

Un laboratorio PLS sulla successione di Fibonacci

Loredana Biacino*

*Università “Federico II” di Napoli
Dipartimento “R. Caccioppoli”, Via Cinthia, 80126 Napoli.

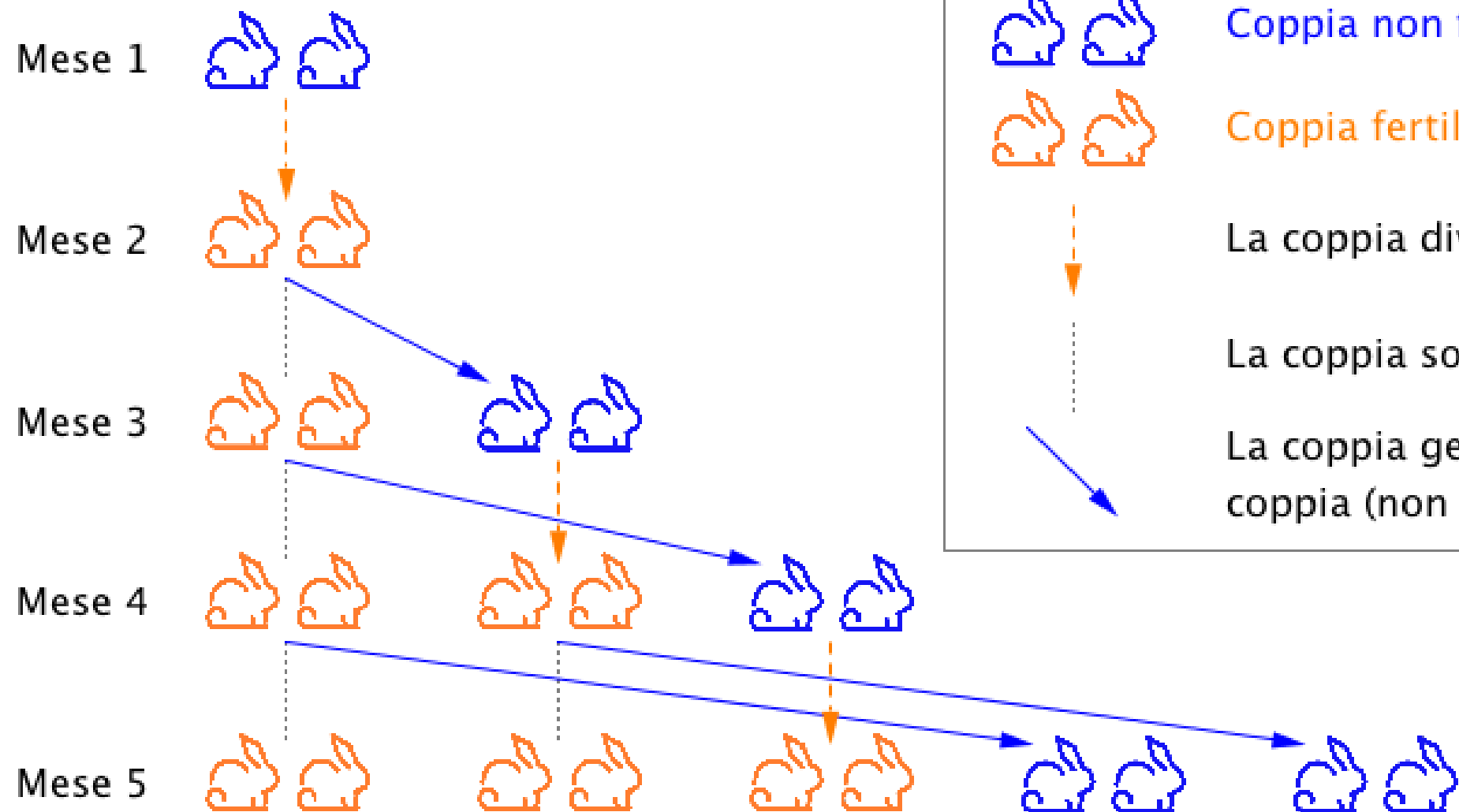
Scopo: introdurre il concetto di limite in maniera informale ma rigorosa.

Argomento principale : il numero aureo è definito a partire dalla successione di Fibonacci come elemento di separazione di una coppia di insiemi separati e contigui di numeri razionali.

Prerequisiti: le nozioni di successione, di successione crescente o decrescente, successione positivamente divergente, di coppia di insiemi separati e contigui.

Leonardo Pisano (Pisa c.1170-1240), detto Fibonacci, uno dei più grandi matematici che ci siano stati, propone, nel Cap. XII del suo *Liber Abaci*, scritto nel 1202, il seguente problema:

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo che era circondato da ogni parte da una parete per sapere quante coppie da essa fossero prodotte in un anno, la loro natura essendo che ogni mese fosse prodotta un'altra coppia e che cominciassero a figliare il secondo mese dopo la nascita.



