

Convegno/Corso di Formazione

Rimini, 20-22 aprile 2018

L'attualità degli insegnamenti dei grandi Maestri della Mathesis nella seconda metà del secolo XX

Ferdinando Casolaro

ferdinando.casolaro@unina.it

*Dall'insegnamento di Bruno Rizzi: Quale
Geometria per lo spazio fisico?*

Sala Congressi, Hotel Ambasciatori - Rimini

“ A me la cosa peggiore in una scuola sembra l’uso di metodi basati sulla paura,sulla forza e sull’autorità artificiosa.

Un tale trattamento

- DISTRUGGE I SENTIMENTI SANI, LA SINCERITA’ E LA FIDUCIA IN SE STESSO DELL’ALLIEVO.
- PRODUCE SOGGETTI SOTTOMESSI.

E’ relativamente semplice tenere la scuola lontano da questo gravissimo male.

Date all’insegnante il minor numero di mezzi coercitivi, così che l’unica fonte di rispetto da parte dell’allievo sia costituita dalle qualità umane ed intellettuali dell’insegnante stesso”

ALBERT EINSTEIN

“L’EVOLUZIONE DELLA MATEMATICA ATTRAVERSO QUATTRO CONGETTURE FONDAMENTALI SULL’OSSERVAZIONE DEL MONDO FISICO”

1. Prima congettura relativa alla geometria:
L’universo non è piatto, è curvo (VIII-VII sec. a.C)

2. Seconda congettura relativa alla geometria:
"la luce si propaga in linea retta" (III sec. a.C).

3. Dalle congetture di Galileo al concetto di funzione:
“La formalizzazione matematica dei fenomeni fisici”

4. La congettura nell’incertezza:
*la funzione del “calcolo delle probabilità” nell’analisi di
fenomeni reali*

Quale Geometria per lo spazio fisico? (*)

Con le Indicazioni nazionali per i licei e le Linee guida per gli Istituti tecnici, dal 2010 (2012?) si richiede di insegnare quegli elementi della Fisica sviluppatasi principalmente nella prima metà del XX secolo, quali Teoria della Relatività, Fisica Quantistica, Ottica moderna.

La Geometria su cui poggia la Fisica classica è essenzialmente quella euclidea.

Attraverso la Geometria euclidea il docente rappresenta analiticamente e graficamente i fenomeni fisici.

Per uno studio corretto della Teoria della Relatività Generale si deve conoscere la Geometria su cui essa si fonda.

(*) <www.aifnapoli2.it> cliccando sulla destra <Relazioni tra Fisica e Matematica> e in basso: <Ferdinando Casolaro> → <Geometria e Relatività>.

Algebra lineare e geometria - Indicazioni

Primo biennio

Lo studente apprenderà gli elementi dell'algebra dei vettori (somma, moltiplicazione per scalare e prodotto scalare), e ne comprenderà il ruolo fondamentale nella fisica.

Secondo biennio

Studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale. Approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica.

- Algebra vettoriale ed operazioni tra vettori.
- Prodotto scalare. Prodotto vettoriale.
- Dipendenza lineare.
- Calcolo matriciale e determinante di una matrice.
- Equazione della retta, equazione del piano.

Proprietà dello Spazio vettoriale

Si dice che la struttura (S,R) è uno **spazio vettoriale** sul campo R [in generale, *una struttura (V,K) , con K campo reale o complesso*] se in S è definita un'operazione binaria interna (nel nostro caso l'ordinaria addizione $+$) per la quale $(S,+)$ è un **gruppo commutativo** ed una legge di composizione esterna (nel nostro caso l'ordinaria moltiplicazione di un vettore per un numero reale), detta **moltiplicazione per uno scalare**, per la quale valgono le seguenti proprietà:

1) Associativa rispetto al prodotto esterno:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall v \in S \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) v$$

2) Esiste l'elemento neutro 1 rispetto al prodotto esterno:

$$\forall v \in S \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot v = v$$

3) Distributiva del prodotto esterno rispetto all'addizione di vettori:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall u, v \in S \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$$

4) Distributiva del prodotto esterno rispetto all'addizione di scalari:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall v \in S \quad \Rightarrow \quad (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$$

Definizione di vettore e concetto di iperpiano

In matematica, un *vettore* è definito come classe di equivalenza di segmenti equipollenti

L'equipollenza tra segmenti è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza $[v]$ di segmenti equipollenti prende il nome di vettore.

In Fisica, una grandezza si può definire come vettore quando:

- 1) *vale la legge del parallelogramma;*
- 2) *è invariante rispetto ai sistemi di riferimento per traslazione.*

Un iperpiano di uno spazio S_n è un suo sottospazio ad $n-1$ dimensioni: la retta è iperpiano di S_2 ; il piano, individuato come S_2 , è iperpiano di S_3 .

