

APAV-MATHESIS

2^ Scuola Estiva di Formazione per il Primo Ciclo di Istruzione

“Insegnare Matematica: didattica, inclusione e cooperazione”

*Un percorso verticale dalla Scuola di infanzia alla conclusione
della Scuola Secondaria di primo grado*

Ferdinando Casolaro - Paolo Rotondo

Dipartimento di Architettura - Università di Napoli Federico II

ferdinando.casolaro@unina.it

Paolo Rotondo

Segretario Mathesis Pescara

paolorotondo97@gmail.com

Pizzoferrato (CH), Hotel Delberg Palace 22, 23, 24, 25 luglio 2018

Indicazioni Nazionali per il primo ciclo

Dai vecchi programmi alle nuove indicazioni. Il cambiamento di simbologia:

Indicazioni	→	Vecchi programmi
- Numeri	→	Aritmetica
- Spazi e Figure	→	Geometria
- Relazioni e funzioni	→	Logica
- Dati e previsioni	→	Probabilità e Statistica

Scuola dell'Infanzia

1) Numeri:

- tra i tre e i quattro anni - numerazione da 1 a 10 con capacità di lettura; righello: lunghezza col decimetro. 10 cartoncini con disegni in numero di n (da 1 a 10) su ogni cartoncino: fare posizionare in ordine crescente o decrescente in base al numero di disegni presenti sul cartoncino.
- tra i quattro e i cinque anni - numerazione da 1 a 100: i bambini possono anche scrivere; lunghezza col metro, unità di misura di lunghezza. Pesatura con bilancia, unità di misura di peso (*limiti della proposta a discrezione della maestra*).

Scuola dell'Infanzia

2) Spazi e Figure:

- tra i tre e quattro anni: rotolo di spago o filo rigido per figure lineari, cartoncini per figure piane, scatoli per figure spaziali: ordinare dal più piccolo al più grande e viceversa (*limiti della proposta a discrezione della maestra*).
- tra i quattro e cinque anni: rotolo di spago o filo rigido per figure lineari: il segmento, la semiretta come segmento che non finisce. Cartoncini con quadrati, rettangoli ed altre figure piane con *limiti della proposta a discrezione della maestra*.

Scuola dell'Infanzia

3) Relazioni e funzioni (corrispondenze):

- tra i tre e i quattro anni: coppia uomo-donna (se classe mista, accoppiamento dei bambini nella classe), cartoncini con coppie di colore diversi (10 bianchi e 10 neri mischiati da accoppiare), cartoncini con coppie di misure diverse (due misure da accoppiare);

Ada, Bice, Chiara, Dalia, Elena, Flora, Grazia, Helen, Ilaria, Laura.
Aldo, Bruno, Carlo, Dario, Emilio, Felice, Giulio, Hugo, Ivano, Luca.

- tra i quattro e i cinque anni: si può già introdurre la prima parte del percorso sulle corrispondenze (da slide 12 a 17 di questo percorso); ovviamente, con opportune facilitazioni ed esempi più semplici.

Scuola dell'Infanzia

4) Dati e previsioni:

- tra i tre e i quattro anni: Moneta, dado. E' più facile indovinare testa/croce oppure un numero del dado? Ogni bambino lancia il dado e vuole croce: dopo quanti lanci esce? Ogni bambino lancia il dado e vuole che esca due: dopo quanti lanci esce? Dal gioco viene fuori la prima nozione di probabilità perché il dominio della moneta è costituito da due elementi, il dominio del dado è costituito da sei elementi.
- tra i quattro e i cinque anni: si può ampliare il discorso su esposto con osservazioni più specifiche e si può inserire la previsione sulle partite di calcio (si introduce la probabilità soggettiva senza citarla).
- N.B. – La maggior parte dei bambini a quattro/cinque anni già conosce le squadre e i calciatori, per cui sanno dire quale squadra è più forte, quale è più debole.

Scuola Primaria (dal primo al terzo anno)

Obiettivi di apprendimento al termine del terzo anno della scuola primaria

Numeri:

- *contare in senso progressivo e regressivo per salti di due, tre, ...*
- *leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale; individuare la notazione posizionale; confrontare, ordinare e rappresentare i numeri sulla retta;*
- *eseguire mentalmente semplici operazioni di calcolo con i numeri naturali; conoscere con sicurezza le tabelline fino a dieci ed eseguire le operazioni con gli usuali algoritmi scritti;*
- *Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali, **rappresentarli sulla retta** ed eseguire semplici addizioni e sottrazioni anche con riferimento alle monete o ai risultati di semplici misure.*

Scuola Primaria (terzo anno)

Obiettivi di apprendimento al termine del terzo anno della scuola primaria

Numeri:

- tra i cinque anni e i sette anni: numerazione da 1 a 1000: primo cenno all'ordine di grandezza; lunghezza col metro, unità di misura di lunghezza.
- Pesatura con bilancia, unità di misura di peso (*limiti della proposta a discrezione della maestra*).
- tra i sette anni e gli otto anni: confrontare numeri decimali e rappresentarli sulla retta.

Scuola Primaria (dal primo al terzo anno)

Obiettivi di apprendimento al termine del terzo anno della scuola primaria

Spazio e figure:

- *comunicare la posizione di oggetti nello spazio fisico usando termini adeguati (sopra/sotto, davanti/dietro, destra/sinistra, dentro/fuori);*
- *eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno, descrivere un percorso che si sta facendo e dare istruzioni per far compiere un percorso desiderato;*
- *riconoscere, denominare e descrivere figure geometriche;*
- *disegnare figure geometriche e costruire modelli materiali anche nello spazio.*

Scuola Primaria (terzo anno)

Obiettivi di apprendimento al termine del terzo anno della scuola primaria

Relazioni, dati e previsioni:

- classificare numeri, figure, oggetti in base a una o più proprietà, utilizzando rappresentazioni opportune a seconda dei contesti e dei fini;
- argomentare sui criteri usati per classificare e ordinare;
- Leggere e rappresentare relazioni e dati con diagrammi, schemi e tabelle;
- Misurare grandezze (lunghezze, tempo, ecc.) utilizzando sia unità arbitrarie, sia unità e strumenti convenzionali (metro, orologio, ecc.);

Scuola Primaria (terzo anno)

Obiettivi di apprendimento al termine del terzo anno della scuola primaria

Relazioni, dati e previsioni:

- tra i cinque anni e i sette anni: Relazioni tra l'insieme dei banchi e il numero degli alunni; Coppie di genitori,..., ecc.

- tra i sette anni e gli otto anni:

Generali relazioni tra insiemi: *corrispondenza univoca, corrispondenza biunivoca, corrispondenza biettiva e identificazioni di insiemi attraverso le proprietà che li caratterizzano:*

vedi esempi nelle slides successive.