Legenda:



Coppia non fertile



Coppia fertile



La coppia diventa fertile



La coppia sopravvive



La coppia genera un'altra
coppia (non fertile)

Fibonacci calcola il numero di coppie di conigli che si ottengono dopo un anno, considera che alla fine del primo mese le coppie saranno 2 e trova che alla fine di un anno le coppie saranno 377. Poi abbandona la questione.

Fibonacci considera un numero finito di passi, la generalizzazione a infiniti passi è avvenuta in seguito ed è di questa che ci siamo occupati.

La successione di Fibonacci è il primo esempio nella storia di una successione definita per ricorsione:

$$(1) \quad \begin{aligned} F_1 &= 1; F_2 = 1; \\ F_{n+2} &= F_n + F_{n+1}. \end{aligned}$$

I suoi primi termini sono: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610

La successione diverge.

I termini diventano sempre più grandi scavalcando ogni numero prefissato. Con gli smartphone gli studenti hanno verificato che fissato $M=100$, i termini della successione sono maggiori di 100 a partire da $F_{12}=144$; fissato $M=1000$ sono maggiori di 1000 a partire da $F_{17}=1597$; e così via, i termini della successione crescono molto più velocemente dei numeri naturali, dato M c'è un termine F_r più grande di M e tutti i termini F_n con $n>r$, essendo maggiori di F_r , sono maggiori di M .

Gli studenti hanno ipotizzato una crescita esponenziale. Si può verificare che è quasi esponenziale. Non è stata esposta la formula di Binet, valida per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

Una successione dedotta dalla precedente.

Si consideri la successione di termine generale:

$$(2) \quad x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n},$$

1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, 89/55, ...

Dividendo ambo i membri della (1) per F_{n+1} si ottiene:

$$(3) \quad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

I ragazzi hanno calcolato i primi termini con gli smartphone ...

$$\begin{aligned} x_1=1 < x_3=1,5 < x_5=\frac{8}{5}=1,6 < x_7=\frac{21}{13}=1,615384 < x_9=\frac{55}{34}=1,6176 < \\ x_{11}=\frac{144}{89}=1,6179 < x_{13}=\frac{377}{233}=1,618026 < \dots < x_{14}=\frac{610}{377}=1,618037 < x_{12} \\ =\frac{233}{144}=1,61805 < x_{10}=\frac{89}{55}=1,6181 < x_8=\frac{34}{21}=1,61904 < x_6=\frac{13}{8}=1,625 < x_4=\frac{5}{3} \\ =1,\overline{6} < x_2=2. \end{aligned}$$

Procedimento euristico

I ragazzi si sono resi conto, disponendo i numeri su una retta, che:

- i) le x con indice dispari crescono;
- ii) le x con indice pari decrescono;
- iii) tutte le x con indice dispari sono più piccole di tutte le x con indice pari;
- iv) i termini vanno sempre più avvicinandosi tra loro.

Un ragazzo, osservando il comportamento degli elementi di indice dispari e di quelli di indice pari ha esclamato: “Cosa c’è qua in mezzo?” E ha inserito un punto interrogativo nel ristrettissimo spazio che separava gli elementi di un tipo da quelli dell’altro tipo.

Verifica di carattere logico-aritmetico.

Ai ragazzi era stata data una scheda, dove il percorso era suddiviso in una serie di verifiche. Una consisteva nel provare che, date le frazioni, diverse l'una dall'altra:

$y_1 = \frac{a}{b}$, $y_2 = \frac{a+b}{a}$, $y_3 = \frac{2a+b}{a+b}$, $y_4 = \frac{3a+2b}{2a+b}$, $y_5 = \frac{5a+3b}{3a+2b}$ con a e b naturali, si verifica che:

j) $y_1 < y_3$ equivale a $y_3 < y_5$;

jj) o $y_{2n-1} < y_{2n}$ per $n=1,2$ oppure $y_{2n-1} > y_{2n}$ per $n=1,2$.

Dim. di j): $y_1 < y_3$ equivale a $a^2 < b(a+b)$; ma ciò equivale a $y_3 < y_5$.

Dim. di jj) : $y_1 < y_2$ equivale a $a^2 < b(a+b)$ e quindi è equivalente a $y_3 < y_4$.

Dimostrazione di quanto ipotizzato nei casi particolari.

Da j) segue che poiché $x_1 < x_3$ è anche $x_3 < x_5$ e così via, cioè la successione dei termini x_n con n dispari è crescente; inoltre, poiché $x_2 > x_4$ è anche $x_4 > x_6$ e così via, cioè tutti i termini della successione con indice pari decrescono. Sono così dim. i) e ii).

Dim. di iii). Per la jj), essendo $x_1 < x_2$, tutti i termini con indice dispari sono inferiori a tutti i termini con indice pari.