IMPORTANTE: Riferimento a fasci di rette come direzioni del piano e fasci di piano come giacitura dello spazio S_3 .

CONCETTI ESSENZIALI

- Iperpiano – Prodotto scalare
- Equazione della retta, equazione del piano
 - Dipendenza lineare
- Calcolo matriciale e determinante di una matrice

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}; \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \vartheta =$$

$$(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j})$$

da cui:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \vartheta = a_x b_x + a_y b_y$$

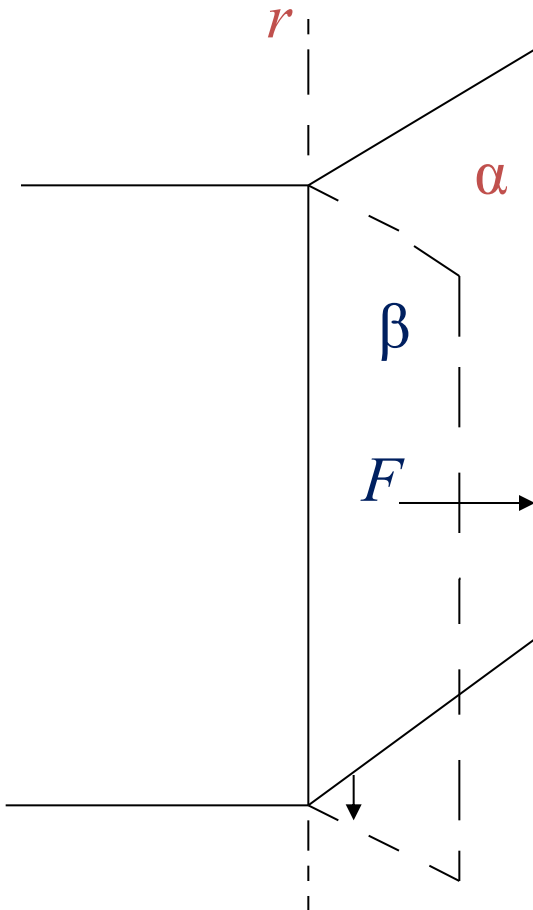
I vettori nella rotazione

Problema

Si applichi una forza F , parallela al piano orizzontale, in un punto del piano α in modo da far ruotare il piano α intorno alla retta r fino a sovrapporsi al piano β .
C'è una retta nello spazio che non cambia la propria direzione?

Le rette parallele alla retta r restano ancora parallele ad r ?

Osservazione. Una rotazione nel piano è individuata da una retta che non appartiene al piano, ma è perpendicolare ad esso.



piano terra orizzontale (pavimento)

Dipendenza lineare tra vettori nel piano e determinante della matrice con le componenti dei vettori.

Due vettori del piano sono linearmente dipendenti se hanno la stessa direzione

Se $\mathbf{u}$ è un vettore non nullo del piano π , ogni altro vettore $\mathbf{v}$ di π , avente la stessa direzione di $\mathbf{u}$, si può esprimere come prodotto del vettore $\mathbf{u}$ per un numero reale α :

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{u}$$

da cui:

$$\alpha \mathbf{u} + (-1) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

cioè:

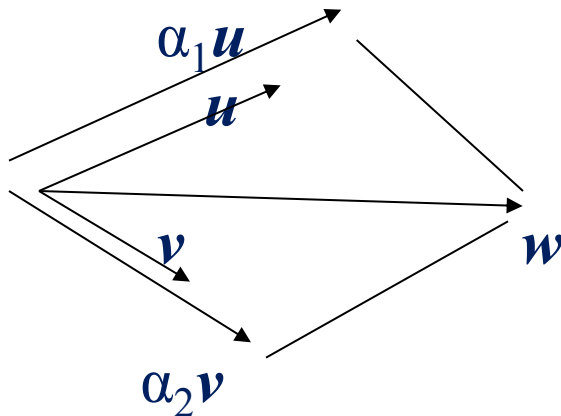
se due vettori sono linearmente dipendenti, esiste una combinazione lineare di essi con scalari non nulli che dà il vettore nullo".

Dipendenza lineare tra vettori nello spazio S_3

Tre vettori u , v , w dello spazio si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa giacitura, cioè se esiste un piano che contiene i segmenti orientati che li rappresentano.

La giacitura individuata da due vettori u e v non paralleli definisce, tutti e soli i vettori linearmente dipendenti dal sistema $\{u, v\}$.

