



Mathesis

Società italiana di scienze
matematiche e fisiche
fondata nel 1895

Convegno Nazionale/Corso di Formazione

Rimini, 20 - 22 aprile 2018

**Accademia
Piceno-Abrutina
dei Velati in Teramo**
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della Scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

*L'attualità degli insegnamenti dei grandi Maestri della Mathesis
nella seconda metà del secolo XX: nuove prospettive
nella didattica e nei fondamenti della Matematica.*

*Per un laboratorio di Geometria intuitiva:
poligoni e poliedri con la piegatura della carta*

Antonio Criscuolo Centro MatNet-CQIA Università di Bergamo

Sommario

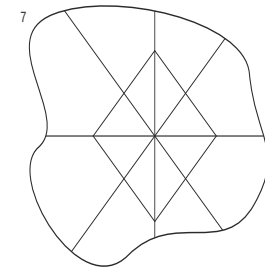
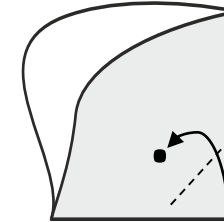
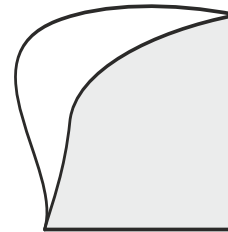
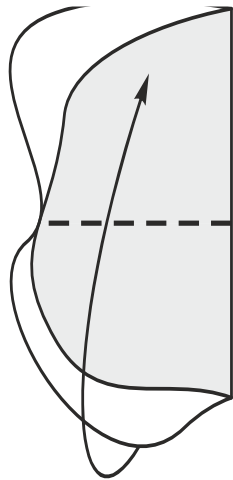
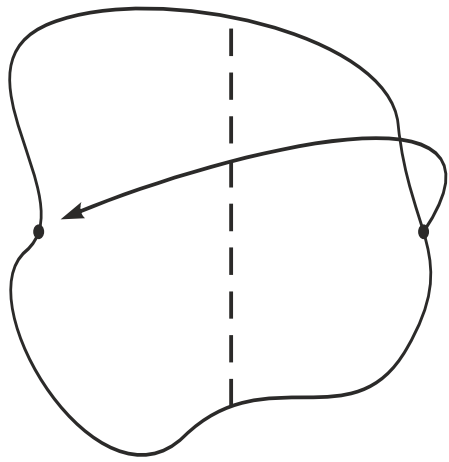
- Alcune semplici esperienze geometriche con la piegatura della carta.
- Gli assiomi della geometria della piegatura della carta.
- La carta come artefatto didattico.
- Perché la piegatura della carta e la realizzazione di oggetti origami nell'insegnamento della matematica.

Piegando la carta si fa geometria? Proviamo !!!

1

Pieghiamo tre volte un foglio di carta....

1. Piegare il foglio per ottenere una prima piega.
2. Ripiegare il foglio sovrapponendo a se stessa la piega appena realizzata, si ottiene così una punta.
3. Ripiegare ancora il foglio portando la punta a sovrapporsi ad un qualsiasi punto del foglio stesso



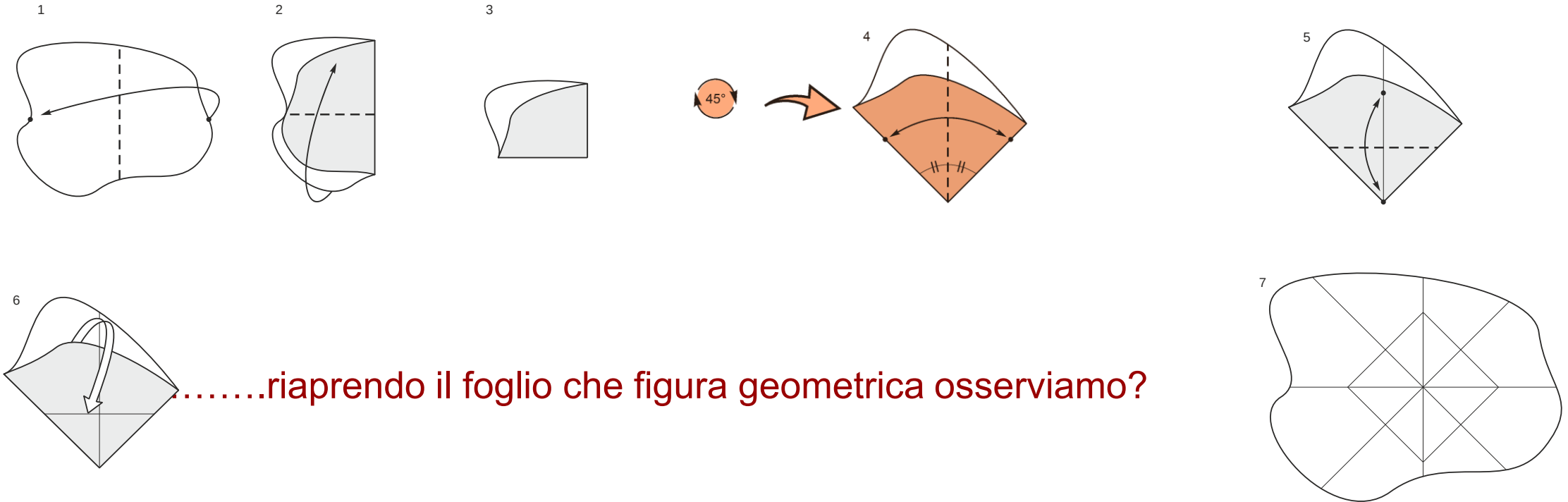
.....riaprendo il foglio che figura geometrica osserviamo? E' proprio un rombo? Perché ?