Inoltre dalla (3) si ricava, per $n > 1$:

$$(4) \quad |x_{n+1} - x_n| = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{x_n x_{n-1}} < \frac{4}{9} |x_n - x_{n-1}| < \left(\frac{4}{9}\right)^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| < \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} |x_2 - x_3| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

La differenza a primo membro é piccola quanto si vuole, prendendo n opportunamente grande. Infatti ogni termine della successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$ si ottiene dal precedente dividendolo a metà: è evidente che per ogni $\varepsilon > 0$ si può trovare un termine della successione che sia più piccolo di ε . (Euclide, Elementi, Libro 10, Prop. 1).

Basta risolvere la disequazione $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$, equivalente a $2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon}$ che ha come soluzione tutti i numeri naturali $n > \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + 1$.
Vale quindi anche la iv).

Conclusione

I due insiemi:

$$A=\{x_{2n-1}, n\in N\}; \quad B=\{x_{2n}, n\in N\}$$

sono separati, A è il minorante, B il maggiorante.

Per ogni $\varepsilon>0$ si può determinare $n\in N$ tale che $|x_{n+1}-x_n|< \varepsilon$, cioè A e B sono contigui: quindi esiste uno ed un solo elemento separatore, cioè un numero reale, ϕ , tale che

$$x_{2n-1} \leq \phi \leq x_{2k} \quad \text{per ogni } n\in N \text{ e } k\in N.$$

Da (x_n) si deduce che la parte intera di ϕ è 1, la prima cifra decimale è 6, la seconda 1, la terza 8, la quarta 0; proseguendo nel calcolo degli elementi di (x_n) si possono ottenere tante cifre decimali esatte quante se ne vogliono.

Il numero determinato è rappresentato dalla seguente scatola cinese:

$[1;2], [3/2;5/3], [8/5;13/8], [21/13; 32/21], \dots [x_{2n-1}, x_{2n}], \dots$

che fornisce in contemporanea approssimazioni per difetto e per eccesso.

ϕ è il limite della successione (x_n) .

Infatti dato un qualunque intervallo $] \phi-h, \phi+h[$, poiché ϕ appartiene all'intervallo i cui estremi sono x_{n+1} e x_n per ogni n , per la (4) se consideriamo r tale che sia $2^{r-1} > \frac{1}{h}$ allora $|x_{r+1} - x_r| < h$ e quindi $x_n \in] \phi-h, \phi+h[$ per $n > r$ e quindi ϕ è il limite della successione (x_n) .

Il numero aureo. Trattandosi di ragazzi di quarta, abbiamo considerato ϕ come limite di (x_n) in modo intuitivo, senza usare la parola limite. Poiché i termini della successione (x_n) sono comunque prossimi a ϕ , prendendo n opportunamente grande possiamo sostituire ϕ al loro posto nella formula

$$(3) \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

commettendo un errore piccolo quanto si vuole. Pertanto:

$$(4) \qquad \phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Una ragazza ha osservato che in (3) compaiono x_n e x_{n+1} , che danno lo stesso contributo in (4). I ragazzi si sono resi conto che quanto più grande è n tanto è minore la differenza tra x_n e x_{n+1} , fino a poter essere trascurata.

Dalla (4) si trae:

$$(5) \quad \phi^2 = \phi + 1.$$

Risolvendo la (5) si ottiene $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033 \dots$,

un irrazionale, come i ragazzi hanno dimostrato.

ϕ è noto come **numero aureo**, perché dalla (4), ponendo

$$x = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618033 \dots$$

otteniamo

$$(6) \quad x^2 = 1 - x,$$

cioè x è la sezione aurea dell'unità.

Moltiplicando per ϕ ambo i membri della (5) si ha: $\phi^3 = \phi^2 + \phi = 2\phi + 1$;

iterando: $\phi^4 = 2\phi^2 + \phi = 3\phi + 2$ e ancora: $\phi^5 = 3\phi^2 + 2\phi = 5\phi + 3$ e in generale:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}.$$

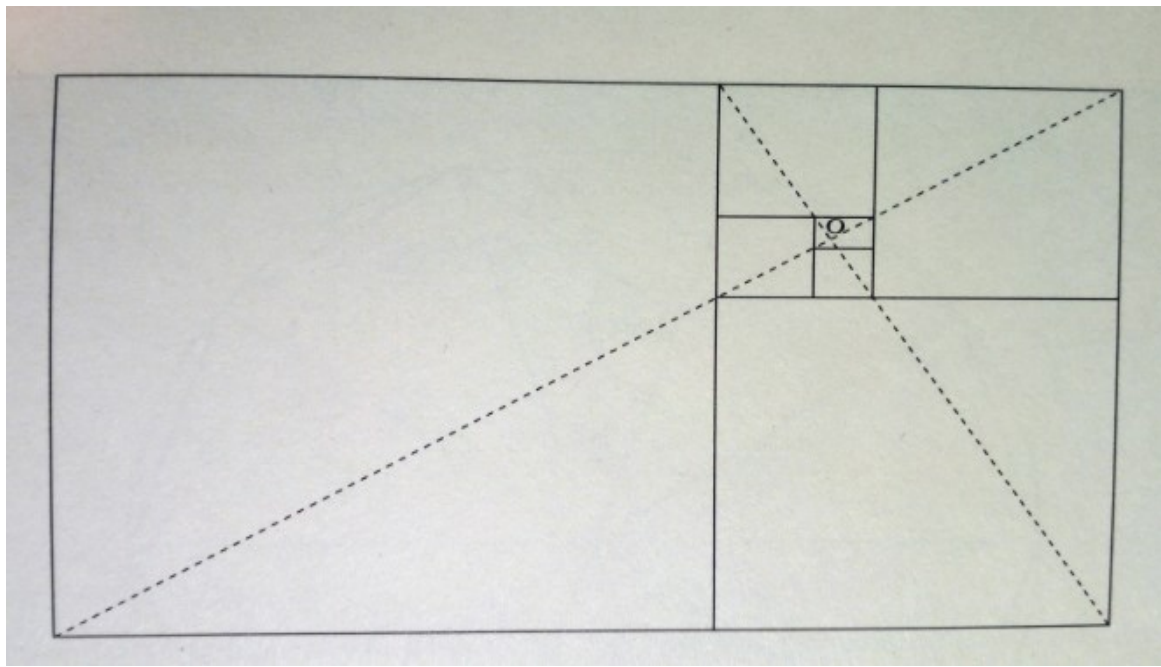
Sezione aurea di un segmento.

