

2[^] Scuola Estiva di Formazione per i docenti del Primo Ciclo di Istruzione
“Insegnare Matematica: didattica, inclusione e cooperazione”
Pizzoferrato 22-23-24-25 luglio 2018

**Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni
nella scuola primaria**

Luciana Delli Rocili¹, Antonio Maturo²

¹Istituto Comprensivo Statale Pescara 5, Via Gioberti n. 15, 65100 Pescara
e-mail: lucianadr@live.it

²Università G. d'Annunzio di Chieti-Pescara, Viale Pindaro, 42, 65127, Pescara
e-mail: antomato75@gmail.com

Sunto

L'impostazione soggettiva del Calcolo delle Probabilità è, rispetto alle altre impostazioni, meno dipendente dal calcolo e mette maggiormente in luce gli aspetti logici del ragionamento probabilistico.

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

Essa, essendo collegata alle scommesse ed alle decisioni in condizioni di incertezza, può essere introdotta facilmente e efficacemente in maniera ludica nella scuola primaria e quindi sembra particolarmente adatta per la comprensione dei fondamenti della matematica dell'incerto.

In questo lavoro si presentano alcune esperienze di valutazione soggettive di probabilità svolte in classe, mettendo in evidenza il lavoro da svolgere per ottenere il rispetto delle condizioni di coerenza.

Viene anche presentato un esperimento di valutazione soggettiva di probabilità geometriche.

Parole Chiave: Eventi, probabilità soggettiva, scommesse, coerenza, probabilità geometrica

1. Sul concetto di proposizione nella scuola primaria

In (Russell, 1962) un *enunciato* (o *proposizione*) della *logica bivalente* è descritto come “una disposizione di parole e/o simboli che esprime ciò che è o vero o falso”.

La descrizione di Russel, così come le altre presenti in letteratura, non è una definizione, ma nasconde una *valutazione soggettiva*.

Ossia presuppone l'esistenza di un individuo, *il decisore*, forse un esperto di logica o di linguistica, ma non necessariamente, forse la maestra o un bambino, che stabilisce che una disposizione di parole e/o simboli è (a suo parere) un enunciato della logica bivalente.

Riteniamo che, in ambito scolastico, soprattutto nella scuola primaria, la mancanza di completa oggettività non sia un inconveniente.

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

Essa riduce i deleteri automatismi ed è un'occasione per responsabilizzare i bambini e invitarli a riflettere e ad esprimere una loro opinione.

I bambini devono interrogarsi e cooperare per decidere se una data disposizione di parole e/o simboli può essere interpretata come una domanda a cui si può dare una e una sola delle due risposte: *vero* o *falso*.

Dal punto di vista linguistico il concetto di *enunciato* o *proposizione* è più ampio, in quanto si riferisce ad una frase di senso compiuto (con soggetto, predicato verbale o nominale, complementi, etc.) per la quale si può esprimere un giudizio di verità che non necessariamente si limita a *vero* o *falso*, ma può essere anche *quasi del tutto vero, più vero che falso, a metà fra vero e falso, più falso che vero, quasi del tutto falso*.

Lo studio e le applicazioni degli enunciati linguistici si trova ad es. in (Zadeh, 1965, 1975). Esperienze e considerazioni sulla loro introduzione nella scuola primaria sono in (Delli Rocili, Maturo, 2013a, 2013b, 2015).

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

Il primo passo di una sperimentazione didattica nella scuola primaria consiste nel valutare fino a che punto i bambini, opportunamente guidati, riescono a riconoscere se una frase è un enunciato della logica bivalente, un enunciato linguistico, oppure non è un enunciato.

Importante, inoltre, è stabilire il “*criterio di verifica*zione”, ossia vedere con quali mezzi e quali difficoltà i bambini possono arrivare a decidere il valore di verità di un enunciato (Fadini, 1975).

Usualmente si ammette che il criterio di verificaione sia tale da permettere di assegnare il valore di verità della proposizione.