- Quali relazioni tra le pieghe realizzate e la definizione di rombo e le sue proprietà?
- Se tracciamo a caso la seconda piega che figura otteniamo? Perché?
- Come modificare la "costruzione" per realizzare un quadrato e non solo un rombo?

Piegando la carta si fa geometria? Proviamo !!!

2

Aggiungiamo una piega alla precedente costruzione: pieghiamo quattro volte un foglio di carta....

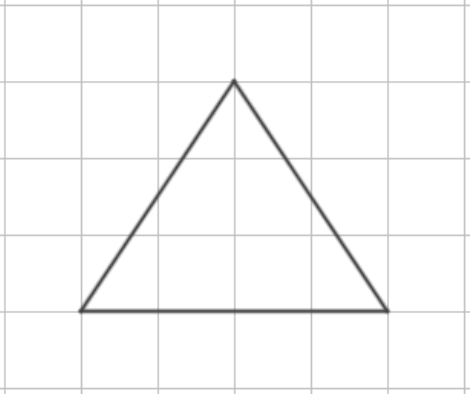


- E' proprio un quadrato? Perché ?
- Quali le relazioni tra le pieghe realizzate, la definizione di quadrato e le sue proprietà?

Piegando la carta si fa geometria? Proviamo !!!

3

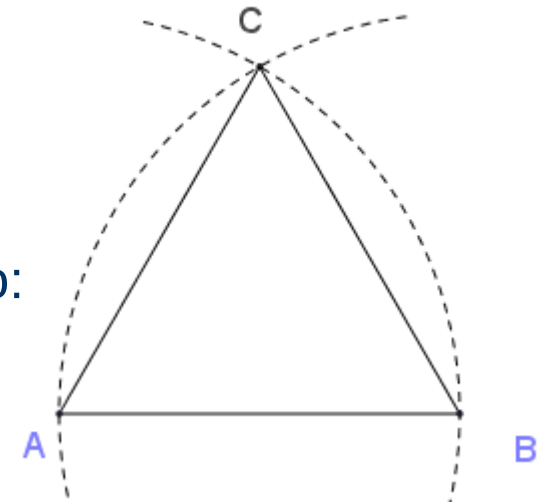
Costruire un triangolo equilatero.



La carta quadrettata non consente di costruire un triangolo equilatero

La prima proposizione degli Elementi di Euclide pone un problema costruttivo:
"Sopra una data retta terminata (segmento) costruire un triangolo equilatero".

Costruzione con riga e compasso



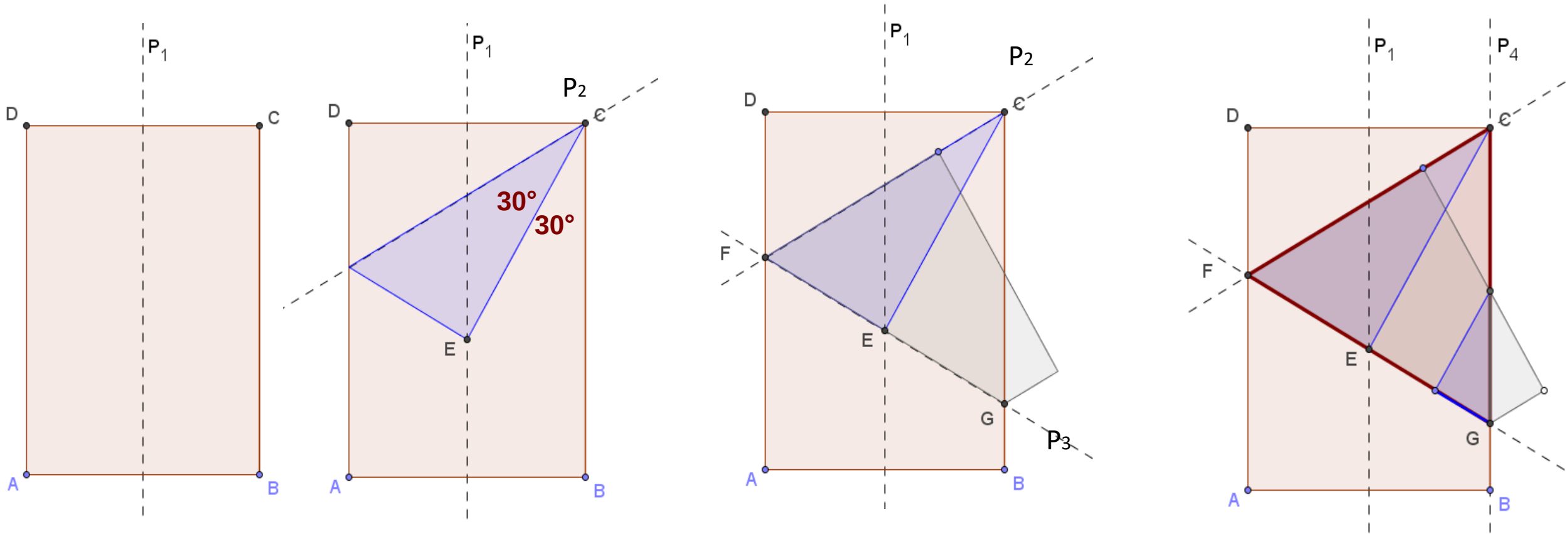
Come si costruisce il triangolo equilatero con la piegatura della carta?