Le corrispondenze

In un'aula sono posizionati 4 banchi da due posti con 8 alunni disposti come segue:



Indichiamo con B l'insieme dei banchi:

$B \equiv \{\text{banco 1, banco 2, banco 3, banco 4}\}$

e con A l'insieme degli alunni:

$A \equiv \{\text{Rita, Diego, Mario, Giulia, Ada, Pietro, Gino, Sara}\}.$

Corrispondenze tra insiemi finiti

Dalla Presidenza, il Preside chiede ad un bidello di portare in Presidenza il banco in cui c'è l'alunno Gino.

Il bidello in aula chiede chi è l'alunno Gino che alza la mano.

Il bidello ha individuato che si tratta del banco 4?

E se si chiede di Rita? Dov'è seduta Rita?

Corrispondenza univoca tra due insiemi

Si può quindi costruire una corrispondenza dall'insieme **A** degli alunni all'insieme **B** dei banchi ($A \rightarrow B$), che ad ogni alunno fa corrispondere l'unico banco dove esso è seduto.

In generale la corrispondenza $A \rightarrow B$ che a ogni elemento di **A** fa corrispondere un solo elemento di **B** si dice UNIVOCA di **A** in **B**.

Corrispondenza univoca tra due insiemi

Viceversa, il preside chiede al bidello di portare in Presidenza l'alunno (o alunna) del banco 4.

Il bidello ha capito che deve portare l'alunno Gino?

No, perché nel banco 4 è seduta anche Giulia.

Dico allora che la corrispondenza $B \rightarrow A$, che ad ogni banco di B fa corrispondere l'alunno di A seduto in quel banco non è UNIVOCA.

Ciò comporta che non posso individuare gli elementi dell'insieme A attraverso gli elementi dell'insieme B.

Corrispondenza biunivoca

Se gli alunni sono disposti in un'aula con banchi singoli:

Banco 4



Giulia

Banco 5



Gino

Banco 6



Rita

Banco 1



Mario

Banco 2



Sara

Banco 3



Ciro

**Posso dire che il banco in cui c'è l'alunno Gino è il banco 5?
Viceversa, se il preside chiede l'alunno del banco 5, si individua che
l'alunno richiesto è Gino?**

Corrispondenza biunivoca tra due insiemi

Posso allora individuare gli elementi dell'insieme A degli alunni attraverso gli elementi dell'insieme B dei banchi?

Si. In tal caso la corrispondenza si dice BIUNIVOCA.

Allora posso “*identificare*”(*) i due insiemi. Pertanto:

La corrispondenza biunivoca tra due insiemi finiti permette di *identificare* i due insiemi.

E' evidente, infatti, che due insiemi sono in corrispondenza biunivoca se hanno lo stesso numero di elementi.

(*) N.B. Si rimanda agli anni successivi l'approfondimento con un linguaggio più appropriato in cui verranno specificati i casi in cui si esaurisce un insieme, l'altro o entrambi (iniettiva, suriettiva, o biiettiva). Nel nostro caso utilizziamo, seppur impropriamente, la parola “*identificare*” con “individuare gli elementi di A attraverso gli elementi di B”

Limitatamente agli insiemi finiti non c'è rischio di confusione.

Ampliamento all'infinito numerabile

Tra due insiemi finiti si può stabilire una corrispondenza biunivoca solo se hanno lo stesso numero di elementi.

Passiamo a considerare l'insieme di tutti i numeri che occorrono per contare (l'insieme N numerabile).

Si può intuire che questi sono infiniti, perché comunque fisso un numero posso sempre trovarne uno più grande.

Partendo dall'infinità di N consideriamo alcune sue parti (numeri pari, multipli di 4, multipli di 10...) che contengono ancora infiniti elementi e giochiamo a costruire delle corrispondenze biunivoche.

Si osserva che questi insiemi, pur essendo sottoinsiemi di N , contengono lo stesso numero di elementi di N .

Un insieme è infinito se posso stabilire una corrispondenza “*biunivoca*” tra esso stesso e una sua parte propria.

Corrispondenze tra insiemi infiniti

Consideriamo

$$N \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, \dots\}$$

$$N_p \equiv \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots, \dots\}$$

$$N_4 \equiv \{4, 8, 12, 16, 20, 24, \dots, \dots\}$$

$$N_{10} \equiv \{10, 20, 30, 40, 50, \dots, \dots\}$$

dove

- in N (Naturali) metteremo tutti i numeri che servono per contare,
- in N_p tutti i numeri pari,
- in N_4 i numeri multipli di 4,
- in N_{10} i numeri multipli di 10.

Corrispondenze tra insiemi infiniti

Proviamo a contare gli elementi dei quattro insiemi.

Il primo $\mathbb{N}$ ne contiene infiniti, perché per quanto grande possiamo pensare un numero, aggiungendo ad esso l'unità otteniamo un numero ancora più grande.

Consideriamo allora il secondo insieme, quello dei numeri pari, N_p e la moltiplicazione di 2 per 1, 2, 3 e così via...ottengo

$$2 \times 1 = 2$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 \times 3 = 6$$

.....

$$2 \times 20 = 40$$

.....

$$2 \times 100 = 200$$

.....

Abbiamo creato una corrispondenza UNIVOCA tra N e N_p che permette di associare ad ogni numero naturale il suo doppio:

$$1 \quad 2$$

$$2 \rightarrow 4$$

$$3 \rightarrow 6$$

$\rightarrow$

.....

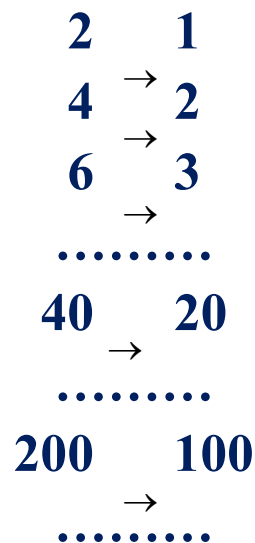
$$100 \quad 200$$

$\rightarrow$

.....

Corrispondenze tra insiemi infiniti

E se parto da N_p ? Posso associare a ogni numero pari la sua metà ottenendo una corrispondenza UNIVOCA di N_p in N :



Possiamo quindi dire che N ed N_p sono in corrispondenza BIUNIVOCA e quindi N e N_p hanno gli stessi elementi, perchè ad *ogni elemento di N corrisponde un solo elemento di N_p e viceversa, ad ogni elemento di N_p corrisponde un solo elemento di N .*

E se considero l'insieme N_4 ?

Allo stesso modo si può far costruire ai ragazzi la corrispondenza di N in N_4 che moltiplica ogni numero naturale per 4:

1	→	4
2	→	8
3	→	12
...	→	...
10	→	40
...	→	...
100	→	400
...	→	...

e la corrispondenza di N_4 in N che divide ogni numero di N_4 per quattro:

4	→	1
8	→	2
12	→	3
...	→	...
40	→	10
...	→	...
400	→	100
...	→	...

Infinito numerabile

Lo stesso si può fare considerando gli insiemi N e N_{10} e scegliendo come corrispondenza da N a N_{10} la moltiplicazione per 10:

Quindi sono infiniti come N anche gli insiemi costituiti dai multipli di 2, 3, 4,...