Ma alcuni autori, ad esempio (Heyting, 1956), basandosi sulla logica intuizionista attribuiscono il valore vero o falso solo se è possibile dare una dimostrazione che vale uno dei due, per cui considerano un terzo valore di verità: “indeciso” o “indecidibile” se non si può dimostrare che la proposizione è vera o falsa.

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

La possibilità di attribuire un terzo valore di verità è stata ampiamente approfondita in Reichenbach (1942), che ha elencato varie operazioni logiche fra le proposizioni della logica a tre valori. Applicazioni sono in Fadini (1975). Lo stesso de Finetti (1970) riprende i concetti di Reichenbach per le operazioni fra eventi condizionati.

In questo lavoro, per semplicità, ci limiteremo a considerare solo proposizioni in cui si possa dimostrare che vale uno dei due valori: “vero” o “falso”, una volta in possesso di una informazione completa.

2. Sul concetto di evento nella scuola primaria

Un evento E può essere definito come una proposizione della logica bivalente in cui è ammessa la possibilità che le informazioni in possesso del decisore siano incomplete e quindi non permettono di attivare il criterio di verifica per stabilire se la proposizione è vera o falsa.

Per far familiarizzare i ragazzi con il concetto di evento, essi sono stati invitati a scegliere, per ogni evento E preso in considerazione, una delle seguenti alternative:

- (1) Il decisore, con l'informazione che possiede, può stabilire che E è vero.
L'evento E si dice “certo”;
- (2) Il decisore, con l'informazione che possiede, può stabilire che E è falso.
L'evento E si dice “impossibile”;
- (3) le informazioni in possesso del decisore non permettono di stabilire se E è vero o falso. L'evento si dice “aleatorio”.

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

*“Un evento è una proposizione di cui può essere non conosciuto il valore di verità. Se tale valore è conosciuto ed è 1, l’evento si dice **certo**, se è 0, si dice **impossibile**, se non è conosciuto si dice **aleatorio**.”* (de Finetti, 1970, p.710)

In una sperimentazione effettuata in due prime e due quarte di una scuola primaria, per verificare la comprensione dei concetti di proposizione o evento, abbiamo proposto agli alunni le seguenti attività:

- (1) lettura di frasi e loro riconoscimento come enunciati della logica bivalente, verificando il grado di convinzione di ciascun alunno sul fatto che valgono i principi del terzo escluso e non contraddizione;
- (2) classificazione di ciascuno degli enunciati accettati come eventi in: *certo*, *impossibile*, *aleatorio*, evidenziando sia il criterio di verifica e sia lo stato di informazione.

3. La scommessa come punto di partenza per ottenere la probabilità soggettiva

Nel nostro percorso didattico, una volta preparati gli studenti alla comprensione dei concetti logici fondamentali, è apparso naturale introdurre la probabilità dal punto di vista soggettivo, più generale, non legato ad assunzioni, più o meno sottintese, di equiprobabilità di eventi di una particolare partizione dell'evento certo (de Finetti, 1970; Scozzafava, 1996, 2001; Coletti, Scozzafava, 2002; Maturo, 1993, 2008).

Inoltre, la probabilità soggettiva è il fondamento della teoria razionale delle decisioni in condizioni di incertezza, come è stato evidenziato da Lindley (1970).

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

Da sottolineare che la probabilità soggettiva è meno dipendente dal calcolo, mette maggiormente in luce gli aspetti logici del ragionamento probabilistico e può essere introdotta facilmente e efficacemente in maniera ludica.

Una dimensione fiabesca per introdurre la probabilità soggettiva, utile nelle prime classi, è in (Di Poccio, 2018).

L'idea definetiana di introdurre la probabilità attraverso le scommesse ha avuto un successo entusiastico da parte dei bambini, che, vedendo la scommessa come un gioco, hanno avuto lo stimolo per l'avvio alla comprensione dei fondamenti e delle procedure della logica dell'incerto.

Un aspetto molto significativo è stato quello di rinforzare la capacità dei ragazzi di stabilire collegamenti interdisciplinari, in quanto lo sforzo di comprensione logica degli enunciati, del loro collocamento spaziale e temporale, ha portato ad uno spontaneo approfondimento dei concetti grammaticali, sintattici, storici.