Partiamo da un foglio rettangolare, ad esempio un A4

Piegando la carta si fa geometria? Proviamo !!!

3

Da un foglio rettangolare al triangolo equilatero



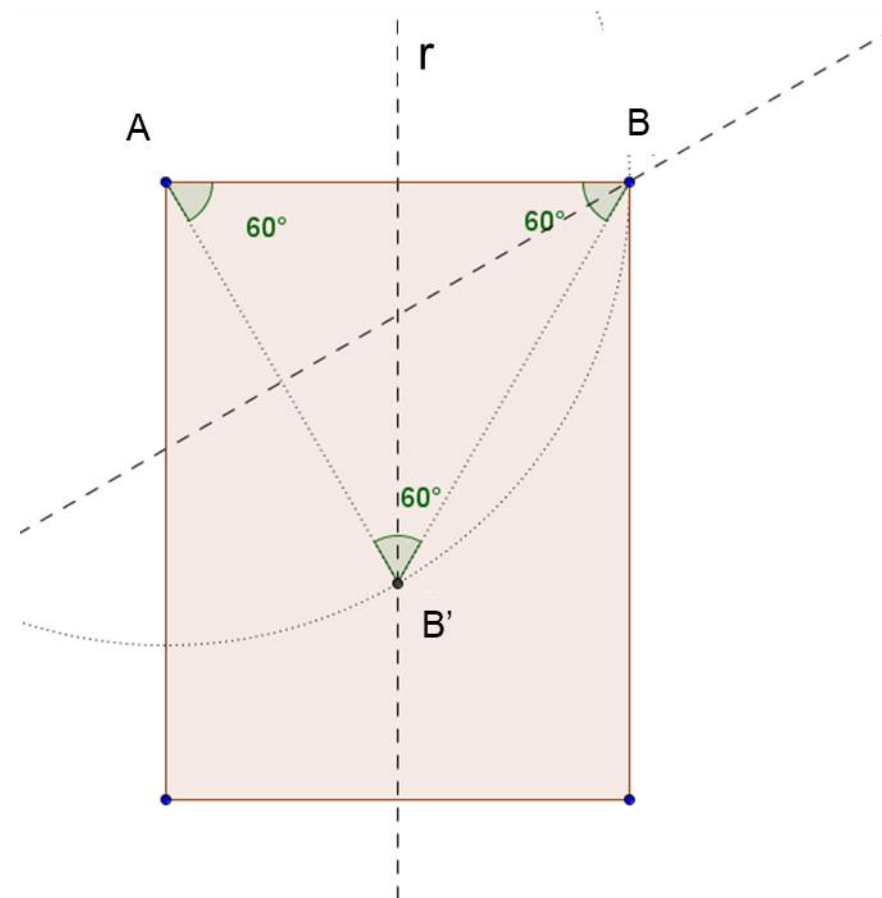
La piega che si ottiene portando un vertice sull'asse dei lati minori del rettangolo, mantenendo fisso l'altro vertice del lato minore, forma con quest'ultimo un angolo di 30° .

Piegando la carta si fa geometria? Proviamo !!!