Infatti, se u e v sono due vettori non paralleli e non nulli del piano, un qualsiasi vettore w , appartenente al piano individuato da u e v , si può decomporre lungo le direzioni di essi, cioè, si può esprimere come somma di due vettori $\alpha_1 u$ ed $\alpha_2 v$, linearmente dipendenti da u e da v .



$$\begin{aligned} w &= \alpha_1 u + \alpha_2 v \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 u + \alpha_2 v + (-1)w &= 0 \end{aligned}$$

Ampliamento della geometria euclidea alla geometria affine con l'introduzione dei vettori

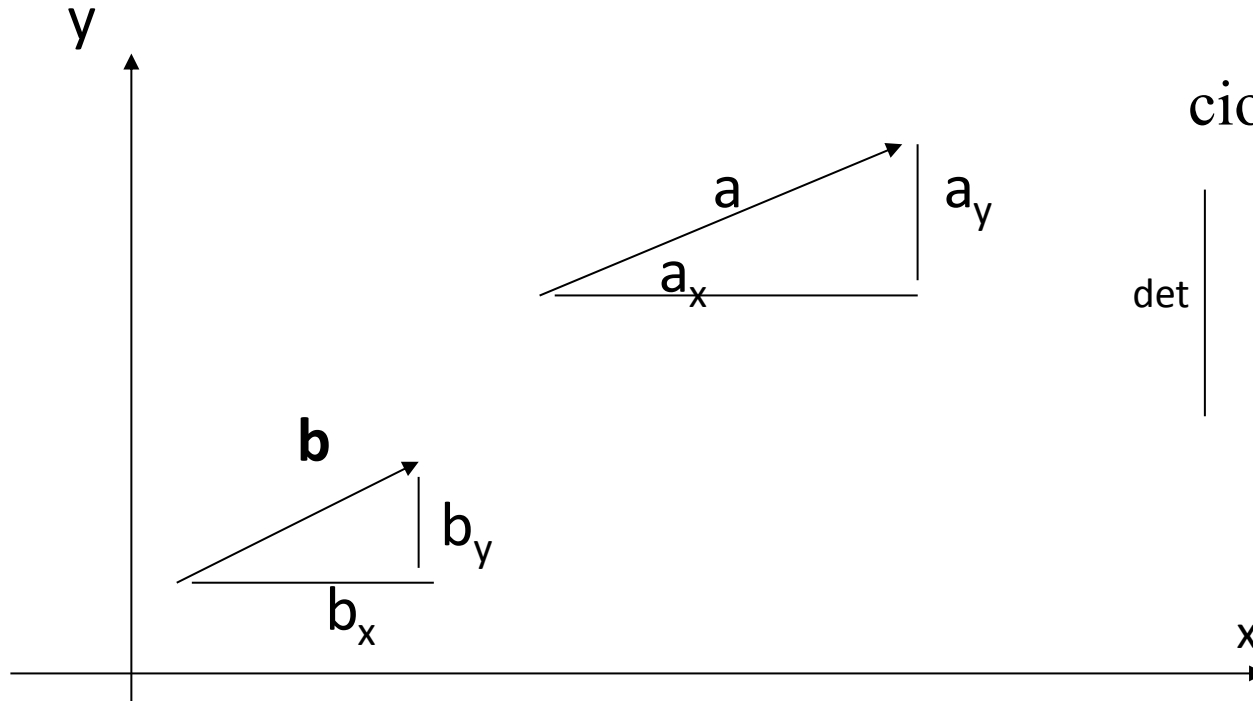
Esempio: Due vettori del piano sono linearmente dipendenti se hanno la stessa direzione; in tal caso, dalla rappresentazione cartesiana delle componenti, si deduce che: “la matrice costituita dalle componenti dei vettori ha determinante nullo”:

$$a_x : b_x = a_y : b_y$$

$$a_x b_y - a_y b_x = 0$$

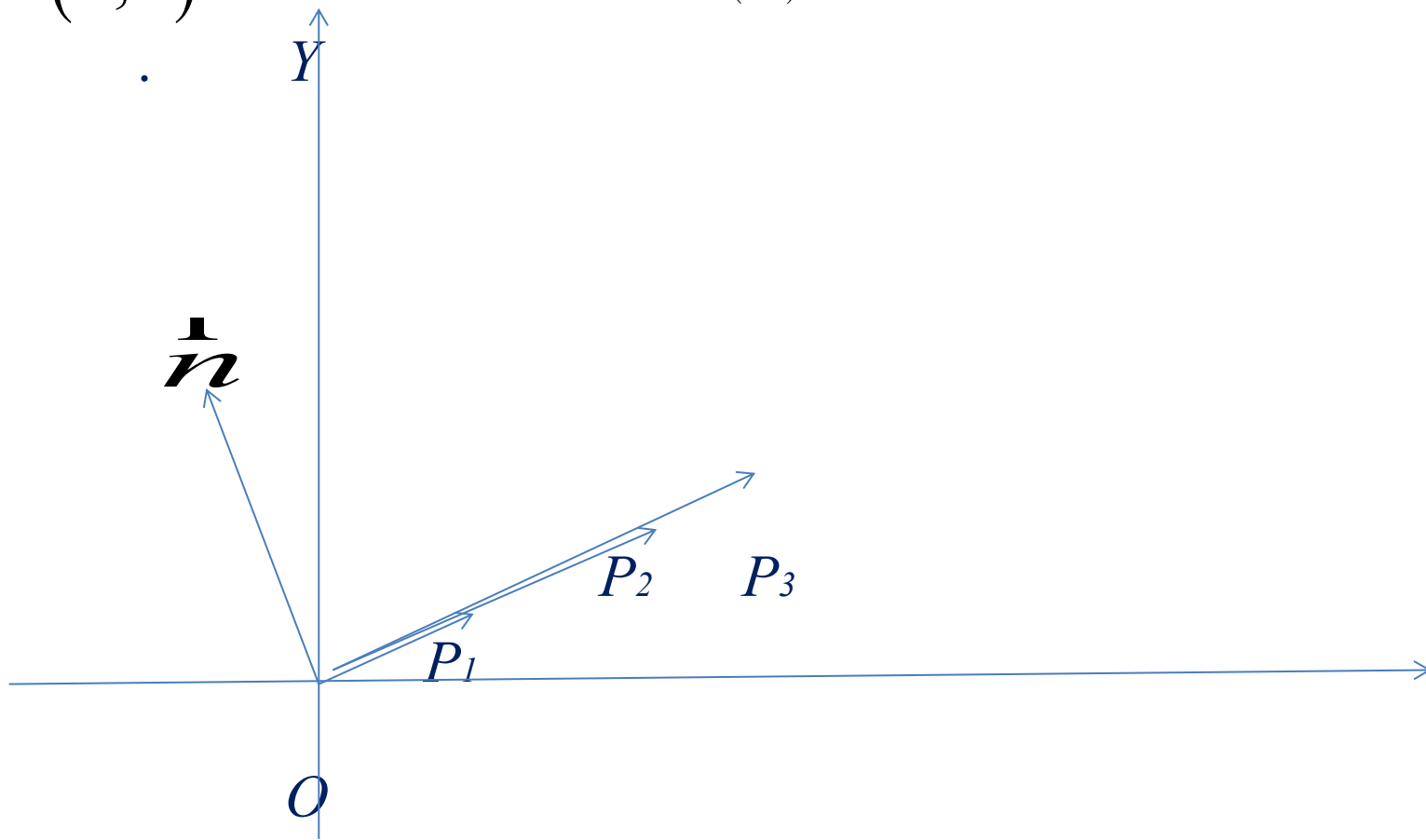
cioè:

$$\det \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = 0$$



Sia $\vec{n}(a,b)$ un vettore del piano applicato nell'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy .

Determinare il luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ del piano tale che il vettore individuato dal segmento orientato $\vec{OP}(x, y)$ sia perpendicolare ad $\vec{n}(a,b)$.



Equazione della retta in S_2

In un riferimento cartesiano del piano, sia $P(x, y)$ un punto diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato OP identifichi il vettore che ha per componenti rispettivamente le coordinate x ed y di P .

Se $\vec{h}(a, b)$ è un vettore ortogonale ad $OP(x, y)$, per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{h} \times OP = 0, \text{ cioè: } ax + by = 0$$

La (4.4), equazione della retta OP , individua, dunque, il luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ del piano tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore $\vec{h}(a, b)$.

Se “curvassi” questa retta, otterrei un arco, ed il vettore perpendicolare in ogni punto alla retta tangente all'arco, non avrebbe più direzione costante, e quindi le componenti a e b del vettore $\vec{h}(a, b)$ risulterebbero funzioni delle coordinate del punto nel piano.

Equazione del piano in S_3

Anche per il piano in S_3 , si può fissare un riferimento cartesiano ed un punto $P(x,y,z)$ diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato OP identifichi il vettore che ha per componenti rispettivamente le coordinate x,y,z di P .

Se $\vec{n}(a,b,c)$ è un vettore ortogonale ad $OP(x,y,z)$, per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{n} \times OP = 0, \text{ cioè : } ax + by + cz = 0$$

*l'equazione del piano per l'origine, che contiene i punti A, B, C ,
individua, dunque,*

*il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ dello spazio tali che il
segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore*

$$\vec{n}(a,b)$$

Equivalente del piano in uno spazio curvo

I vettori perpendicolari al piano in ogni punto, hanno la stessa direzione.