Il discorso si può ripetere per un segmento di lunghezza L la cui sezione aurea è allora data da $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} L = L.0,618033 \dots$

Si è passati alla costruzione della sezione aurea di un segmento, e alla verifica di alcune proprietà, quali:

Se x è la sezione aurea di L , allora $L-x$ è la sezione aurea di x e L è la sezione aurea di $L+x$.

Dato un rettangolo R aureo, cioè tale che un lato x sia la sezione aurea dell'altro L , se dal rettangolo eliminiamo il quadrato di lato x adiacente ad uno dei lati x , il rettangolo che si determina è ancora un rettangolo aureo e questa operazione può quindi essere ripetuta indefinitamente ottenendo una successione di rettangoli aurei uno contenuto nell'altro.



Nella figura i quadrati si succedono l'uno all'altro in verso orario. I rettangoli sono tutti simili a R : quindi quelli disposti nello stesso verso di R hanno tutti una diagonale sovrapposta a una diagonale d_1 di R , mentre quelli disposti nell'altro verso abbiano tutti una diagonale sovrapposta alla diagonale d_2 del primo rettangolo aureo ottenuto da R , uscente dal vertice di R che segue in verso orario quello da cui esce d_1 . Tutti gli infiniti rettangoli aurei hanno in comune il punto d'intersezione di d_1 e di d_2 .

L'operazione inversa consiste nel partire da un rettangolo aureo di lati L e x e nel costruire sul lato L il quadrato ottenendo il rettangolo aureo di lati L e $L+x$; ripetendo l'operazione quante volte si vuole, si ottiene una configurazione simile a quella in figura.

E' ben noto che:

Il **lato di un decagono regolare** è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta.

Nel **pentagono regolare il lato** è la sezione aurea della diagonale.

Albert Girard (morto nel 1633) nella traduzione in francese dei libri V e VI dell'Aritmetica di Diofanto usa i numeri di Fibonacci (senza citarlo) per determinare la sezione aurea di un segmento e osserva che 13, 13 e 21 costituiscono abbastanza bene la misura dei lati di un triangolo isoscele avente l'angolo di un pentagono regolare.

Un caso simile.

Cosa si può dire di una successione tipo Fibonacci che comincia con due numeri diversi da 1 e 1?

Consideriamo ad esempio la successione costruita partendo da 7 e 9;

$$H_1=7, H_2=9, H_{n+1}=H_n+H_{n-1} \text{ per } n>2; \text{ i cui primi termini}$$

sono:

$$7, 9, 16, 25, 41, 66, 107, 173, 280, \dots$$

Costruiamo la successione (z_n) ponendo $z_n = \frac{H_{n+1}}{H_n}$ per ogni $n \in N$. Risulta:

$$z_1 = \frac{9}{7} = 1,28; \quad z_2 = \frac{16}{9} = 1,77; \quad z_3 = \frac{25}{16} = 1,5625; \quad z_4 = \frac{41}{25} = 1,64; \quad z_5 = \frac{66}{41} = 1,609;$$

$$z_6 = \frac{107}{66} = 1,62; \quad z_7 = \frac{173}{107} = 1,6168; \quad z_8 = \frac{280}{173} = 1,6184; \quad \text{etc....}$$

Una riflessione.

L'andamento della successione (x_n) (come quello della successione (z_n)) è molto disciplinato e armonioso: infatti i suoi termini alternativamente stanno a sinistra o a destra di ϕ , e vi si avvicinano indefinitamente da un lato e dall'altro sempre di più. E poi il valore ϕ è riconosciuto sin dall'antichità come simbolo di perfezione e regola di bellezza.