Inoltre, questi insiemi - sottoinsiemi propri di N - sono tutti in corrispondenza biunivoca con N , per cui contengono lo stesso numero di elementi di N .

Dall'infinito agli infinitesimi

È interessante anche avvicinare i ragazzi al concetto di infinitesimo, evidenziando la biunivocità tra l'insieme dei naturali

$$N \equiv \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

e il sottoinsieme dei numeri razionali $N_{1/n}$ formato dagli elementi $1/n$ al variare di N , attraverso la corrispondenza biunivoca che ad n associa $(1/n)$.

Dall'infinito agli infinitesimi

Questa corrispondenza permette di osservare:

- l'infinità delle frazioni del tipo $1/n$ che rappresentano numeri razionali compresi tra 0 (escluso) e 1;**
- la relazione che si ha tra un insieme i cui elementi crescono all'infinito (il denominatore $n \in \mathbb{N}$) e un insieme i cui elementi, da 1 come valore massimo, decrescono verso 0, senza mai diventare 0.**

Impossibilità della divisione per 0

Attraverso la naturale divisione tra i numeri razionali, osserviamo la relazione tra l'infinito e l'infinitesimo con l'impossibilità della divisione per zero:
fissato un numero naturale n - ad esempio $n = 6$ - eseguiamo le divisioni:

$$\begin{array}{rcl} 6 : 1 & = & 6 \\ 6 : 1/2 & = & 12 \\ & \dots\dots\dots & \\ 6 : 1/10 & = & 60 \\ & \dots\dots\dots & \\ 6 : 1/1000 & = & 6000 \\ & \dots\dots\dots & \\ 6 : 1/1000000 & = & 6\,000\,000 \\ & \dots\dots\dots & \end{array}$$

Si osserva immediatamente che, al crescere di n , l'elemento $1/n$ diventa sempre più piccolo e il quoziente diventa sempre più grande, per cui diciamo che il risultato della divisione tende all'infinito.

Ciò permette di introdurre l'impossibilità della divisione per zero indipendentemente dalle proprietà delle operazioni elementari.

Insiemi infiniti con la potenza del continuo

Caratterizzazione del concetto di continuità

Nell'insieme $\mathbb{N}$, comunque fissiamo $n \in \mathbb{N}$, possiamo stabilire il precedente $n-1$ e il successivo $n+1$.

Nell'insieme $\mathbb{R}$ ciò non è possibile: tale questione (continuità), che sarà affrontata con i primi elementi dello studio dell'analisi matematica, conduce alla determinazione di insiemi che sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ (potenza del numerabile) e insiemi che sono in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ (potenza del continuo).

Con la costruzione dei numeri reali effettuata verso la fine del secolo scorso (1872) da Georg Cantor, si è data una caratterizzazione rigorosa al problema.

L'impossibilità di stabilire il precedente o il successivo di un elemento è caratteristica anche dell'insieme dei punti della retta. Tale analogia è alla base della costruzione della Geometria analitica.

La Geometria Analitica permette di tradurre un problema algebrico in un problema geometrico e viceversa.

La sua origine si fa risalire (impropriamente) a Cartesio [1], il quale aveva elevato critiche ai matematici greci per non aver saputo indicare una via generale per l'impostazione dei problemi di geometria: infatti, i greci risolvevano i problemi analizzandoli caso per caso e, molte volte, solo per tentativi.

Scuola Primaria (quinto anno)

Obiettivi di apprendimento al termine del quinto anno della scuola primaria - *Numeri*:

- Proprietà elementari degli interi.
- I numeri decimali, le frazioni. Confronto tra frazioni: Vedi Scheda SICSI e TFA.
- La rappresentazione dei numeri sulla retta. Dedicare tempo per le esercitazioni individuali.

Scuola Primaria (quinto anno)

Obiettivi di apprendimento al termine del quinto anno della scuola primaria – *spazio e figure*:

- La forma degli oggetti ed un primo cenno al *fusionismo*.
- Far disegnare per rappresentare oggetti tridimensionali nello spazio.
- L'ombra della finestra sul pavimento: l'*omologia* come primo approccio di un bambino alla visualizzazione geometrica.

Scuola Primaria (quinto anno)

Obiettivi di apprendimento al termine del quinto anno della scuola primaria – *Relazioni , dati e previsioni:*

Vedi i grafici su power-point *Probabilità e Statistica.*

Vedi power-point: *Geometria e calcio*

Scuola Secondaria di primo grado

Obiettivi di apprendimento al termine della terza classe della scuola secondaria di primo grado

Numeri: Interrelazioni col piano cartesiano.

- Il piano cartesiano. Rappresentazione dei numeri sulla retta.

I numeri razionali:

- Le frazioni equivalenti rappresentano lo stesso punto sulla retta.
- Le coppie di numeri interi costituiti dal numeratore e dal denominatore di frazioni equivalenti sono situati sulla stessa retta per l'origine del riferimento cartesiano nel piano.

Scuola Secondaria di primo grado

Obiettivi di apprendimento al termine della terza classe della scuola secondaria di primo grado.

Per i temi:

- **Spazi e Figure** (Geometria)
- **Relazioni e funzioni** (Logica)
- **Dati e previsioni** (Probabilità e Statistica)

Vedi power-point specifici.

La Matematica nella Scuola Secondaria di primo grado: aspetti didattici e sociologici

Numeri (ex Aritmetica e Algebra)

Acquisire sicurezza nella comprensione delle tematiche proposte dal docente è un problema sociale?

La ripetizione di argomenti precedentemente studiati aiuta ad acquisire questa sicurezza?

- *Insegnamento per problemi.*
- *Ripetizione dell'algoritmo della divisione.*
- *Rappresentazione di numeri in base diversa da 10.*
- *Costruzione di espressioni in parentesi al fine di comprendere le proprietà degli insiemi numerici.*
- *Introduzione ai polinomi (espressioni con le lettere).*

L'utilizzo della calcolatrice da parte degli studenti del primo ciclo è dannoso alla formazione ed all'acquisizione di capacità di costruire e ricordare semplici algoritmi?

Problema

Rappresentare il numero 2547 nei sistemi di numerazione in base 10, in base 7, in base 4.

Rappresentazione in base 10:

$$\begin{aligned} 2547 &= 2000 + 500 + 40 + 7 = \\ &= 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 2548 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1 = \end{aligned}$$

$$2547 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Osservazione importante per le proprietà delle operazioni elementari.

Dalle slides che seguono, si può osservare il processo inverso a quello che si insegna nella risoluzione mnemonica delle espressioni dove diciamo: <eliminare le parentesi>.

Nel processo che segue, si vede come siamo costretti ad inserire successive parentesi (tonde, quadre,...) perché utilizziamo le proprietà delle operazioni, in particolare la proprietà associativa, dissociativa, distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione.

Questo processo lo ritengo importantissimo perché introduce le proprietà senza le macchinose definizioni da imparare a memoria. Tali definizioni si evincono.