Così di seguito, operando su spazi piatti, di dimensione tre, quattro, ...ecc, i vettori perpendicolari allo spazio hanno tutti la stessa direzione.

$$ax+by+cz = 0$$

In uno spazio curvo, la direzione del vettore perpendicolare allo spazio cambia in ogni punto, per cui le componenti del vettore normale allo spazio in un punto (precisamente *al piano tangente la superficie in quel punto*) sono funzioni delle coordinate.

$$g_{11}(x, y, z) dx + g_{22}(x, y, z) dy + g_{33}(x, y, z) dz = 0$$

[F. Casolaro: "**Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo**". Atti del Congresso Nazionale Mathesis - Bergamo 2002]

In una *varietà tridimensionale* di uno spazio a quattro dimensioni S_4 , un'equazione lineare in quattro incognite del tipo:

$$g_{11}(x, y, z, t)dx + g_{22}(x, y, z, t)dy + g_{33}(x, y, z, t)dz + g_{44}(x, y, z, t)dt = 0$$

ottenuta dal prodotto scalare tra il vettore $g(g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14})$ normale alla superficie S_4 ed il vettore $ds(dx, dy, dz, dt)$ (spostamento infinitesimo su S_4), individua un iperpiano S_3 dello spazio S_4 in cui le g_{ii} ($i = 1, \dots, 4$) sono funzioni delle coordinate (x, y, z, t) analoghe a quelle introdotte da Riemann per la sua geometria non euclidea; la metrica è definita da

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^4 g_{ij} dx_i dx_j$$

I sistemi:

$$\begin{cases} g_{11}dx + g_{12}dy + g_{13}dz + g_{14}dt = 0 \\ g_{21}dx + g_{22}dy + g_{23}dz + g_{24}dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_{11}dx + g_{12}dy + g_{13}dz + g_{14}dt = 0 \\ g_{21}dx + g_{22}dy + g_{23}dz + g_{24}dt = 0 \\ g_{31}dx + g_{32}dy + g_{33}dz + g_{34}dt = 0 \end{cases}$$

In cui le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{pmatrix}$$

hanno rango $\rho(A_1) = 2$, $\rho(A_2) = 3$ rappresentano, rispettivamente, uno spazio S_2 (analogo al piano euclideo) iperpiano di S_3 , ed uno spazio S_1 (analogo alla retta euclidea) iperpiano di S_2 .

Spazio-tempo quadridimensionale (x, y, z, t) di Minkovsky

Nell'idea di Einstein, le funzioni g_{ij} , che nelle relazioni precedenti rappresentano i coefficienti delle variabili dx, dy, dz, dt , incorporano gli effetti delle masse gravitazionali nello spazio.

Tali effetti, provocando una curvatura in ogni punto, sono la causa del cambiamento di direzione del vettore normale alla superficie in quel punto.

Con l'introduzione della coordinata-tempo, si ha poi una più corretta analisi dell'universo, identificato col cosiddetto spazio-tempo quadridimensionale (x, y, z, t) di Minkovsky [5], in cui l'insieme dei punti-eventi (x, y, z, t) definisce un continuo a quattro dimensioni che rappresenta uno spazio geometrico S_4 .

Spazio-tempo quadridimensionale (x, y, z, t) di Minkovsky

In tale ottica, lo spazio S_3 dei punti (x, y, z) del modello euclideo, visto come sottospazio di S_4 può essere assimilato ad un iperpiano dello *spazio-tempo di Minkovsky*.

- per $dt = 0$ (ovvero $t = \text{costante}$), si ha l'iperpiano S_3 di S_4 , che è lo spazio geometrico euclideo tridimensionale, in cui valgono le leggi della cinematica classica;
- se invece è costante una delle coordinate x, y, z , si hanno iperpiani S_2 di S_3 che caratterizzano modelli cinematici relativistici su S_4 , che è l'analogo del piano euclideo.

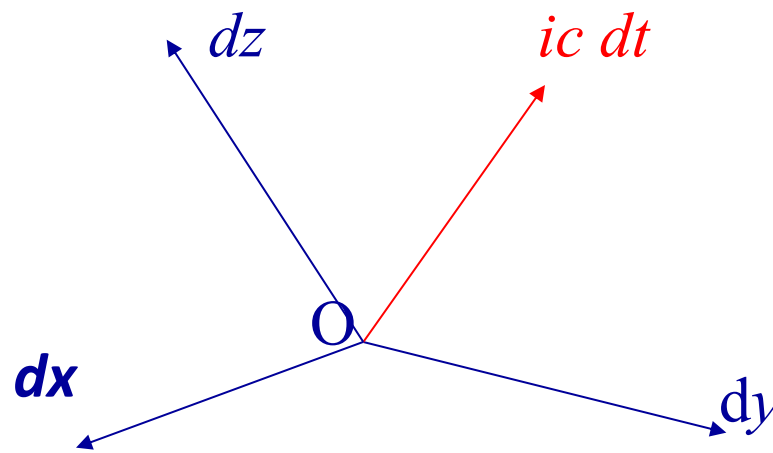
Lo spazio S_4

Ad esempio, l'insieme dei punti $P(x, y, 0, t) \equiv P(x, y, t)$ è un iperpiano S_3 di S_4 , le cui coordinate (x, y, t) individuano i *punti-eventi del piano* (x, y) che è prolungato alla cinematica con l'introduzione della coordinata tempo.