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

Ciò ha anche permesso di ottenere un arricchimento del vocabolario e una velocizzazione nel processo di assimilazione dei concetti espressi in forma analitica, scritta o verbale.

Per assegnare la probabilità soggettiva, un bambino ha assunto il ruolo di banco e gli altri il ruolo di scommettitori. Come monete sono state usate le figurine dei calciatori o della famiglia Simpson.

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

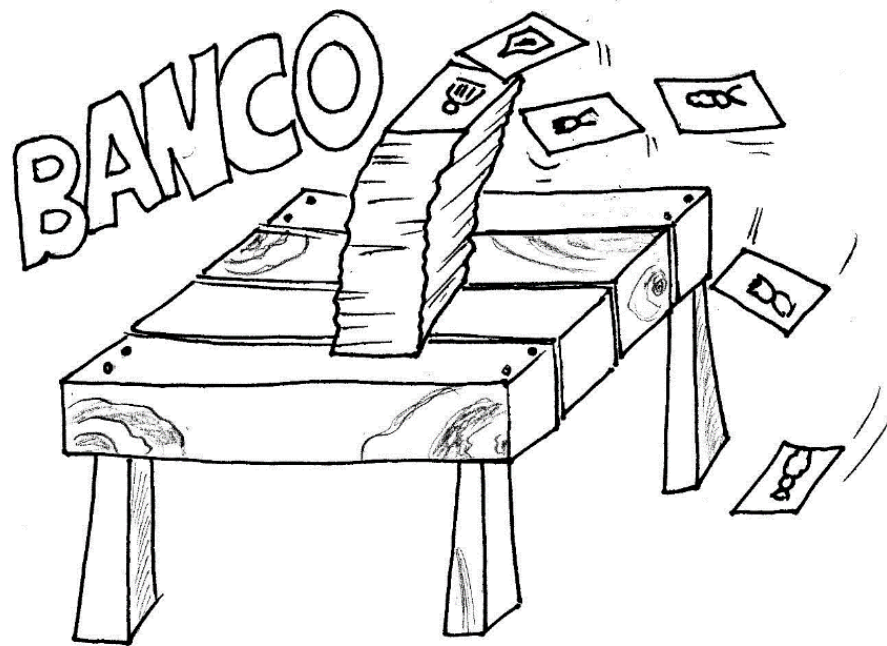


Figura 1

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

All'inizio sono stati presi in considerazione alcuni eventi legati alle squadre di calcio come i seguenti:

A = “Il Pescara Calcio vincerà la prossima partita”,

B = “La Juventus vincerà domenica prossima”,

C = “Il Milan vincerà la prossima partita in casa”.

Successivamente sono stati considerati eventi legati alla vita quotidiana:

D = “Lunedì prossimo pioverà”,

F = “Il maestro Alberto fra 15 giorni avrà i capelli rasati”,

G = “La maestra Luciana a giugno avrà i capelli corti”,

H = “Il prossimo mercoledì nella mensa della scuola si mangeranno le uova strapazzate”,

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

L = “Fra due lunedì a mensa si mangerà la carne”,

M = “L’anno prossimo a scuola arriveranno due maestri nuovi”,

N = “L’anno prossimo la maestra comprerà una macchina nuova”.

Una sperimentazione numericamente efficace avrebbe richiesto l’uso di 100 o almeno 50 figurine. Tuttavia, essendo in una prima elementare, è stato necessario limitarsi all’uso di 20 figurine, in quanto 20 rappresenta concretamente “*tutto un uomo*”, il numero delle sue dita di mani e piedi, e ciò porta gli alunni ad avere consapevolezza dei concetti di quantità e di numero.

Un bambino (lo scommettitore) doveva decidere la quantità di figurine P (la puntata) da puntare sul verificarsi dell’evento E considerato; in cambio il banco doveva pagare 20 figurine se l’evento E si verificava.

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria



Figura 2

Il lavoro è stato organizzato nelle seguenti fasi:

Fase 1. Gli scommettitori sono stati lasciati liberi di decidere la loro puntata sugli eventi considerati, con la ovvia condizione di coerenza che la puntata (pagamento certo) non deve superare la vincita (ricavo possibile).