In base 7. Effettuiamo la divisione $2547 : 7$ ed operiamo dividendo ancora il quoziente ottenuto per 7 e, di seguito in successione. Si ha:

$$2547 : \underline{7} =$$

$$2547 = 363 \cdot 7 + 6$$

$$44 \quad 363$$

$$27$$

$$363 : \underline{7} =$$

$$6$$

$$13 \quad 51$$

$$6$$

$$2547 = 363 \cdot 7 + 6 = (51 \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 6 = (51 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7) + 6$$

$$51 : \underline{7} =$$

$$2547 = (51 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7) + 6 = [(7^2 + 2) \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1] + 6$$

$$2 \quad 7$$

$$2547 = 363 \cdot 7 + 6 = (51 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7) + 6 = [(7^2 + 2) \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1] + 6 =$$

$$\mathbf{2547 = 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0.}$$

Base 4. Effettuiamo la divisione $2547 : 4$ ed operiamo dividendo ancora il quoziente ottenuto per 4 e, di seguito in successione.

$$2547 : \underline{4} = \quad \quad 2547 = 636 \cdot 4 + 3$$

$$14 \quad 636 \quad 636 : \underline{4} =$$

$$27 \quad 23 \quad 159$$

$$3 \quad 36$$

$$0 \quad 2547 = 636 \cdot 4 + 3 = (159 \cdot 4^2) + 3$$

$$159 : \underline{4} =$$

$$39 \quad 39 \quad 2547 = 636 \cdot 4 + 3 = [(39 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2)] + 3$$

$$3 \quad 39 : \underline{4} =$$

$$3 \quad 9$$

$$2547 = 636 \cdot 4 + 3 = (159 \cdot 4^2) + 3 = [(39 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2)] + 3 =$$

$$\mathbf{2547 = 9 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0.}$$

$$2547 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$2547 = 1 \cdot 7^4 + 0 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0$$

$$2547 = 9 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0$$

- Osserviamo che, a seconda della base del sistema di numerazione utilizzato, il numero 2547 si esprime con coefficienti diversi; precisamente, il numero è stato scritto come combinazione delle potenze della base del sistema di numerazione.
- Ampliando questo discorso all'insieme $\mathbf{N}$, introdurremo i polinomi su $\mathbf{N}$; ampliando all'insieme $\mathbf{R}$, possiamo costruire l'anello dei polinomi su $\mathbf{R}$, indicando con x (per ogni x appartenente ad $\mathbf{R}$) la base di un ipotetico sistema di numerazione.

Così di seguito, si ricava il numero 2547 in funzione di qualsiasi cifra che rappresenta la base del sistema di numerazione.

E' evidente che tale procedimento si può applicare a qualsiasi numero $k \in \mathbb{N}$, che si può esprimere nel seguente modo:

$$k = a_0 n^h + a_1 n^{h-1} + \dots a_{h-1} n^1 + a_h n^0 \quad (*)$$

dove la variabile n è la base del sistema di numerazione che stiamo utilizzando ed i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{h-1}, a_h$ sono interi.

L'espressione (*) è detta "*forma polinomiale dell'intero n* " che, poichè dipende dalla variabile x (base del sistema di numerazione), l'indichiamo con:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_{n-1} x^1 + a_n x^0$$

Impossibilità della divisione per 0

Relazione tra l'infinito e l'infinitesimo con l'impossibilità della divisione per zero:

fissato un numero naturale n - ad esempio $n = 6$ - eseguiamo le divisioni:

$$6 : 1 = 6$$

$$6 : 1/2 = 12$$

.....

$$6 : 1/10 = 60$$

.....

$$6 : 1/1000 = 6000$$

.....

$$6 : 1/1000000 = 6\,000\,000$$

.....

Si osserva che, al crescere di n , l'elemento $1/n$ diventa sempre più piccolo e il quoziente diventa sempre più grande, per cui diciamo che il risultato della divisione tende all'infinito.

La Matematica nel 1° Ciclo: aspetti didattici e interdisciplinari

Programma del 1979

Programma ministeriale di scienze matematiche, chimiche,
fisiche e naturali

Indicazioni per la matematica (presenti anche nelle attuali)

Con l'**Educazione tecnica**, la matematica può integrarsi sia fornendo mezzi di calcolo e di rappresentazione per la fase progettuale, sia ricevendone ausilio per la propria attività.

Analogamente, possono essere trovati momenti di incontro della matematica con la **geografia** (metodo delle coordinate, geometria della sfera...), con l'**Educazione artistica** (prospettiva, simmetrie...) ecc.

Programma del 1979

Elementi da aggiungere ai programmi degli anni precedenti (1940 – 1962).

- Matematica del certo e matematica del probabile.

Rilevamenti statistici e loro rappresentazione grafica (istogrammi, aerogrammi...); frequenza; medie.

Avvenimenti casuali; nozioni di probabilità e sue applicazioni.

- Uso del metodo delle coordinate in situazioni concrete; lettura di carte topografiche e geografiche.

- Coordinata di un punto sulla retta; coordinate di un punto nel piano.

- Semplici leggi matematiche ricavate anche dal mondo fisico, economico, ecc. e loro rappresentazione nel piano cartesiano.

Programma del 1979

Elementi da aggiungere ai programmi degli anni precedenti (1940 – 1962).

Trasformazioni geometriche

Isometrie (o congruenze) piane - traslazioni, rotazioni, simmetrie - a partire da esperienze fisiche (movimenti rigidi). Composizioni di isometrie. Figure piane direttamente o inversamente congruenti.

Similitudini piane, in particolare omotetie, a partire da ingrandimenti e impiccolimenti. Riduzioni in scala.

Osservazione di altre trasformazioni geometriche: *ombre prodotte da raggi solari o da altre sorgenti luminose*, rappresentazioni prospettiche (fotografie, pittura ecc.), immagini deformate,...

Geometria

Aspetti interdisciplinari con Scienze, Tecnologia (ex Applicazioni Tecniche, Arte (ex Disegno)

1. Rappresentazioni nel piano cartesiano:

- lineare (la retta);
- quadratica (la parabola).

2. Fusionismo tra geometria nello spazio e geometria nel piano (aspetti dinamici con applicazioni alle forze):

- Ombra di una finestra sul pavimento: l'omologia
- Movimenti nel piano rappresentati da vettori nello spazio: le rotazioni.