La successione (x_n) in sé fornisce un esempio abbastanza semplice di quella che a volte vien detta la bellezza della matematica, l'elemento cui si avvicina essendo esso stesso metro di bellezza. Il suo andamento suggerisce la visione di una bella scalinata a due rampe, a sinistra e a destra, che portano allo stesso incantevole ingresso.

La formula per il calcolo approssimato dei numeri di Fibonacci

Jacques Binet (Rennes 1786-Parigi 1856) dimostrò nel 1843 la seguente formula, già nota ad Eulero, de Moivre e Daniel Bernoulli:

$$(7) \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

E' utile per il calcolo approssimato dei valori di F_n per n grande. Infatti per tali valori il termine $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ diventa trascurabile e quindi $F_n \cong \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$, che permette di pervenire al valore corretto, essendo questo intero. Ad es. per $n=11$ si ricava: $F_{11} \cong 89,0538$, essendo $F_{11} = 89$.

Ora consideriamo una successione generalizzata di Fibonacci:

$$a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, \dots$$

I termini di questa successione sono:

$$G_1=a, G_2=b, G_{n+1}=G_n+G_{n-1}, \text{ con } a \text{ e } b \text{ interi e } n>1.$$

Risulta:

$$G_1=a, G_2=b, G_{n+1}=aF_{n-1}+bF_n$$

Per la formula di Binet si può scrivere, per $n>1$:

$$G_{n+1}=a\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]+b\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

che si può ordinare ottenendo:

$$G_{n+1} = \frac{2a+b+b\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \frac{2a+b-b\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$$

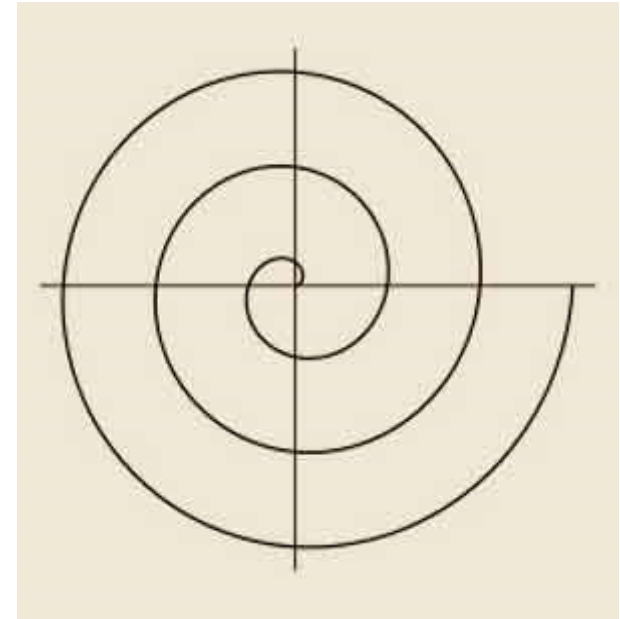
Per $a=b=1$ si riottiene la formula di Binet; invece per $a=2$ e $b=1$ si ottiene

$$\frac{2a+b+b\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \frac{2a+b-b\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

e quindi

$$G_{n+1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

cioè l'espressione determinata dal matematico francese Edouard Lucas per il termine generale della successione $V_0 = 2, V_1 = 1, V_{n+1} = V_n + V_{n-1}$.