Fase 2. I bambini, sempre con la vincita fissa di 20 figurine, sono stati invitati a puntare anche sugli eventi contrari.

Fase 3. Si è aperta una discussione sul significato delle puntate sia sugli eventi e sia sui loro contrari. Ciò ci ha permesso di individuare per ogni bambino la *propensione*, l'*avversione* o l'*indifferenza* al rischio.

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

Per ogni evento E, e per ogni bambino che ha scommesso, indicando con S(E) e con T(E) le puntate, rispettivamente su E e sull'evento contrario $\neg E$, abbiamo calcolato il valore:

$$R(E) = (S(E) + T(E) - 20) / 20. \quad (1)$$

Il numero R(E), appartiene all'intervallo [-1, 1] (per puntate che non superano la vincita). Esso è positivo in caso di propensione al rischio, negativo in caso di avversione al rischio e nullo per indifferenza al rischio.

Per semplicità, per evitare calcoli con la virgola, si è considerato al posto di R(E) il numero $R^*(E) = 100 R(E)$, ottenuto dalla formula $R^*(E) = 5 (S(E) + T(E) - 20)$. Ogni bambino, dal valore di $R^*(E)$, ha potuto rendersi conto del suo comportamento rispetto al rischio.

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

I risultati ottenuti nel primo ciclo di scommesse, relativamente agli eventi, C, F, D, sono stati i seguenti:

Scommettitori	Evento C	Evento $\neg C$	Evento F	Evento $\neg F$	Evento D	Evento $\neg D$
1 Alice	10	1	0	10	10	0
2 Nicolò	6	2	1	18	20	3
3 Filippo	3	1	0	10	10	20
4 Nadia	4	10	0	10	10	10
5 Francesco	10	9	10	0	20	3
6 Leonardo	8	2	20	1	19	0
7 Ludovica	9	1	0	10	10	8
8 Ilaria	1	20	0	20	20	1
9 Silvia	7	0	20	5	10	11
10 Alessio	20	0	0	12	30	19

Tabella 1

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

I valori dell'indice R^* per gli eventi C, F, D sono i seguenti:

Scommettitori	Evento C	Evento F	Evento D	Media
1 Alice	-45	-50	-50	-48
2 Nicolò	-60	-5	15	-17
3 Filippo	-80	-50	50	-27
4 Nadia	-30	-50	0	-27
5 Francesco	-5	-50	15	-13
6 Leonardo	-50	5	-5	-17
7 Ludovica	-50	-50	-10	-37
8 Ilaria	5	0	15	3
9 Silvia	-66	25	5	-12
10 Alessio	0	-40	145	35
Media di R	-38	-27	19	-16

Tabella 2

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

I risultati della tabella sembrano contraddittori. Nella valutazione degli eventi C e F i bambini mostrano in generale un'avversione al rischio, mentre per l'evento D si ha in media una propensione al rischio.

Probabilmente il bambino 10 (Alessio) pensava che la vincita fosse di 30 figurine perché il primo approccio al gioco era avvenuto con la possibile vincita di 30 figurine. Alcuni bambini (Alice e Ilaria) hanno avuto un comportamento costante per i vari eventi, la prima con marcata avversione al rischio, la seconda praticamente indifferente al rischio.

Altri bambini (Filippo e Alessio) hanno cambiato nettamente atteggiamento nel passare dai primi due eventi al terzo.

4. La coerenza delle scommesse e la probabilità soggettiva

A partire dalle idee emerse nella fase precedente è stato introdotto il concetto di *coerenza* della scommessa.

Il *primo principio di coerenza* riguarda l'evento certo e l'evento impossibile. La puntata sull'evento certo deve essere uguale alla vincita e la puntata sull'evento impossibile deve essere nulla.

Il *secondo principio di coerenza* dice che, fra il giocatore e il banco, uno paga la puntata e l'altro la vincita. In altre parole, se la vincita è positiva, le puntate non possono essere negative.