In tale contesto, bisogna tener conto che la metrica è definita da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (**)$$

Tale relazione si può giustificare geometricamente, aggiungendo alla terna reale (O, x, y, z) del riferimento di S_3 un quarto asse immaginario ortogonale ad S_3 in cui la coordinata tempo è moltiplicata per l'unità immaginaria i e, per uniformità dimensionale, per la velocità della luce c .



Il vettore $\overline{ds}$ ha allora componenti $(dx, dy, dz, icdt)$
e quindi la metrica è definita da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + i^2 c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

cioè la (**).

Ciò porta a concludere che *la geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.*

Secondo la concezione classica, la geometria esprime un insieme di proprietà relative al *movimento dei corpi* ed alla *propagazione della luce*, che si ottengono facendo astrazione dal *tempo* e dalle *forze*.

Quindi, con un'estensione della geometria alla cinematica (che è la teoria del movimento rispetto allo spazio-tempo) e successivamente alla dinamica (con l'introduzione delle forze) si avranno approssimazioni che ci avvicinano man mano ad un grado più concreto della realtà fisica, che troverà poi un'ulteriore correzione con la teoria della Relatività Generale.

Con tale teoria, Einstein sollevò anche una questione più ampia legata al significato delle g_{ij} il cui uso incorporava gli effetti gravitazionali delle masse nello spazio.

Dunque, il modello newtoniano che assegna una legge per il moto libero di un punto e vi aggiunge poi una forza, risulta essere solo un'astrazione nella nuova costruzione della dinamica di Einstein.

Tale concezione sarebbe reale se la materia fosse composta da piccole masse, poste a distanza tale una dall'altra da potersi muovere senza subirne la reciproca influenza; invece *la materia si muove sotto l'influenza di altra materia che, secondo la dinamica newtoniana è la causa delle forze gravitazionali.*

Dallo spazio piatto allo spazio curvo

Nello spazio curvo, i corpi, in assenza di forze non gravitazionali, percorrono la linea più breve (geodetica) in analogia al percorso rettilineo che è valido solo nello spazio piatto.

Precisamente, secondo il concetto classico:

- *la materia crea un campo gravitazionale e questo fa deviare i corpi;*

invece secondo Einstein:

-il campo gravitazionale va interpretato come curvatura dello spazio e tale curvatura determina la sostituzione del concetto di retta con quello di geodetica.

Tema 1987/88

Studiare la trasformazione $\tau : \begin{cases} X = 2x + 2 \\ Y = \frac{1}{2}y + 1 \end{cases}$ e, tra

E tra l'altro, dimostrare:

1. Le aree di due triangoli che si corrispondono nella trasformazione sono uguali;
2. Le due parti di piano limitate da una retta e da una parabola e, rispettivamente, dalla retta e dalla parabola ad esse corrispondenti in tale trasformazione, sono equivalenti.

Trasformiamo mediante τ la circonferenza γ di equazione: $X^2 + Y^2 = 1$

Si ha:

$$(2x + 2)^2 + \left(\frac{1}{2}y + 1\right)^2 = 1 \Rightarrow 16x^2 + y^2 + 32x + 4y + 16 = 0$$

che è un'ellisse in quanto risulta: $A_{33} > 0$

Pertanto la circonferenza γ è trasformata da τ in un'ellisse per cui è un'affinità e non una similitudine.

Relativamente al punto 1, scriviamo i tre vertici di un triangolo T_1 , ed il trasformato T_2 secondo τ . Calcolando le aree con il determinante della matrice 3×3 , si potrà constatare che sono uguali, per cui anche le aree del punto 2 sono uguali, in quanto un'affinità conserva il rapporto tra le aree delle figure corrispondenti. Non c'è bisogno di calcolare gli integrali.

Se ABC è il triangolo di vertici: A (-2, 1); B (3, 0); C (1, -2), l'area è data da

$$\text{Area (ABC)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

I trasformati secondo τ sono: A' (-2, 0); B' (10, 1); C' (4, 0); si ha:

$$\text{Area (A'B'C')} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

da cui, il rapporto tra le aree dei triangoli è uguale a 1.

Di conseguenza anche le parti relative al punto 2 sono equivalenti perché l'affinità conserva il rapporto tra aree di figure corrispondenti.