3

Da un foglio rettangolare al triangolo equilatero

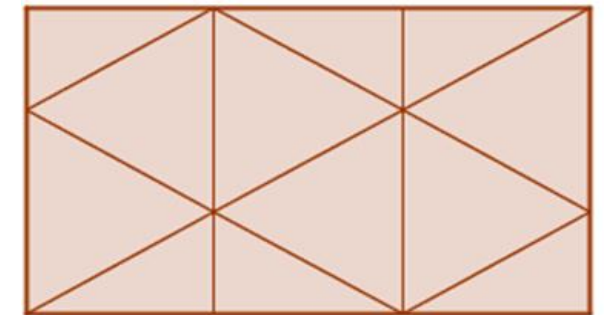
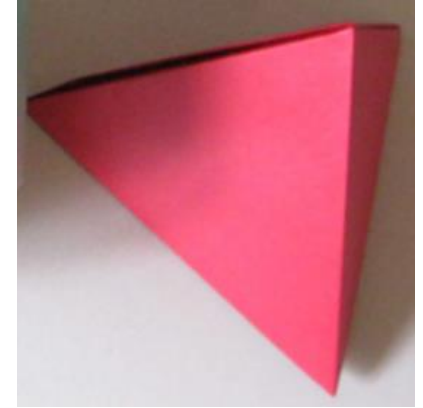
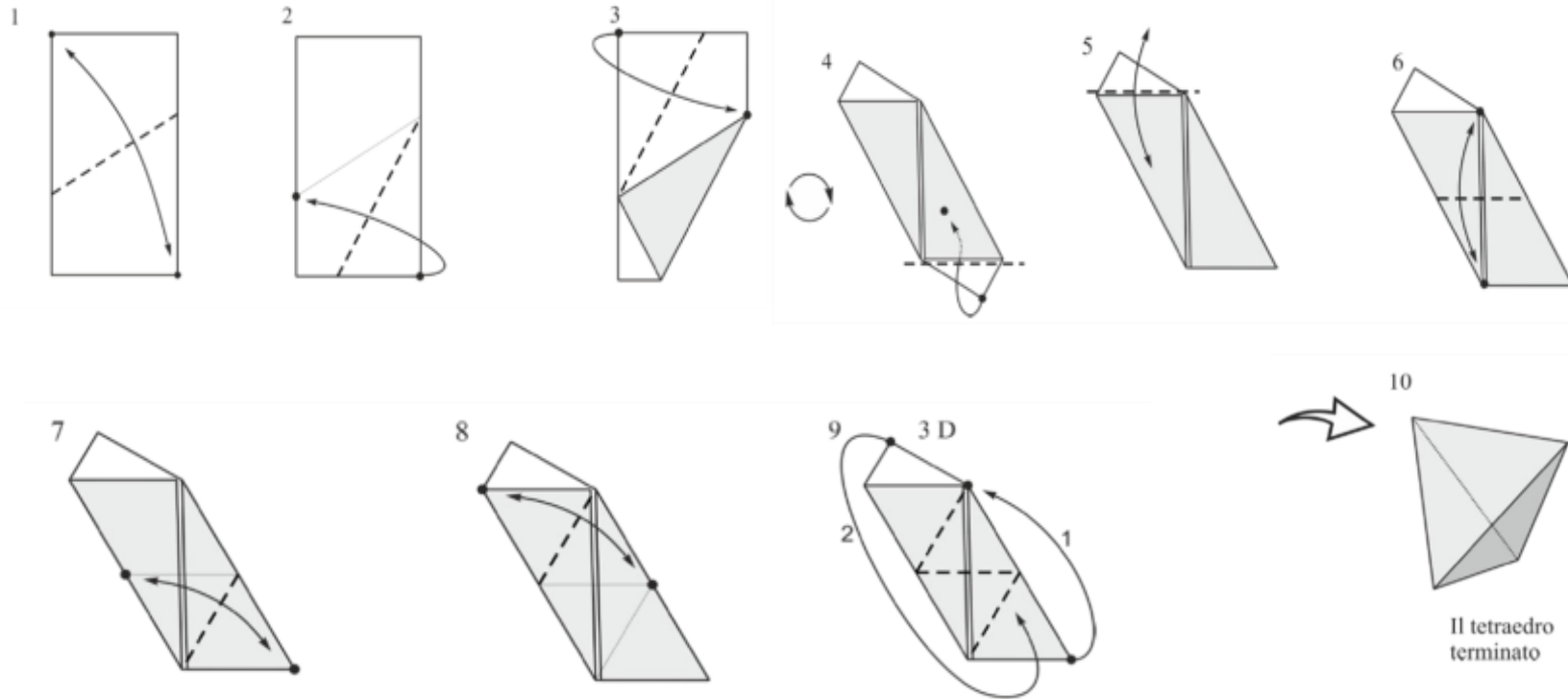
Realizzare la piega che porta il vertice B sull'asse dei lati minori del rettangolo, mantenendo fisso il vertice A, equivale al tracciare un arco di circonferenza di centro A e raggio AB.



Piegando la carta si fa geometria? Proviamo !!!