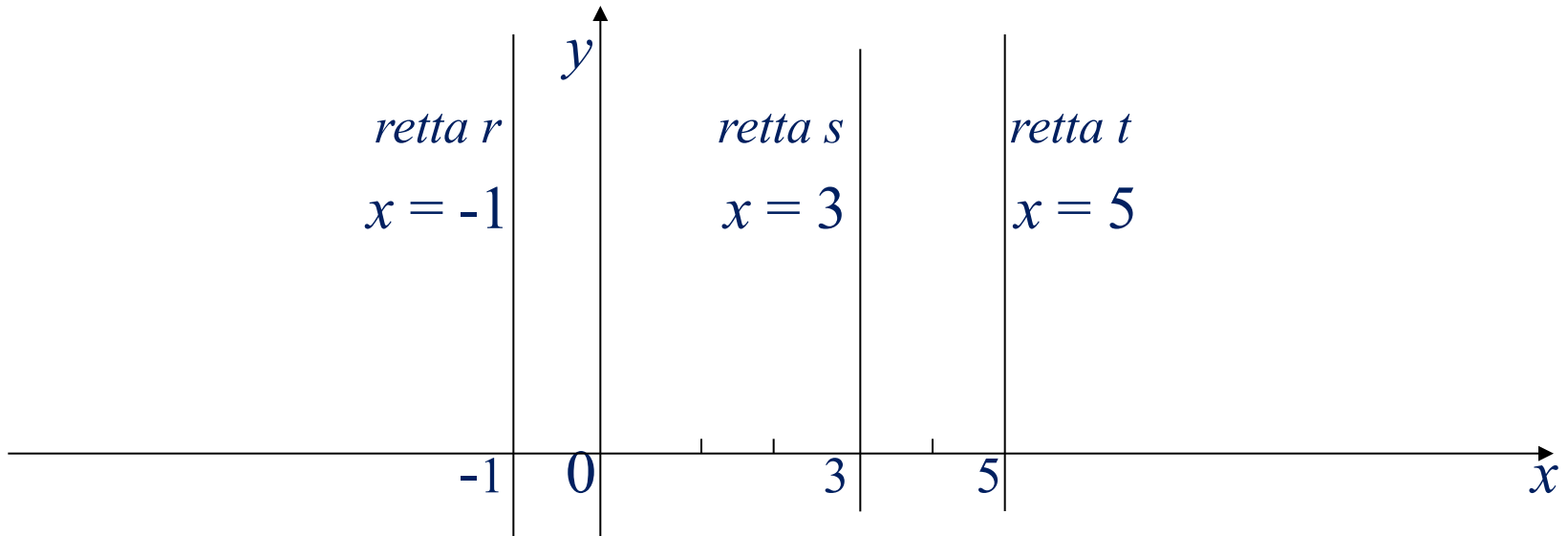
Problema 1

Rappresentare e congiungere, nel piano cartesiano, cinque punti che hanno ascissa uguale a 3. Qual è la caratteristica di questi punti?

Ripetere la rappresentazione:

- con cinque punti con ascissa uguale a -1;
- con cinque punti con ascissa uguale a 5.

Hai ottenuto tre rette. Si incontrano in qualche punto queste tre rette?



Parallelismo: relazione di equivalenza

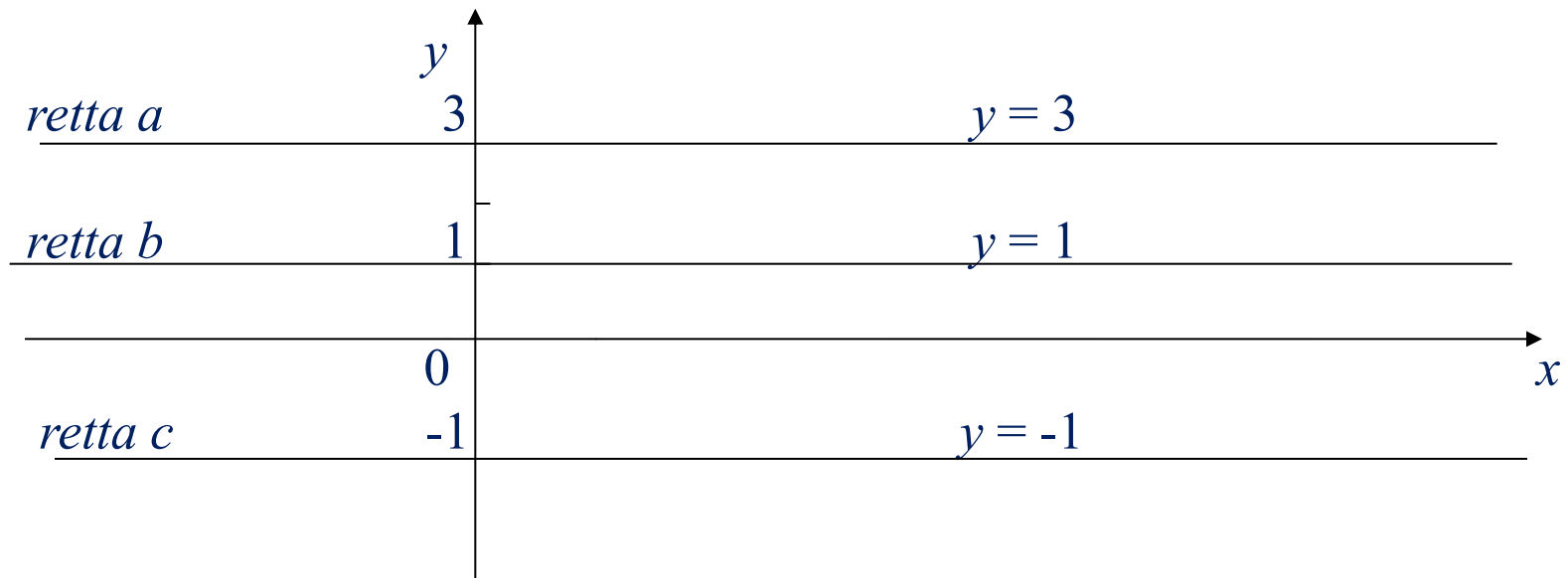
Problema 2

Rappresentare e congiungere, nel piano cartesiano, cinque punti che hanno ordinata uguale a 3. Qual è la caratteristica di questi punti?

Ripetere la rappresentazione:

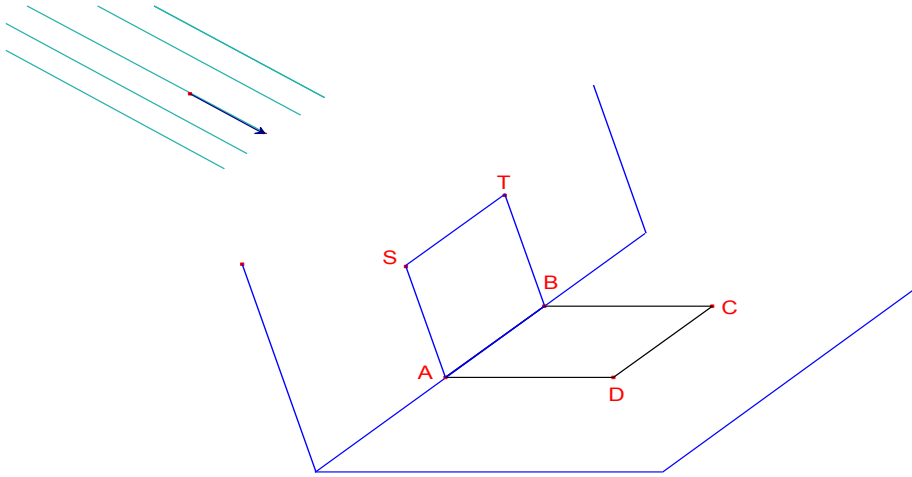
- con cinque punti con ordinata uguale a -1;
- con cinque punti con ordinata uguale a 1.