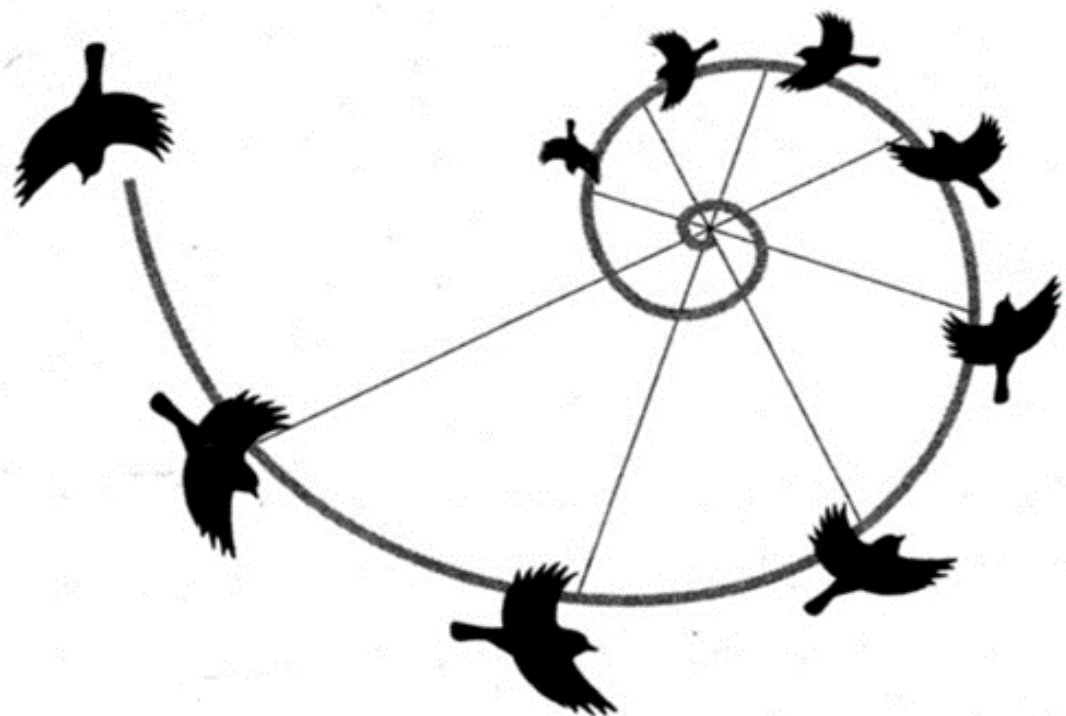


La spirale aurea

La curva di equazione $r=r(t)=ab^t$ in coordinate polari, con $a>0$, $b>0$, $b\neq 1$ e dove t è l'angolo e r la distanza del punto variabile P dal punto O , il polo della spirale, si dice *spirale logaritmica*.

La spirale di Archimede ha invece equazione $r=r(t)=at$; mentre nella prima la distanza delle spire dall'origine aumenta in progressione geometrica, nella seconda esse sono egualmente distanziate .

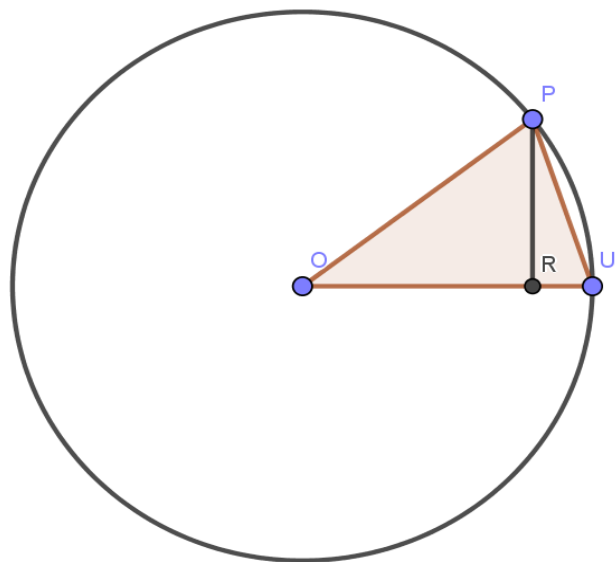
La spirale logaritmica fu da Cartesio detta *spirale equiangola*: un raggio uscente dal polo interseca la curva formando angoli eguali. Il falco pellegrino se ne serve quando caccia: invece di percorrere il tratto rettilineo che lo divide dalla preda, che è più breve e gli permetterebbe di correre più velocemente, percorre una traiettoria a forma di spirale: i suoi occhi non vedono innanzi, ma lateralmente e quindi il falcone può tenere sott'occhio la preda osservandola sempre sotto lo stesso angolo pur tenendo la testa dritta.



Dimostrazione:

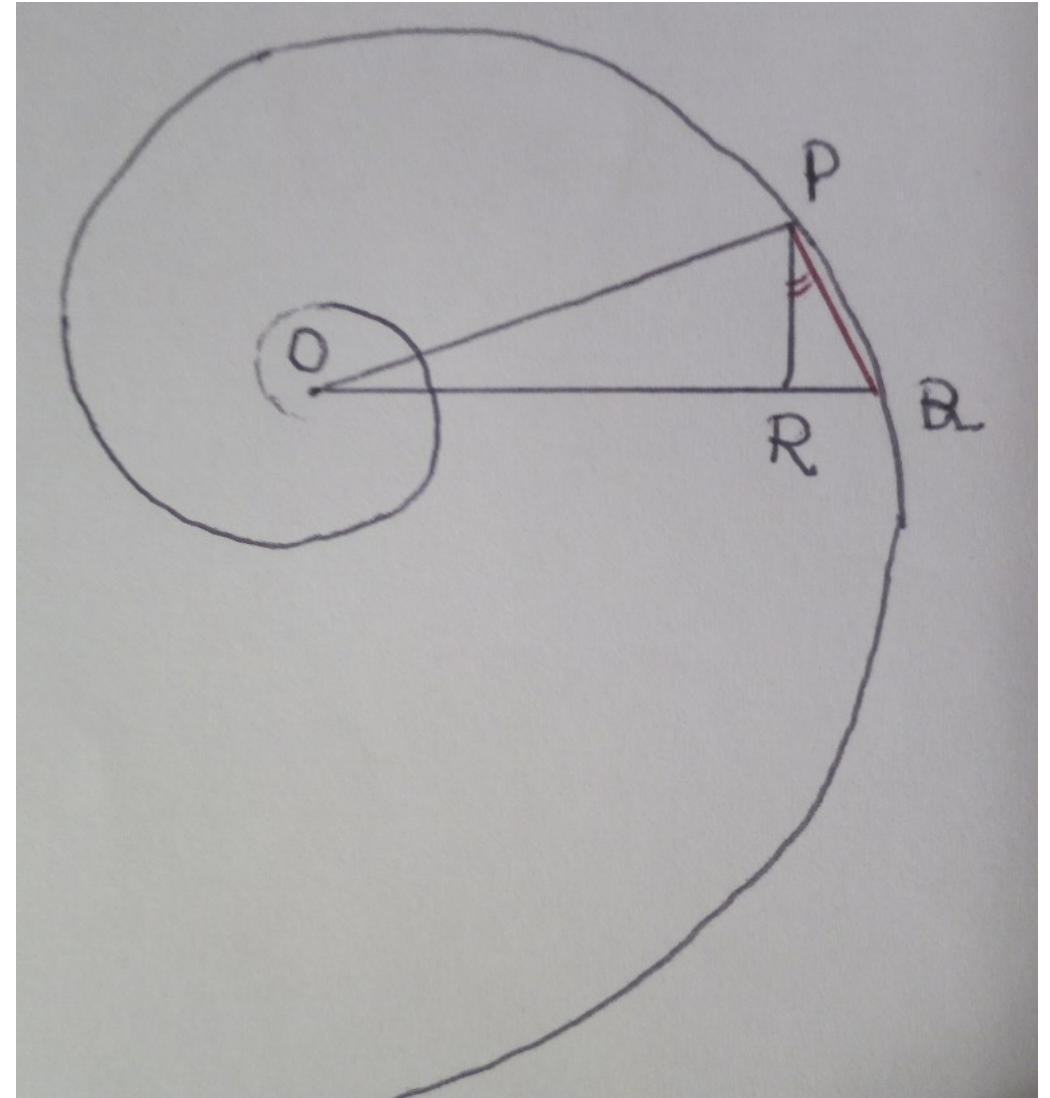
Cominciamo con l'osservare che, data una circonferenza di centro O e due raggi OU e OP , se R è la proiezione ortogonale di P su OU e Δt è l'angolo UOP allora : $PR = r \sin \Delta t$ e $OP - OR = r(1 - \cos \Delta t)$.