Uno dei tre problemi assegnati agli esami di Maturità Scientifica di Ordinamento nell'anno scolastico 1992/93 trattava (anche se non specificamente evidenziato da parte di chi l'aveva proposto) un problema meccanico di grande attualità:

il sistema biella-manovella, cioè, l'analisi dell'operazione che permette di trasformare un moto rettilineo in moto rotatorio.

Il problema è il seguente:

Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O , tracciare la circonferenza γ di centro O e raggio unitario. Detto A il punto di coordinate $(1,0)$, indicare con θ l'angolo formato da una generica semiretta uscente dall'origine con il semiasse positivo delle x e con P il punto in cui tale semiretta interseca γ ($POA = \theta$).

Determinare, in funzione di θ , l'ordinata del punto Q appartenente al semiasse positivo delle y tale che $PQ = 2$.

Descrivere, limitandosi all'uso della derivata prima, la funzione $f(\theta)$ trovata.

Se P ruota sulla circonferenza γ con velocità costante, il moto di Q quali caratteristiche presenta?

Negli istanti in cui Q ha velocità nulla, P dove si trova?

La funzione richiesta dal tema è la seguente:

$$f(\vartheta) = \sin \vartheta + \sqrt{4 - \cos^2 \vartheta}$$

La derivata seconda di $f(\vartheta)$ è:

$$f''(\vartheta) = \frac{-\sin^4 \vartheta - \sin \vartheta \sqrt{(3 + \sin^2 \vartheta)^3} - 6\sin^2 \vartheta + 3}{(3 + \sin^2 \vartheta)\sqrt{3 + \sin^2 \vartheta}}$$

da cui è evidente che non si possono trovare le radici che rappresentano le posizioni di velocità minima e di velocità massima nel moto del punto Q.

Tali punti sono stati determinati al computer con metodi numerici (*periodico di matematiche – serie VII vol. I, n. 1 – 1994*) che hanno permesso di tracciare il grafico in modo preciso, contrariamente a quanto si trova nei testi di esercizi pubblicati in cui si presenta il grafico come moto armonico (ignorando la presenza dei flessi).

Si può osservare, invece, che esistono due flessi, nell'intervallo $[0, \pi]$, simmetrici rispetto alla retta di equazione $x = \pi/2$. Tali flessi, all'aumentare della distanza OQ (fig. 1), tendono ad avvicinarsi rispettivamente ai valori $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \pi$, per cui il moto diventa armonico al tendere della distanza OQ all'infinito.

Bibliografia

- F. Casolaro: Atti del Progetto del M.P.I. del Dip. di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991): "Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie".
- F. Casolaro: *Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo*. Atti del Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo" – 17-19 ottobre Bergamo 2002 – pag.185-198.
- F. Casolaro: "Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica" - Atti del Convegno Internazionale "Matematica e Arte: un sorprendente binomio" Vasto, 10-12 aprile 2003; pagg. 129-148.
- F. Casolaro "Matematica ed Etica: i nodi essenziali per una corretta educazione matematica nella scuola di oggi" - Atti del Convegno Nazionale "Insegnare la Matematica nella scuola di tutti e di ciascuno" - Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Bari - 19-21 febbraio 2004; pagg. 263-266.
- F. Casolaro – R. Pisano: "Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività", Atti del XXVI Congresso Nazionale di "Storia della Fisica e dell'Astronomia" (SISFA 15-17 giugno 2006), tenutosi presso la Facoltà di Architettura "Valle Giulia" dell'Università di Roma "La Sapienza". pag. 221-231.
- F. Casolaro: "L'evoluzione della Matematica attraverso quattro congetture fondamentali sull'osservazione del mondo fisico". Atti del 1° Convegno AIF: Calitri, Latina, Minturno, Napoli: "Qual è il ruolo culturale ed interdisciplinare delle scienze fisiche e matematiche? Ipotesi e prospettive" - Aversa, 26 Maggio 2008 - pag. 71-83.

- F. Casolaro (con L. Iorio) *“Le applicazioni della matematica da Eulero ad oggi”*. Congresso nazionale “MATHESIS” 2007 *“Nel III centenario della nascita di Leonhard Euler (1707 – 2007)”* - Chieti, 1-2-3-4 Novembre 2007; pag.117-127.
- F. Casolaro: *“L’evoluzione della Matematica attraverso quattro congetture fondamentali sull’osservazione del mondo fisico”*. Atti del Convegno AIF: *“Il ruolo culturale ed interdisciplinare delle scienze fisiche e matematiche”* - Istituto “Niccolò Jommelli” di Aversa, 26 Maggio 2008 - pag. 71-83.
- F. Casolaro (con R. Pisano: *“An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)”* - History Research - Vol. 1, Number 1, December 2011 - pag. 47-60.
- F. Casolaro (con L. Paladino): *“Evolution of the geometry through the Arts”* - 11th International Conference APLIMAT 2012 - in the Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Technology in Bratislava, 7-9 febbraio 2012, pag. 481-490.
- F. Casolaro (con R. Pisano): *“An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part two)”* - History Research - Vol. 2, Number 1, January 2012 - pag. 57-65.
- F. Casolaro: *“L’evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?”* - Science&Philosophy, Vol. 1, n. 1 - Giugno 2014, pag. 39-48