I bambini sono stati invitati a riflettere sul fatto che, puntando contemporaneamente le somme $S(E)$ e $T(E)$ rispettivamente sull'evento E e sul suo contrario $\neg E$, con la vincita uguale alla stessa quantità di 20 figurine, allora possono verificarsi i seguenti casi:

- (1) Se $S(E) + T(E) > 20$, allora si ha una perdita certa;
- (2) Se $S(E) + T(E) < 20$, allora si ha una vincita certa;
- (3) Se $S(E) + T(E) = 20$, allora non si vince e non si perde.

Per evitare le prime due circostanze inaccettabili, la prima dal banco, la seconda dal bambino, allora è necessario concordare che la somma delle due puntate deve essere uguale alla vincita (*terzo principio di coerenza*).

Tenendo conto dei principi di coerenza i bambini sono stati invitati ad aggiornare gradualmente (una figurina alla volta) le loro puntate fino ad arrivare ad un insieme di puntate coerenti.

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

In una fase intermedia, prima di considerare i principi di coerenza, ci si è limitati a concedere al banco la facoltà di rifiutare le scommesse con una puntata troppo bassa.

Un esperimento di scommessa coerente è stato fatto con gli eventi G ed L.

I bambini sono stati invitati a rispettare i principi di coerenza, in particolare la condizione $S(E) + T(E) = 20$ per ogni evento E considerato.

I risultati sono presentati nella seguente tabella 3.

Scommettitori	Evento G	Evento $\neg G$	Evento L	Evento $\neg L$
1 Alice	0	20	10	10
2 Nicolò	12	8	4	16
3 Filippo	0	20	4	16
4 Nadia	0	20	18	2
5 Francesco	12	8	4	16
6 Leonardo	20	0	20	0
7 Ludovica	12	8	20	0
8 Ilaria	0	20	1	19
9 Silvia	10	10	17	3
10 Alessio	1	19	2	18

Tabella 3

L'atteggiamento dei bambini appare molto variabile. Molti bambini, precisamente i numeri 1, 3, 4, 6, 8 per l'evento G e i numeri 6, 7 per l'evento L, tendono a non considerare l'aleatorietà ma a considerare gli eventi come certi o impossibili.

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

Altri bambini, ossia i numeri 10 per l'evento G e 8, 10 per l'evento L si allontanano molto timidamente dall'idea di considerare gli eventi solo come certi o impossibili.

I bambini 2, 5, 7, 9 considerano come aleatorio l'evento G con valutazioni molto vicine fra loro.

Le opinioni dei bambini sull'evento L appaiono divise in due contrapposte fazioni, una con alta fiducia sul verificarsi di L, uno con bassa fiducia.

Solo il bambino 1 attribuisce una equiprobabilità a L e al suo contrario.

A questo punto si introduce la definizione di probabilità soggettiva.

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

Per ogni evento E , se $S(E)$ e $T(E)$ sono le puntate, rispettivamente su E e sul suo contrario $\neg E$, i rapporti:

$$p(E) = S(E) / 20 \qquad q(E) = T(E) / 20 \qquad (2)$$

sono le probabilità soggettive di E e di $\neg E$, rispettivamente.

È immediato far capire ai bambini che se la vincita invece di essere di 20 figurine, è di un numero V di figurine, le formule (1) e (2) vanno cambiate sostituendo V al posto di 20. La seconda condizione di coerenza diventa $S(E) + T(E) = V$.

I ragazzi, in una fase successiva, saranno in grado di ricavare che, indicando con Ω l'evento certo, con $\emptyset$ quello impossibile e con E un evento generico, in termini di probabilità le tre condizioni di coerenza si riducono alle formule:

$$p(\Omega) = 1, p(\emptyset) = 0, p(E) \geq 0, q(E) \geq 0, p(E) + q(E) = 1. \qquad (3)$$

5. Un esperimento sul comportamento dei gruppi

Un significativo esperimento è stato condotto per vedere il comportamento dei gruppi. Una classe di 18 bambini è stata divisa in tre gruppi di 6 bambini.

A ciascun gruppo è stato chiesto di assegnare soggettivamente una probabilità agli eventi considerati nei paragrafi precedenti.

