1324), (1325), (1342), (1345), (1352), (1354), \\ (1423), (1425), (1432), (1435), (1452), (1453), (1523), (1524), (1532), (1534), (1542), (1543), \\ (2345), (2354), (2435), (2453), (2534), (2543), \\ (12345), (12354), (12435), (12453), (12534), (12543), (13245), (13254), (13425), (13452), \\ (13524), (13542), (14235), (14253), (14325), (14352), (14523), (14532), (15234), (15243), \\ (15324), (15342), (15423), (15432), \\ (12)(34), (12)(35), (12)(45), (13)(24), (13)(25), (13)(45), \\ (14)(23), (14)(25), (14)(35), (15)(23), (15)(24), (15)(34), \\ (23)(45), (24)(35), (25)(34), \\ (12)(345), (12)(354), (13)(245), (13)(254), (14)(235), (14)(253), \\ (15)(234), (15)(243), (23)(145), (23)(154), (24)(135), (24)(153), \\ (25)(134), (25)(143), (34)(125), (34)(152), (35)(124), (35)(142), (45)(123), (45)(132) \end{array} \right\}$$

#punti fissi: $1 \times \mathbf{5} + 10 \times \mathbf{3} + 20 \times \mathbf{2} + 30 \times \mathbf{1} + 24 \times \mathbf{0} + 15 \times \mathbf{1} + 20 \times \mathbf{0}$

S_5

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	s $ f - \mu $	s ²	(#t)xs ²
(●)	1	6	6	5	25	25
(●●)	15	4	60	3	9	135
(●●●)	40	3	120	2	4	160
(●●)(●●)	45	2	90	1	1	45
(●●●●)	90	2	180	1	1	90
(●●●●●)	144	1	144	0	0	0
(●●)(●●●)	120	1	120	0	0	0
(●●)(●●)(●●)	15	0	0	1	1	15
(●●●)(●●●)	40	0	0	1	1	40
(●●)(●●●●)	90	0	0	1	1	90
(●●●●●●)	120	0	0	1	1	120
$\mu = 1$ $v = 1$	720		720			720

Ma il *numero* delle permutazioni di grado n
con la stessa *struttura ciclica*
si può calcolare senza farne prima l'elenco.

Formula di CAUCHY

Dati $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \in \mathbb{N}$ tali che

$$c_1 + 2 c_2 + 3 c_3 + \dots + n c_n = n,$$

$$\frac{n!}{c_1! c_2! c_3! \cdots c_n! 1^{c_1} 2^{c_2} 3^{c_3} \cdots n^{c_n}}$$

è il numero delle permutazioni di grado n
con c_1 punti fissi
e prodotto di c_2 2-cicli, di c_3 3-cicli, ..., di c_n n -cicli.

S_6

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	s $ f - \mu $	s ²	(#t)xs ²
(●)	1	6	6	5	25	25
(●●)	15	4	60	3	9	135
(●●●)	40	3	120	2	4	160
(●●)(●●)	45	2	90	1	1	45
(●●●●)	90	2	180	1	1	90
(●●●●●)	144	1	144	0	0	0
(●●)(●●●)	120	1	120	0	0	0
(●●)(●●)(●●)	15	0	0	1	1	15
(●●●)(●●●)	40	0	0	1	1	40
(●●)(●●●●)	90	0	0	1	1	90
(●●●●●●)	120	0	0	1	1	120
$\mu = 1$ $v = 1$	720		720			720

S_7

t tipo	#t	f #punti fissi di t	(#t)xf	s $ f - \mu $	s ²	(#t)xs ²
(•)	1	7	7	6	36	36
(••)	21	5	105	4	16	336
(•••)	70	4	280	3	9	630
(••)(••)	105	3	315	2	4	420
(••••)	210	3	630	2	4	840
(•••••)	504	2	1008	1	1	504
(••)(•••)	420	2	840	1	1	420
(••)(••)(••)	105	1	105	0	0	0
(•••)(•••)	280	1	280	0	0	0
(••)(••••)	630	1	630	0	0	0
(••••••)	840	1	840	0	0	0
(••)(••)(•••)	210	0	0	1	1	210
(••)(•••••)	504	0	0	1	1	504
(•••••••)	720	0	0	1	1	720
(•••)(••••)	420	0	0	1	1	420
$\mu = 1$ $v = 1$	5040		5040			5040

Dunque, in tutti i sette casi ($1 \leq n \leq 7$),
il *numero di tutti i punti fissi*
di tutte le permutazioni di un certo grado
è uguale
al *numero di tutte le permutazioni* di quel grado.
Di conseguenza, in questi sette casi,
il valore medio (non probabilistico)
è sempre esattamente 1.

Ciò vale in generale, per ogni n , e
segue subito dal seguente famoso
risultato combinatorio.

Lemma di CAUCHY-FROBENIUS-BURNSIDE.