4

Partiamo da un particolare foglio rettangolare, con otto pieghe otteniamo



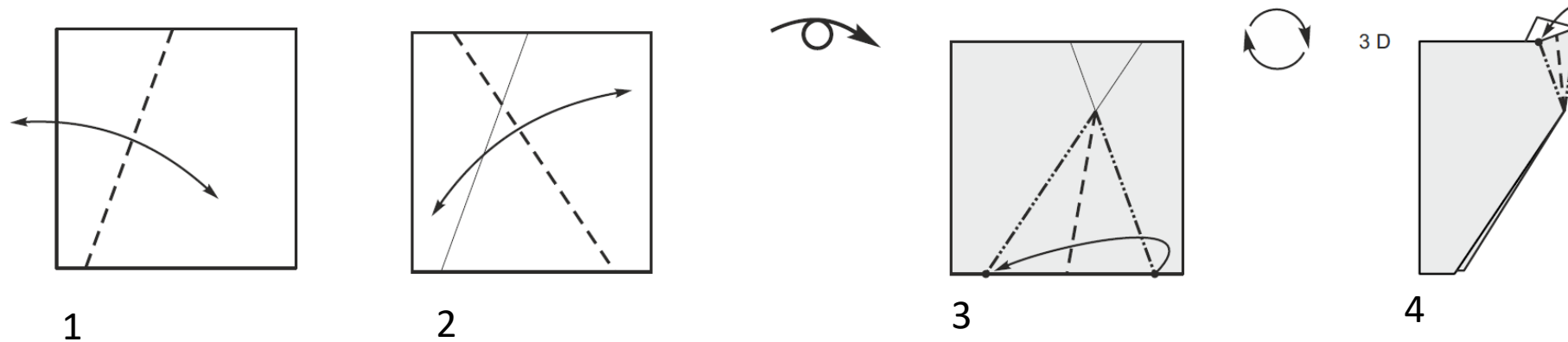
Dallo schema delle pieghe si deduce, applicando la relazione tra altezza e lato del triangolo equilatero, che il formato del foglio è $1:\sqrt{3}$.

$\sqrt{3}$

L'artefatto foglio di carta e i concetti di asse e bisettrice

Costruzione dell'asse del segmento: *piega punto su punto*, sovrapposizione degli estremi del segmento

Costruzione della bisettrice di un angolo: *piega su piega*, sovrapposizione dei lati dell'angolo.



Ripiegando ancora una volta il foglio, senza riaprirlo, si realizza, con un lo stesso modello, la definizione costruttiva e la proprietà di essere luogo geometrico.

Per l'asse: piega per due punti, un estremo del segmento e un punto dell'asse.

Per la bisettrice: piega su se stessa, dei due lati sovrapposti dell'angolo.

Denominazione di alcune pieghe e regole assiomatiche della geometria della piegatura della carta

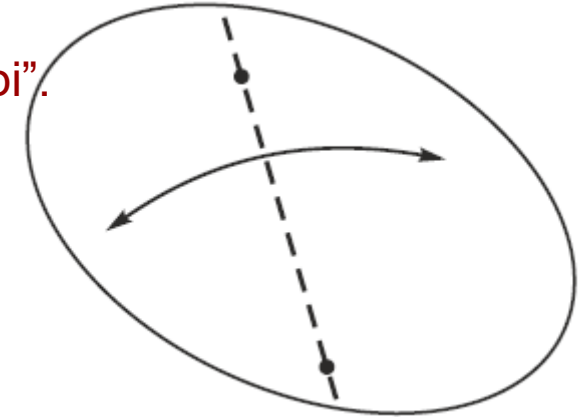
- | | | |
|--|---|---|
| 1. Piegata casuale | | 1. Retta |
| 2. Piegata per un punto | | 2. Retta per un punto |
| 3. Piegata da bordo a bordo | | 3. Bisettrice dell'angolo tra i bordi o asse mediano dei bordi |
| 4. Piegata per due punti |  | 4. Retta per due punti A1 |
| 5. Piegata punto su punto |  | 5. Asse di simmetria di due punti (asse segmento) A2 |
| 6. Piegata su se stessa |  | 6. Retta perpendicolare |
| 7. Piegata su se stessa per un punto |  | 7. Retta perpendicolare ad una retta per un punto A3 |
| 8. Piegata su piega |  | 8. Asse di simmetria di due rette (bisettrice angolo) A4 |
| 9. Piegata da punto a piega tenendo fisso un punto |  | 9. Costruzione del triangolo equilatero A5 |

Foglio di carta, pieghe e assiomi della geometria della piegatura della carta I – II

Assiomatizzazione della geometria della piegatura della carta nasce a Padova: B. Scimemi e H. Huzita (1986)

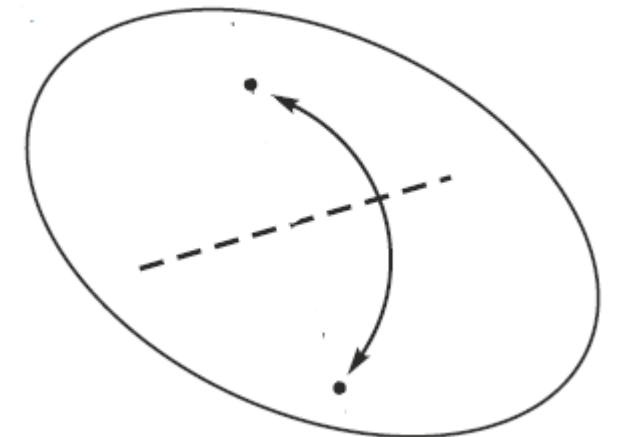
A1. “Dati due punti esiste un'unica piegatura che passi per entrambi”.