Quindi, poiché, per Δt tendente a 0, $\lim \sin \Delta t / \Delta t = 1$ e $\lim (1 - \cos \Delta t) / \Delta t = 0$, è lecito confondere, se Δt è molto piccolo, PR con l'arco $PU = r \Delta t$, e supporre i due segmenti OP e OR eguali.



Consideriamo un punto P tale che $r = r(t) = ab^t$ e il punto vicino Q tale che $r = r(t + \Delta t) = ab^{t + \Delta t}$ e sul segmento OQ consideriamo il piede R della perpendicolare condotta da P su OQ . A meno di infinitesimi di ordine superiore si può supporre $OR = OP$. Allo stesso modo il segmento PR può essere confuso con un arco di circonferenza di centro O e raggio OP e quindi $PR = r(t) \Delta t$.

Quindi nel triangolo rettangolo PQR si ha:
 $QR = PR \operatorname{tg} \tau$, τ essendo l'angolo che PQ
 forma con PR , inoltre $QR = r(t + \Delta t) - r(t)$,
 quindi $\operatorname{tg} \tau = \frac{b^{\Delta t} - 1}{\Delta t}$. Pertanto, passando al
 limite, la $\operatorname{tg} \tau$ tende alla derivata di b^t
 calcolata in $t=0$, cioè a $\log b$, e quindi è
 indipendente dal punto P da cui siamo
 partiti. Inoltre la retta PR tende alla
 normale a OP . Ne segue che anche
 l'angolo che la tangente geometrica,
 posizione limite di PQ al tendere a zero di
 Δt , forma con tale normale e quindi con
 OP è costante al variare di P .