Sia G un gruppo finito operante su un insieme finito e non vuoto X . Allora il numero t delle orbite dell'azione di G su X è la media aritmetica dei numeri di punti fissi degli elementi di G :

$$t = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)| .$$



Augustin Louis CAUCHY
[1789-1857]

William BURNSIDE
[1852-1927]



In altra forma il lemma è in
sostanza già presente
in CAUCHY (1845)
e, più esplicitamente,
in FROBENIUS (1887).

Ritrovato da BURNSIDE (1900)
è stato poi esteso e raffinato da
POLYA (1937).



Ferdinand Georg FROBENIUS
[1849-1917]

George POLYA
[1887-1985]



Dati un gruppo (moltiplicativo) G e un insieme non vuoto X , un'**azione (destra) di G su X** è un'applicazione

$$\rho : X \times G \longrightarrow X, (x, g) \longmapsto xg$$

tale che, per ogni $x \in X$ e per ogni $g_1, g_2 \in G$,

$$(1) \quad x(g_1 g_2) = (xg_1) g_2$$

$$(2) \quad x1 = x.$$

Se

$$\rho : X \times G \longrightarrow X, (x, g) \longmapsto xg$$

è un'azione del gruppo G sull'insieme (non vuoto) X ,
per ogni fissato $g \in G$, l'applicazione

$$g^{\hat{\rho}} : x \in X \longmapsto xg \in X$$

è una permutazione di X e

$$\hat{\rho} : g \in G \longmapsto g^{\hat{\rho}} \in \text{Sym}(X)$$

è un omomorfismo di gruppi (e quindi $G^{\hat{\rho}}$ è un gruppo
di permutazioni di X : $G^{\hat{\rho}} \leq \text{Sym}(X)$).

Dim.

$$S := \{(x, g) \in X \times G \mid x^g = x\}$$

$$S(x, \cdot) := \{g \in G \mid x^g = x\} = \text{Stab}_G(x) = G_x \leq G$$

$$S(\cdot, g) := \{x \in X \mid x^g = x\} = \text{Fix}(g) \subseteq X$$

$$\sum_{g \in G} S(\cdot, g) = S = \sum_{x \in X} S(x, \cdot)$$

$$\left| \sum_{g \in G} S(\cdot, g) \right| = \left| \sum_{x \in X} S(x, \cdot) \right|$$

$$\sum_{g \in G} |S(\cdot, g)| = \sum_{x \in X} |S(x, \cdot)|$$

$$\sum_{g \in G} |S(\cdot, g)| = \sum_{x \in X} |S(x, \cdot)|$$

$$\sum_{g \in G} |Fix(g)| = \sum_{x \in X} |G_x|$$

$$X = ?$$

$\therefore$

$$Orb_G(x) := \{x^g \mid g \in G\}$$

$$G_x g_1 = G_x g_2 \iff g_1 g_2^{-1} \in G_x \iff x^{g_1 g_2^{-1}} = x \iff x^{g_1} = x^{g_2}$$

$$G_x g \in G/\sim_{G_x} \mapsto x^g \in Orb_G(x)$$

$$|Orb_G(x)| = |G : G_x|$$

$$\exists_t x_1, x_2, \dots, x_t \in X :$$

$$\{Orb_G(x_1), Orb_G(x_2), \dots, Orb_G(x_t)\} \in Part(X)$$

$$X = \sum_{1 \leq i \leq t} Orb_G(x_i)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} |Fix(g)| &= \sum_{x \in X} |G_x| = \\
&= \sum_{x \in \sum_{1 \leq i \leq t} Orb_G(x_i)} |G_x| = \\
&= \sum_{1 \leq i \leq t} \sum_{x \in Orb_G(x_i)} |G_x|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h \in G_{x^g} &\Leftrightarrow (x^g)^h = x^g \Leftrightarrow x^{ghg^{-1}} = x \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ghg^{-1} \in G_x \Leftrightarrow h \in g^{-1}G_x g \\
\therefore G_{x^g} &= g^{-1}G_x g = (G_x)^g
\end{aligned}$$

$$\forall x \in Orb_G(x_i), \exists g \in G : x = x_i^g$$

$$G_x = G_{x_i^g} = (G_{x_i})^g$$

$$|G_x| = |(G_{x_i})^g| = |G_{x_i}|$$

$$\begin{aligned}
\sum_{g \in G} |Fix(g)| &= \sum_{x \in X} |G_x| = \\
&= \sum_{x \in \sum_{1 \leq i \leq t} Orb_G(x_i)} |G_x| = \\
&= \sum_{1 \leq i \leq t} \sum_{x \in Orb_G(x_i)} |G_x| = \\
&= \sum_{1 \leq i \leq t} |Orb_G(x_i)| |G_{x_i}| = \\
&= \sum_{1 \leq i \leq t} |G : G_{x_i}| |G_{x_i}| = \\
&= \sum_{1 \leq i \leq t} |G| = t |G|
\end{aligned}$$

■

*<<Di solito la gente crede
che la matematica sia
difficile,
perché non si rende conto
di quanto sia difficile la
vita>>*



John von NEUMANN (1903-1957)