Costruzione della retta per due punti



A2. “Dati due punti esiste un'unica piegatura che porti l'uno sull'altro”.

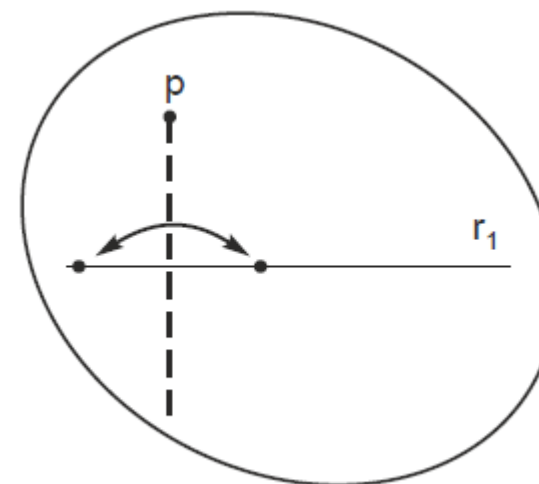
Costruzione dell'asse del segmento



Foglio di carta, pieghe e assiomi della geometria della piegatura della carta III - IV

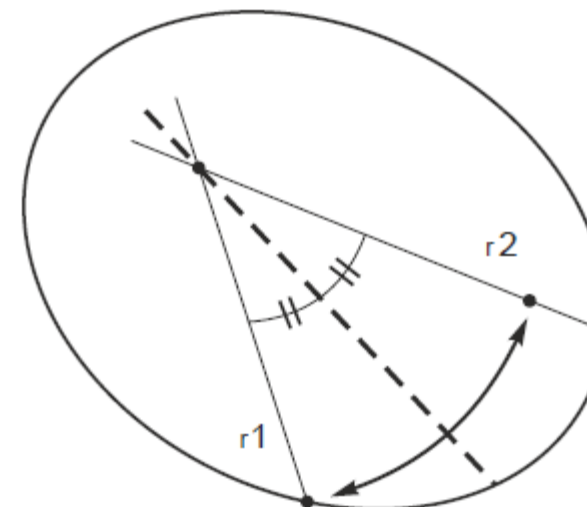
A3. “Dati un punto e una piega, esiste un'unica piegatura perpendicolare alla piega che passi per il punto”

Costruzione della perpendicolare da un punto ad una retta



A4. “Date due pieghe, esiste sempre una piegatura che porti l’una sull’altra”.

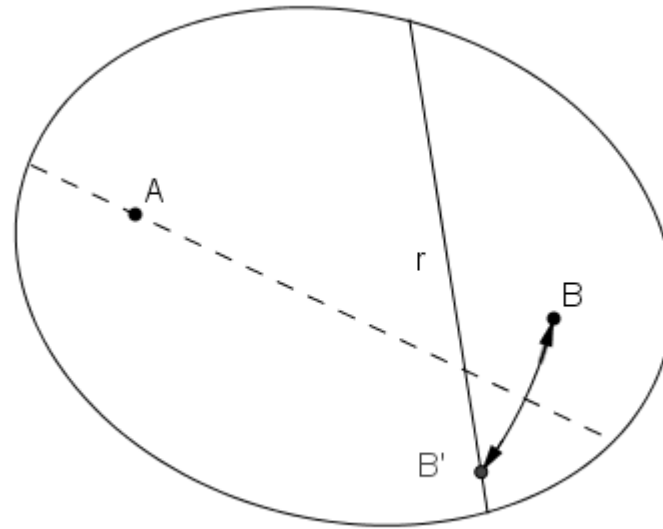
Costruzione della bisettrice di un angolo



Foglio di carta, pieghe e assiomi della geometria della piegatura della carta V

A5. “Dati due punti e una piega è possibile realizzare una piegatura, se esiste, che tenendo fisso uno dei punti porta l’altro sulla piega assegnata”.

Dati due punti A, B e la retta r costruire una retta passante per A che sia asse della simmetria, se esistente, che porti B sulla retta r)