Hai ottenuto tre rette. Si incontrano in qualche punto queste tre rette?

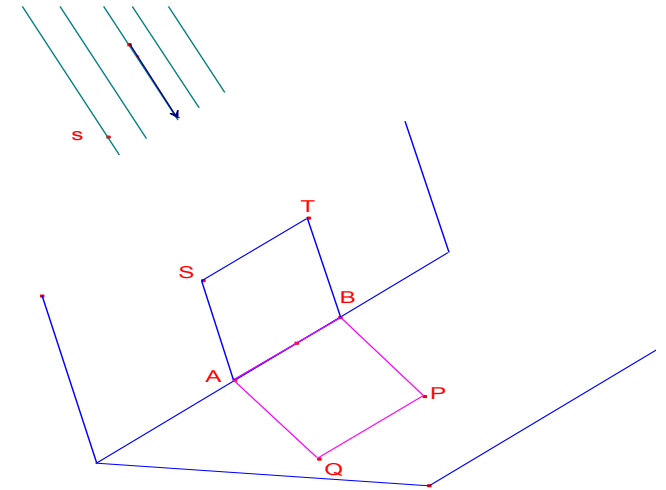


Parallelismo: relazione di equivalenza

L'OMOLOGIA: composizione di due prospettività

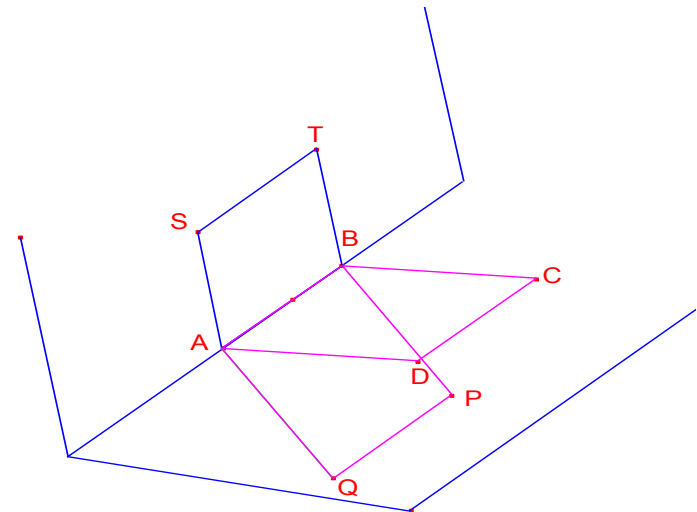


Proiezione della finestra sul
pavimento la mattina



Proiezione della finestra sul
pavimento alcune ore dopo

Sovrapposizione delle proiezioni: la
trasformazione sul piano del
pavimento, che muta ABCD in ABPQ,
è l'omologia



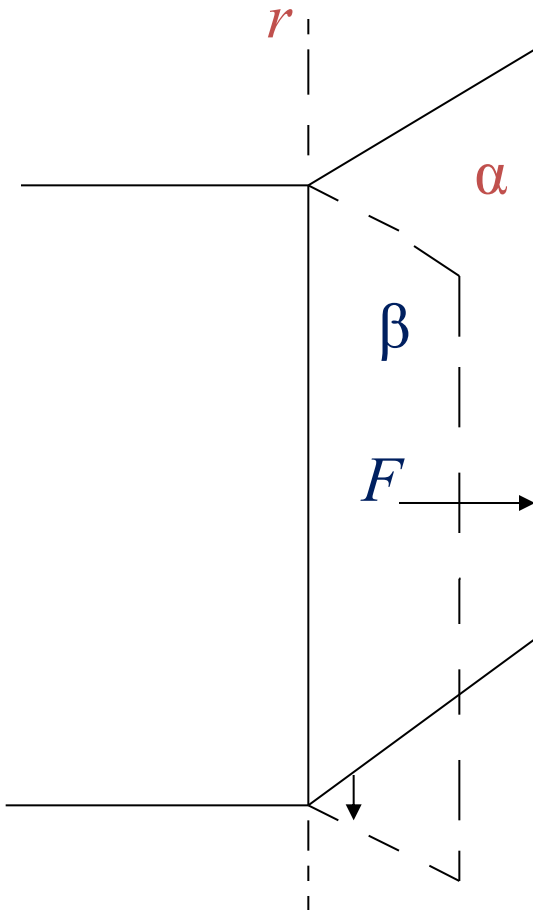
I vettori nella rotazione

Problema

Si applichi una forza F , parallela al piano orizzontale, in un punto del piano α in modo da far ruotare il piano α intorno alla retta r fino a sovrapporsi al piano β .
C'è una retta nello spazio che non cambia la propria direzione?

Le rette parallele alla retta r restano ancora parallele ad r ?

Osservazione. Una rotazione nel piano è individuata da una retta che non appartiene al piano, ma è perpendicolare ad esso.



piano terra orizzontale (pavimento)

Calcolo delle Probabilità e Statistica

Probabilità:

- *Classica* (dado e moneta) $\Leftrightarrow$ evento equiprobabili.
- *Frequentista* (lancio di moneta più volte). Attività:
Ogni alunno lancia il dado (o la moneta) 5 volte. Verifica e confronto dei risultati [(0-5), (5,0), 1-4), (4-1), (2,3), (3-2)].
Ripetizione dell'esperimento con 20 lanci, con 50 lanci, ecc. Verifica e confronto dei risultati.
- *Soggettiva* (1, x, 2) a seconda della forza della squadra. Verifiche con i risultati del campionato di calcio.

Statistica

- Matematica del certo e matematica del probabile.
- Rilevamenti statistici e loro rappresentazione grafica (istogrammi, aerogrammi...); frequenza; medie.
- Presentazione di grafici elementari.

Costruzione di semplici grafici relativi a problemi naturali

- 1) Con un campione di mille studenti, costruire un istogramma che presenta
 - sull'asse delle ascisse le seguenti fasce di altezza (in centimetri):
<150 150-160 160-170 170-180 180-190 190-200 >200;
 - sull'asse delle ordinate, il numero di studenti per ogni fascia.

Si vede immediatamente che la fascia centrale presenta i valori massimi, mentre gli studenti di altezza inferiore a 150 cm e gli studenti di altezza superiore a 200 centimetri presentano i valori più bassi.

- 2) Costruire l'istogramma che presenta sull'asse delle ascisse i mesi dell'anno e sulle ordinate la misura della fascia oraria compresa tra l'alba e il tramonto.

Orientativamente, si hanno i seguenti dati:

gennaio e dicembre: 8.00 → 17.00 - giugno-luglio: 5.00 → 21.00.

*I valori massimi sono concentrati nei mesi centrali, **giugno-luglio**, i valori minimi agli estremi rappresentati dai mesi di **gennaio e dicembre**.*

- 3) Disegnare un vulcano ed indicare sulla figura i punti in cui si sviluppa la massima energia.