Bibliografia

- F. Casolaro: *“Svolgimento del tema n. 1 per il concorso a cattedre della classe LXXXV-Scienze Matematiche*. Periodico di Matematiche n. 1-1992, pag. 45-54.
- F. Casolaro: *“Svolgimento del tema n. 2 per il concorso a cattedre della classe LXXXV-Scienze Matematiche*. Periodico di Matematiche n. 1-1992, pag. 55-62.
- F. Casolaro: *“Svolgimento del tema della maturità scientifica 1992”*. Periodico di matematiche n. 1, 1993 - pag. 27-41.
- F. Casolaro- A. Lungo: *“Svolgimento del tema della maturità scientifica 1993”*. Periodico di Matematiche n. 1, 1994 – pag. 39-50.
- F. Casolaro: *“La Matematica nello insegnamento della Fisica”*. Atti del Convegno Nazionale Mathesis *“Una presenza nella cultura e nell’insegnamento”*, Roma 20-23 ottobre 1995 pag. 363-368.
- F. Casolaro - Aldo Morelli *“La sfera: questioni didattiche”*. Atti del XX Convegno Nazionale U.M.I.-C.I.I.M. *“La Matematica e le altre Scienze”*; Orvieto, 22-24 ottobre 1998 (Nucleo di Ricerca didattica dell’Università di Napoli).
- F. Casolaro - R. Santarossa: *“Svolgimento del tema della maturità magistrale sperimentale del P.N.I. 1998”*. Periodico di Matematiche n. 2/3 -1998 – pag. 125-132.
- F. Casolaro: *“Svolgimento del tema degli esami di Stato, indirizzo scientifico ordinario 1999”*. Periodico di Matematiche n. 3 -1999 – pag. 80-83.
- F. Casolaro - A. Fontana: *“Svolgimento del tema degli esami di Stato, prova suppletiva per l’indirizzo scientifico ordinario 1999”* con A. Fontana. Periodico di Matematiche n. 1 – 2000 – pag. 58-66.

- F. Casolaro: “*Dalla Geometria euclidea alla Geometria Proiettiva*”. In fase di pubblicazione nel volume dedicato al Prof. Cesare Cundari, relativamente al Progetto della Facoltà di Architettura dell’Università “*La Sapienza*” di Roma sulle *Interrelazioni tra Matematica e Disegno*.
- F. Casolaro (con L. Cirillo, R. Prosperi), “*Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie*” - Journal of Epistemology, Science e Philosophy - Number 3 June 2015. Pagine 73-106
- F. Casolaro (con A. Rotunno): “*Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations*”. Accettato per la pubblicazione agli atti del Convegno: *Third International Conference - Recent Trends in Social Sciences: Qualitative Theories and Quantitative Models* (RTSS), tenutosi all’University of Defence - Brno, Czech Republic nei giorni 15-17 ottobre 2015.
- F. Casolaro (con L. Cirillo, R. Prosperi), “*Groups of Transformations with a Finite Number of Isometries: the Cases of Tetrahedron and Cube*”. Ratio-Matematica, Journal of Mathematics, Statistics, and Applications Volume 31 – 2016, pagine 93-110.

Pubblicazioni agli Atti del Progetto del M.P.I. del Dip. di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991): "Disegno e Matematica: didattica finalizzata alle nuove tecnologie".

F. Casolaro: "*Dai numeri reali al piano di Argand-Gauss*". Pag. 260-264.

F. Casolaro: "*Dal risultato di Gauss sulla costruibilità del poligono di 17 lati agli sviluppi della teoria algebrica dei campi*". Pag. 246-259.

F. Casolaro: "*Programma di Erlangen e le Trasformazioni geometriche*". Pag. 101-103.

F. Casolaro: "*La geometria proiettiva: Omografie*". Pag. 104-118.

F. Casolaro: "*La geometria analitica: cenni storici e funzione didattica*". Pag. 91-100.

F. Casolaro: "*Dualità nel piano e nello spazio: Metodi analitici per la costruzione delle coniche*". Pag. 240-245.

F. Casolaro: "*Algebra delle matrici*". Pag. 85-90.

F. Casolaro: "*Il gruppo delle Affinità*". Pag. 220-225.

F. Casolaro: "*Il gruppo delle Similitudini*". Pag. 226-230.

F. Casolaro: "*Il gruppo delle Isometrie*". Pag. 231-239.

F. Casolaro: "*Costruzioni di coniche*". Pag. 240-245.