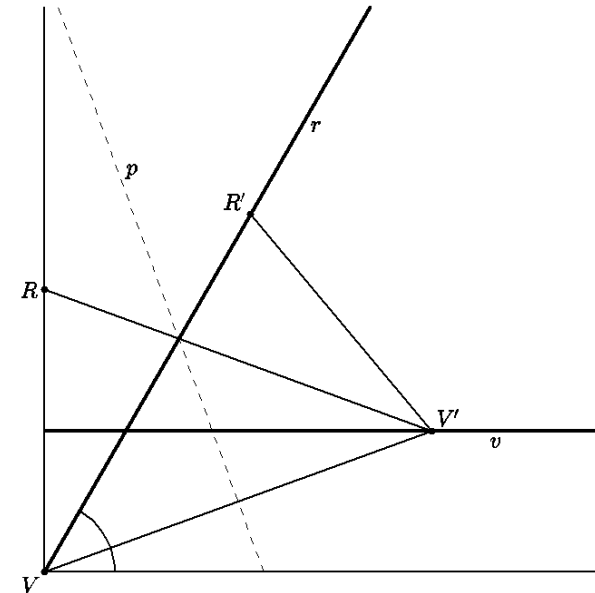
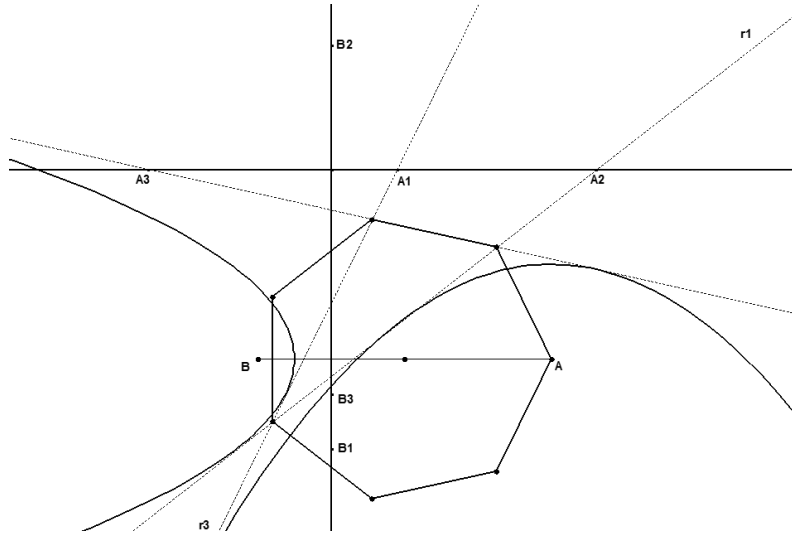


I primi cinque assiomi della geometria origami consentono la realizzazione di tutte le costruzioni geometriche euclidee con «riga e compasso»

La Geometria della piegatura della carta ...va oltre la geometria euclidea delle "riga e compasso"

Gli ultimi due assiomi della geometria origami (VI – VII) consentono costruzioni che vanno oltre la geometria euclidea della riga e del compasso.

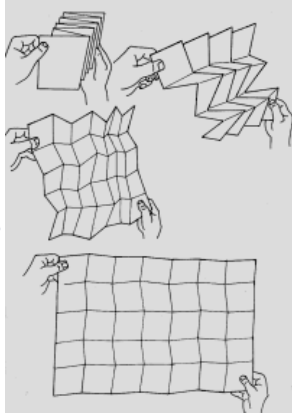
L'assioma 6 consente di risolvere problemi di 3° grado: tangente comune a due parabole, trisezione dell'angolo, duplicazione del cubo, costruzione dell'eptagono regolare,....



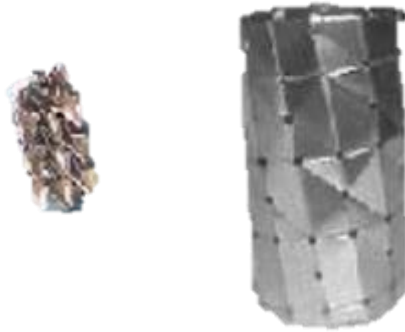
La geometria origami si basa sugli assiomi di Scimemi – Huzita - Hatori