Nella seguente tabella 4 sono presentati i risultati ottenuti prima di introdurre il concetto di coerenza.

Scommettitori	Evento C	Evento $\neg C$	Evento F	Evento $\neg F$	Evento D	Evento $\neg D$
Gruppo 1	0	30	0	20	0	20
Gruppo 2	10	0	0	20	20	0
Gruppo 3	20	0	0	20	10	20

Tabella 4

In corrispondenza sono stati ottenuti i seguenti valori dell'indice R^*

Scommettitori	Evento C	Evento F	Evento D	Media
Gruppo 1	50	0	0	17
Gruppo 2	-50	0	0	-17
Gruppo 3	0	0	50	17
Media	0	0	17	6

Tabella 5

La puntata sull'evento F è coerente per tutti i gruppi, quella sull'evento D è coerente per i primi due gruppi e con propensione al rischio per il terzo gruppo.

Si può osservare che le puntate dei gruppi appaiono spesso discutibili poiché in quasi tutti i casi gli eventi sono stati considerati certi o impossibili, ossia i gruppi sono apparsi orientati a non tener conto dell'aleatorietà.

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

Forse l'opinione del ragazzo che è stato implicitamente considerato il più autorevole dai colleghi è stata assunta acriticamente come verità.

Successivamente, una volta introdotto il concetto di coerenza, sono state proposte puntate coerenti sugli eventi:

G = “La maestra Luciana a giugno avrà i capelli corti”,

L = “Fra due lunedì a mensa si mangerà la carne”.

I risultati, presentati nella tabella 6, confermano l'attitudine dei gruppi a non valutare l'aleatorietà. Fa eccezione il comportamento del gruppo 3 per l'evento L, ma si osserva in questo caso un giudizio a priori di equiprobabilità senza una adeguata riflessione sulla maggiore facilità di verificarsi fra gli eventi L e $\neg L$.

Scommettitori	Evento G	Evento $\neg G$	Evento L	Evento $\neg L$
Gruppo 1	0	20	20	0
Gruppo 2	0	20	20	0
Gruppo 3	0	20	10	10

Tabella 6

6. La “battaglia gattale” come confronto fra probabilità statistica e soggettiva

Uno strumento giocoso da noi elaborato che si può utilizzare per rendere consapevoli i ragazzi sulla validità dei giudizi di probabilità soggettiva è quello che abbiamo chiamato “battaglia gattale” per la sua somiglianza con la nota “battaglia navale”.

Si mostra ai ragazzi un tabellone in cui è disegnata la sagoma di un gatto (figura 3) e si invitano a dare soggettivamente le probabilità degli eventi:

E = “Il gatto di figura 3 viene colpito”;

$\neg E$ = Il gatto di figura 3 non viene colpito”.

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria



Figura 3

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

Successivamente si considera una famiglia di gatti (figura 4) e si invitano ad assegnare le probabilità agli eventi: F = “La famiglia di gatti di figura 4 viene colpita”, $\neg F$ = “La famiglia di gatti di figura 4 non viene colpita”.



Figura 4

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

Gli esperimenti di formulazione della probabilità soggettiva degli eventi E ed F di figura 3 e figura 4 hanno dato risultati molto diversi, in quanto nel primo caso si tratta di un evento con probabilità bassa e nel secondo con probabilità alta, per cui entrano in gioco aspetti psicologici diversi.

Le probabilità di E e di F, di tipo geometrico, non possono essere calcolate con le usuali cognizioni di geometria, per cui l'unica alternativa alla probabilità soggettiva si ottiene con la probabilità statistica per mezzo del metodo di Montecarlo, generando punti a caso nel tabellone e vedendo quanti di questi punti “colpiscono” il gatto o la famiglia di gatti.

Un criterio per indurre i ragazzi a valutazioni ragionate di probabilità soggettiva è stato quello di promettere un premio o comunque una gratificazione a chi si è avvicinato di più alla probabilità statistica.