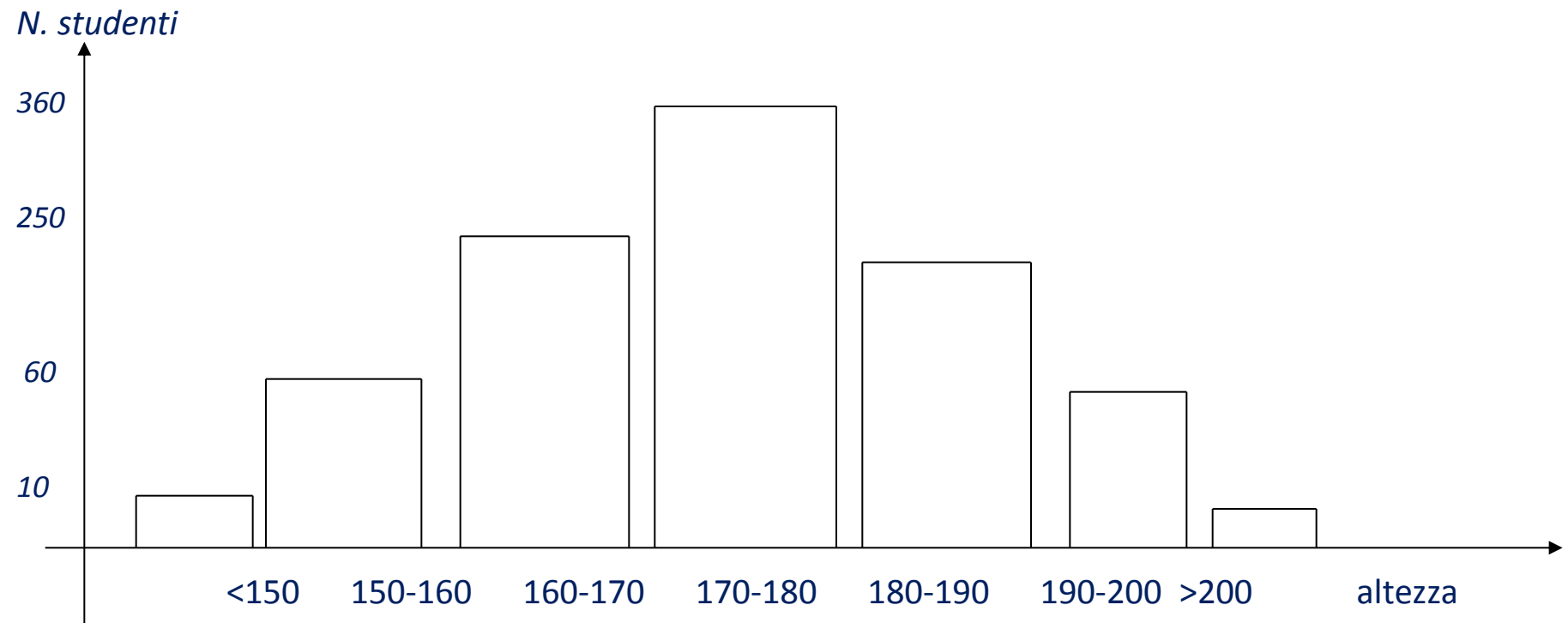
*E' evidente che la figura del vulcano ha l'andamento della curva di Gauss; è interessante far notare agli allievi come i valori di massima energia si hanno nella parte centrale in cui è concentrata una massa maggiore, coerentemente al principio di equivalenza **massa-energia**.*

Distribuzione degli studenti in base all'altezza

(campione di 1000 studenti di età superiore ai 18 anni)

- 1) Con un campione di mille studenti, costruire un istogramma che presenta
- sull'asse delle ascisse le seguenti fasce di altezza (in centimetri):
<150 150-160 160-170 170-180 180-190 190-200 >200;
 - sull'asse delle ordinate, il numero di studenti per ogni fascia.

Si vede immediatamente che la fascia centrale presenta i valori massimi, mentre gli studenti di altezza inferiore a 150 cm e gli studenti di altezza superiore a 200 centimetri presentano i valori più bassi.



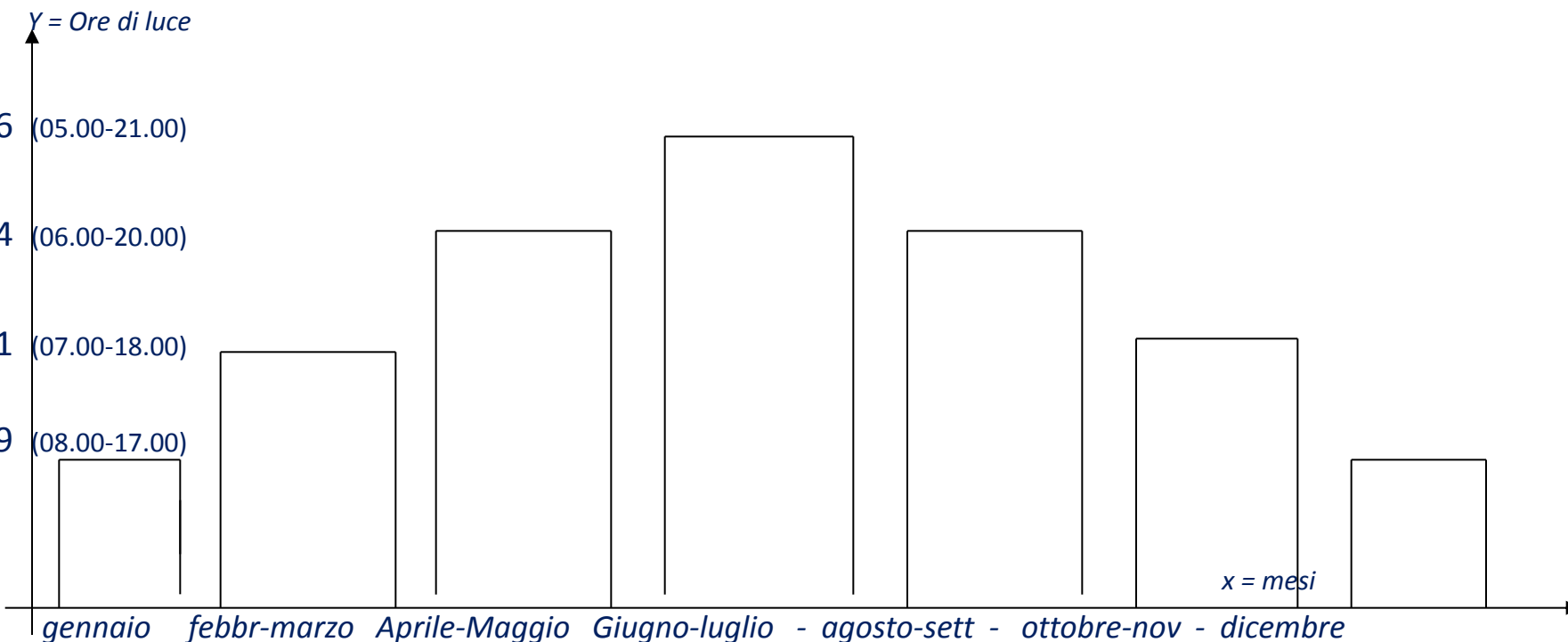
Distribuzione delle ore di luce durante la giornata

Costruire l'istogramma che presenta sull'asse delle ascisse i mesi dell'anno e sulle ordinate la misura della fascia oraria compresa tra l'alba e il tramonto.