Origami nella ricerca scientifica e nella tecnologia

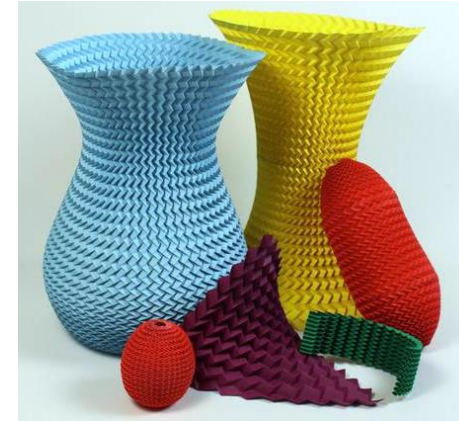
- P



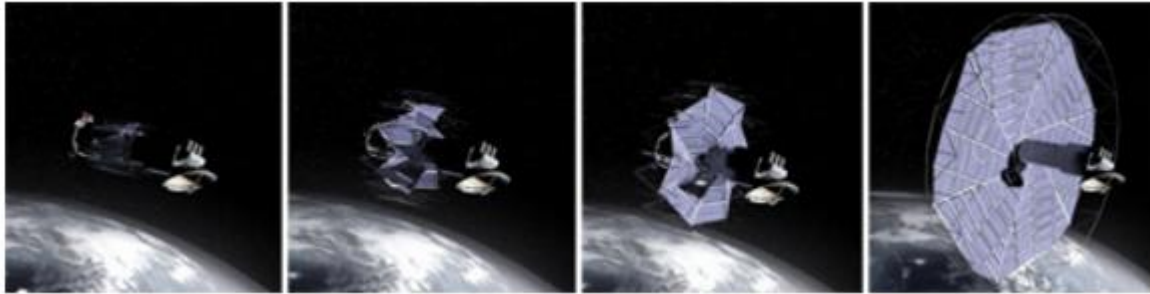
Piegatura di mappe



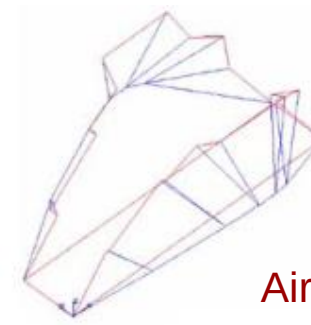
Stent chirurgici



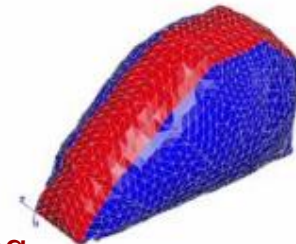
Mahadevan Lab/Harvard SEAS



NASA Moduli fotovoltaici spaziali,



Airbag



La carta come artefatto e strumento cognitivo

L'idea di artefatto è molto generale: suoni, gesti; utensili e strumenti; forme orali e scritte del linguaggio naturale; testi e libri; strumenti musicali; strumenti scientifici; strumenti informatici, ...

Artefatto cognitivo : artefatto per l'apprendimento (Norman, 1993)

Distinzione tra artefatto e strumento

Strumento: un'entità composta sia da componenti legate alle caratteristiche dell'artefatto che da componenti soggettive (schemi d'uso). (Rabardel & Samurcay, 2001)



Disegno di
una forma
rotonda



Costruzione del
cerchio
in senso geometrico:
luogo dei punti
equidistanti dal centro

Carta

Artefatto

Caratteristiche:
le pieghe sono rettilinee,
ogni piegatura realizza una simmetria

Strumento

Artefatto e schemi d'uso:
tipi e modalità di piegatura

Artefatto carta: analisi del potenziale semiotico

La carta è un artefatto.

- *La traccia di una piega è - limitatamente al foglio, considerato piano - una retta.*
- *Due pieghe individuano un punto.*
- *Piegando un foglio si realizza una simmetria di cui la piega è asse.*

Quali sono le caratteristiche fisiche del foglio di carta che ne fanno un artefatto, in altri termini: perché le pieghe della carta sono rettilinee?

- La carta è resistente alla trazione, ma poco resistente al taglio e alla flessione.
- Le pieghe sono rettilinee perché la carta è molto flessibile ma resistente alla trazione.
- Flettendo un foglio di carta si ottiene, nella zona interessata dalla flessione, una superficie cilindrica cioè una superficie costituita da rette. Flettendo sempre di più la superficie cilindrica assume un raggio sempre minore e via via tende a ridursi ad una retta, ad una piega rettilinea.

Perché un laboratorio matematico con la piegatura della carta e la realizzazione di oggetti origami

- Lo studente svolge un ruolo attivo sia individualmente, sia nell'attività di gruppo, sia nella "discussione di classe"
- Può essere uno stimolante ambiente di scoperta e di esperienza matematica.
- Un ambiente d'apprendimento che può lasciar spazio a fantasia e creatività.
- Ha un'elevata potenzialità didattica, perché basato su un'attività che richiede un simultaneo controllo visivo, manuale e mentale.
- Le manipolazioni di un foglio di carta possono essere ricche di significati geometrici e numerici che attivano nello studente la formulazione di congetture, la produzione di argomentazioni, la descrizione di passi procedurali,...
- Non richiede particolari abilità tecniche e consente di concentrarsi con immediatezza sui concetti (a differenza dell'uso di riga e compasso e del computer).
- Può essere realizzato e ripreso a diversi livelli di approfondimento, dalla scuola primaria all'università.
-

Bibliografia - Sitografia

- A.Criscuolo Le proprietà del formato della carta 1: $\sqrt{2}$ spunti didattici per un laboratorio matematico con la piegatura della carta, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate vol. 38b n. 1 2015
- A.Criscuolo, F. Decio. Inclusione di un tetraedro regolare in un cubo a partire da fogli A4, Quadrato magico – CDO n. 111 2015
- T.Hull Project Origami Activities for Exploring Mathematics, A K Peters/CRC Press, 2006.
- H. Huzita and B.Scimemi, The algebra of paper-folding (Origami), Proceed. of the meeting of Origami Science and Technology, Ferrara 1989.
- B. Scimemi *Algebra e Geometria in Matematica: gioco ed apprendimento*, a cura di B.d'Amore, ed. Apeiron, Bologna,1990.
- B. Scimemi, Draw of a regular heptagon by the folding," *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Humiaki Huzita, ed., 1989
- T.S. Row, *Geometric Exercises in Paper Folding*, Chicago: The Open Court Pub.Co., 1905, reprint by Dover Pub.Inc., New York, 1966.
- [Origami Geometric Constructions](#) Thomas Hull

GRAZIE

antonio.criscuolo@unibg.it