7. Conclusioni e ulteriori prospettive di ricerca

La ricerca svolta sembra evidenziare una buona attitudine da parte degli alunni intervistati a comprendere, almeno intuitivamente, il significato di *enunciato della logica bivalente, evento, enunciato linguistico, non enunciato linguistico*. Si evidenzia anche una certa capacità critica nell'analisi delle frasi.

Tuttavia, esiste talvolta una difficoltà interpretativa nel passaggio dall'aspetto intuitivo a quello analitico, ossia nella comprensione piena delle sfumature contenute in una frase.

Ad esempio, affermare che un enunciato è '*più vero che falso*' porta a una logica plurivalente, mentre spesso si attribuisce il giudizio '*più vero che falso*' ad un evento volendo intendere che '*è più probabile che sia vero piuttosto che sia falso*'.

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

Riteniamo che sia opportuno, anche nelle prime classi della Scuola Primaria, far capire la differenza fra i due concetti, per recuperare i significati del linguaggio parlato che si inserisce in un contesto molto più ampio rispetto al linguaggio restrittivo basato sulla logica bivalente.

La “battaglia gattale” è risultata essere un utile strumento per riflettere sulla portata ed i limiti della probabilità soggettiva. È stata anche efficace per mostrare come si può fare matematica rigorosa anche con l’uso di procedimenti empirici.

Per quanto riguarda la coerenza, le valutazioni di probabilità sugli eventi presentati nella “battaglia gattale” all’inizio sono state quasi tutte incoerenti, poi sono state corrette con l’ausilio dell’insegnante.

Il concetto di coerenza va ulteriormente approfondito con un altro principio di coerenza e ulteriori sperimentazioni.

Il quarto (e ultimo) *principio di coerenza* riguarda tre eventi aleatori. Se A, B, C sono tre eventi aleatori tali che ciascuno è il contrario dell'unione degli altri due, allora facendo le puntate $S(A)$, $S(B)$, $S(C)$, rispettivamente su A, B, C, in una scommessa con vincita fissa V, allora deve essere $S(A) + S(B) + S(C) = V$.

Dividendo per V si ottiene la quarta condizione di coerenza in termini di probabilità:

$$p(A) + p(B) + p(C) = 1. \quad (4)$$

Le condizioni di coerenza per 4 o più eventi tali che ognuno è il contrario dell'unione degli altri, oppure per eventi qualsiasi, sono conseguenza dei 4 principi di coerenza e quindi non è necessario introdurre altri principi.

A partire dalle 4 condizioni di coerenza si ottengono tutte le formule utili per i vari giochi basati su decisioni in condizioni di incertezza e che quindi utilizzano la probabilità soggettiva.

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

Bibliografia

Coletti G., Scozzafava R., (2002), *Probabilistic Logic in a Coherent Setting*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

De Finetti B., (1970), *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, Torino,

Delli Rocili L., Maturo A., (2013a), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science & Philosophy*, 1 (1), 37-58.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013b), Probabilità e Statistica nella scuola primaria: esperienze didattiche e proposte, *Science & Philosophy*, 1 (2), 49-78.

Delli Rocili L., Maturo A., (2015). Interdisciplinarietà, logica dell'incerto e logica fuzzy nella scuola primaria. *Science & Philosophy*, 3(2), pp.11-26.

Di Poccio A. M., (2016), Numeri in fabula. Le probabili avventure nel paese di Matelandia (pp. 78-79), 2^a edizione APAV, Pescara, 2018.

Fadini A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori Editore, Napoli.

Heyting, A., (1956), *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam: North-Holland Publishing, 3rd revised edition, 1971.

Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano.

Maturo A., (1993), Struttura algebrica degli eventi generalizzati, *Periodico di Matematiche*, 4, 1993, p. 18-26.

Maturo A., (2008), La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti, *Ratio Sociologica*, 2, 2008, pp. 39-62.

Reichenbach H., (1942), *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, tr. it. Einaudi, Torino, 1952

Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.

Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.

Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.

Zadeh L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*. 8. 338-358.

Zadeh L. A. (1975), The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Inf Sci* 1975;8 Part I:199--249, Part II 301--357, Part III. *Inf Sci* 1975;9: 43--80.