Orientativamente, si hanno i seguenti dati:

gennaio e dicembre: 8.00 → 17.00 - giugno-luglio: 5.00 → 21.00.

*I valori massimi sono concentrati nei mesi centrali, **giugno-luglio**, i valori minimi agli estremi rappresentati dai mesi di **gennaio e dicembre**.*



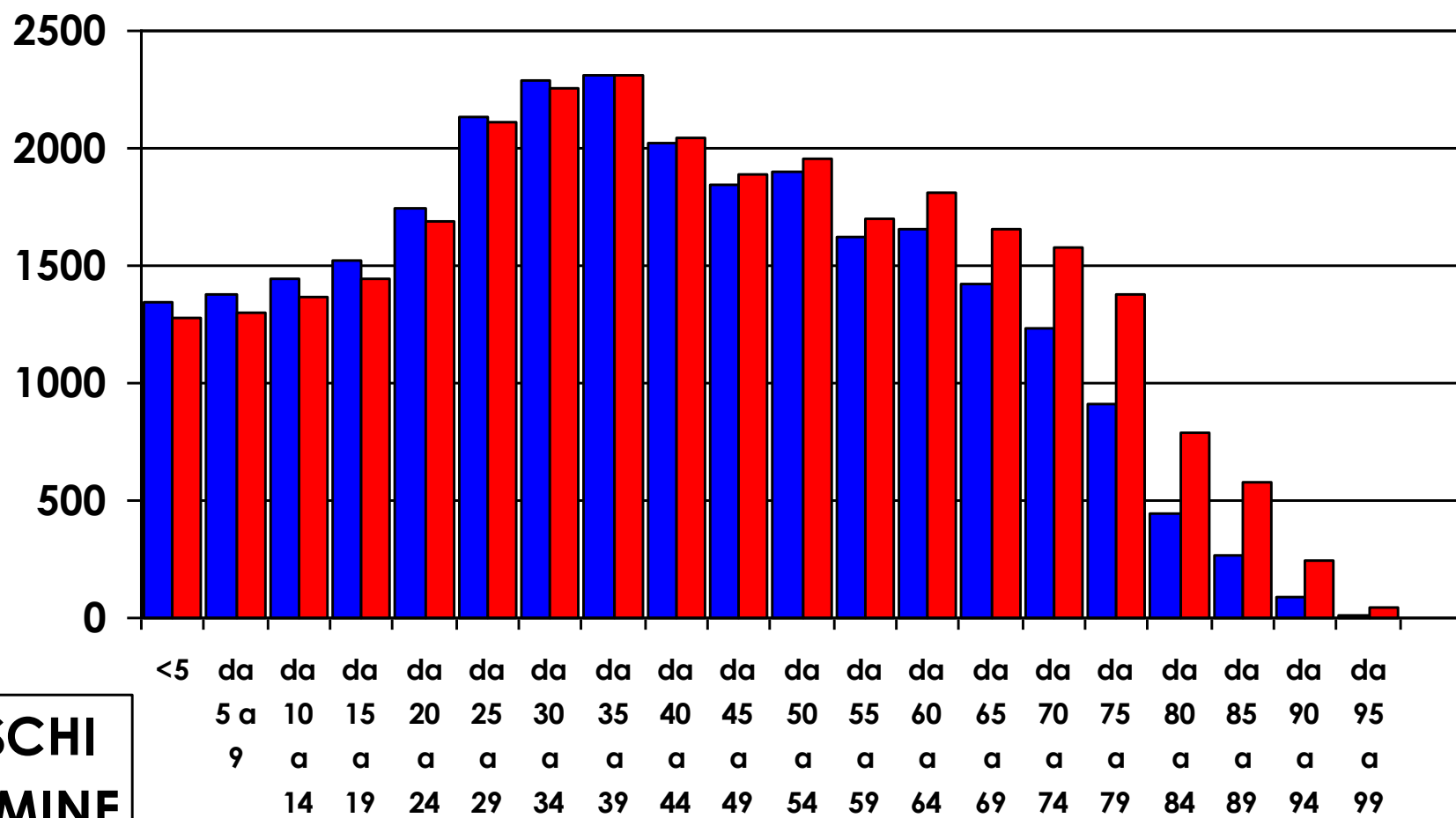
Costruzione di semplici grafici relativi a problemi naturali

3) Disegnare un vulcano ed indicare sulla figura i punti in cui si sviluppa la massima energia.

E' evidente che la figura del vulcano ha l'andamento della curva di Gauss; è interessante far notare agli studenti come i valori di massima energia si hanno nella parte centrale in cui è concentrata una massa maggiore, coerentemente al principio di equivalenza massa-energia.



Distribuzione popolazione residente in Italia per sesso e classi di età - Censimento 2001 (campione di 50000)



Bibliografia

F. Casolaro (con L. Paladino): *"Analisi sociale e rigore scientifico: Scelta di equilibrio per l'ottimizzazione dei risultati nell'insegnamento della Matematica"* Atti del Convegno Nazionale *"Logica, linguaggio e didattica della matematica 2010"*. Dipartimento di Matematica Informatica, della Università Degli Studi di Salerno. 24-27 novembre 2010 pag. 67-82.

F. Casolaro (con L. Paladino): *"Evolution of the geometry through the Arts"* - 11th *International Conference APLIMAT 2012* - in the Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Technology in Bratislava, 7-9 febbraio 2012, pag. 481-490.

F. Casolaro (con L. Paladino): *"Didactics of Statistics in Sociology"* - *"First International Conference on Recent Trends in Social Sciences: Qualitative Theories and Quantitative Models (RTSS)"* - Iași , 23-25 September, 2012

Atti della Scuola Estiva che si è tenuta a Terni nel periodo 26-30 luglio 2011. *"La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica"* - Editore 2C Contact

F. Casolaro: Glossario-Syllabus di Geometria. Appendice al volume degli Atti della Scuola Estiva di Terni, 26-30 luglio 2011 - “*La Matematica per la Scuola di 2° secondo grado: un contributo per il docente di Matematica*”. Ed. 2C Contact, pag. 167-194.

F. Casolaro: “*Il Programma di Erlangen e le Trasformazioni geometriche*”. Pag. 101-103.

F. Casolaro: “*La geometria proiettiva: Omografie*”. Pag. 104-118.

F. Casolaro: “*La geometria analitica: cenni storici e funzione didattica*”. Pag. 91-100

F. Casolaro: “Il gruppo delle Affinità”. Pag. 220-225.

F. Casolaro: “Il gruppo delle Similitudini”. Pag. 226-230.

F. Casolaro: “Il gruppo delle Isometrie”. Pag. 231-239.

A. Giambò – R. Giambò: “Matematica per la Scuola superiore”, vol. 1-2, Ed. Armando Scuola