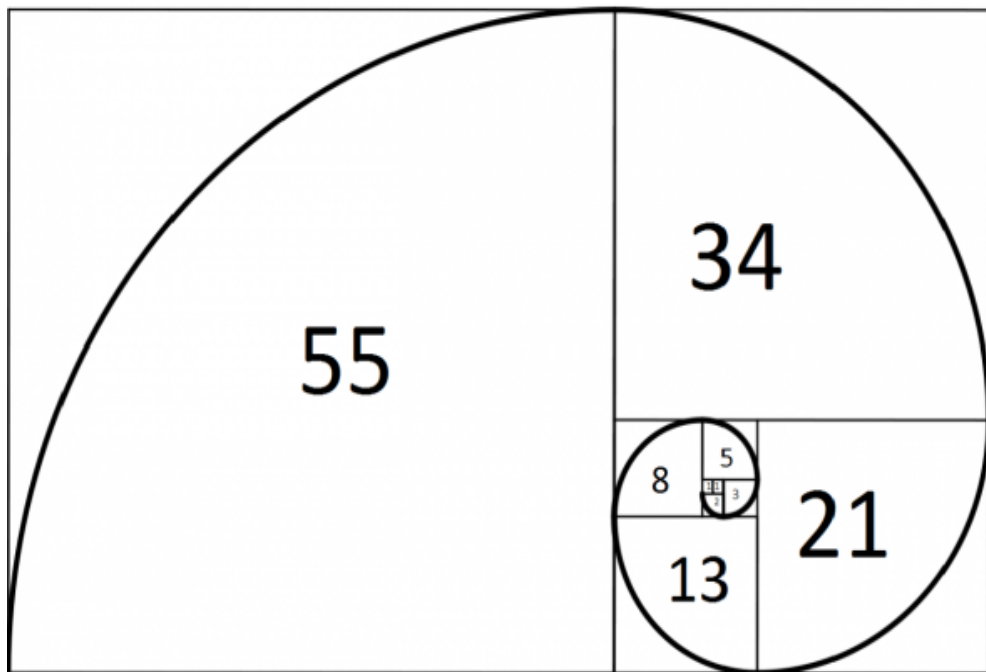


*Una spirale logaritmica tale che i raggi successivi corrispondenti ai valori $t=0$, $t=\pi/2$, $t=\pi$ etc... stiano nel rapporto aureo ϕ si dice **spirale aurea**. In una qualunque spirale logaritmica i raggi successivi corrispondenti ai precedenti valori di t stanno nel medesimo rapporto $b\pi/2$. Quindi nel caso della spirale aurea b deve essere tale che $b\pi/2=\phi$.*

Un'approssimazione della spirale aurea: la spirale di Fibonacci

Consideriamo ora una spirale costruita al seguente modo: partiamo da un rettangolo di lati 2 e 1, consideriamo una semicirconferenza inscritta con diametro sul lato più lungo. Inseriamo tale rettangolo in uno di lati 2 e 3, aggiungendo il quadrato di lato 2 sul lato più lungo e, partendo da un estremo di questo tracciamo un arco di circonferenza di raggio 2 con centro nell'altro estremo, inseriamo il rettangolo di lati 2 e 3 in un rettangolo di lati 3 e 5, aggiungendo il quadrato di lato 3 sul lato più lungo; al precedente arco aggiungiamo quindi un arco di circonferenza di raggio 3 e procedendo alla stessa maniera consideriamo

un arco di raggio 5, poi 8 e così via aggiungiamo archi i cui raggi sono i successivi termini della successione di Fibonacci. Proseguendo indefinitamente otterremmo una spirale che è un'ottima approssimazione della spirale aurea. Infatti, ai primi passi da noi svolti troviamo i rapporti tra i raggi $5/3=1,6$; $8/5=1,6$; $13/8=1,625$; $21/13=1,615384$; tutti già molto vicini al valore di ϕ .



Alcune proprietà della successione di Fibonacci e di successioni generalizzate di Fibonacci

La successione di Fibonacci gode di molte proprietà; ne elenchiamo alcune, che si dimostrano quasi tutte per induzione e applicazione della formula ricorsiva.

a) La somma dei primi n termini della successione di Fibonacci è eguale al termine $(n+2)$ -simo meno uno:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Ad esempio $1+1+2+3+5+8=21-1=20$. Tale relazione può essere estesa a tutte le successioni generalizzate di Fibonacci. Precisamente, data la successione

$G(1), G(2), G(3), \dots$, si ha:

$$(*) \quad G(1) + G(2) + \dots + G(n) = G(n+2) - G(2),$$

che si dimostra per induzione. Infatti risulta: $G(1) + G(2) = G(3) = G(4) - G(2)$;

Inoltre supposto che sia vera per $n=k$, si ha

$$G(1) + G(2) + \dots + G(k+1) = G(k+2) - G(2) + G(k+1) = G(k+3) - G(2)$$

b) La somma dei primi termini dispari della successione di Fibonacci è eguale al primo termine successivo all'ultimo considerato, cioè:

$$F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Ad esempio $1+2+5+13=21$.

Possiamo estendere con una piccola modifica il risultato ad una successione generalizzata di Fibonacci. Precisamente, riferendoci alla $G(n)$:

$$G(1) + G(3) + \dots + G(2n-1) = G(2n) + G(1) - G(2),$$

che, come prima, si dimostra per induzione.

c) Segue da a) e b) che la somma di tutti i termini di posto pari da F_2 a F_{2n} è eguale a $F_{2n+1} - 1$.

Per una successione di Fibonacci generalizzata si avrà quindi:

$$G(2) + G(4) + \dots + G(2n) = G(2n+1) - G(1).$$

d) La somma di un numero dispari di prodotti di successivi numeri di Fibonacci a partire dal primo è eguale al quadrato dell'ultimo numero considerato.

Ad esempio $1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 8 = 8^2$.

Questa proprietà si dimostra con un ragionamento geometrico per induzione, quindi affinché sia verificata da una successione di Fibonacci generalizzata, essa deve essere verificata dai primi tre prodotti, cioè se $a, b, a+b, a+2b$ sono i primi elementi della successione, deve essere $a \cdot b + b \cdot (a+b) + (a+b) \cdot (a+2b) = (a+2b)^2$, cioè $ab = b^2$, che è verificata **solo da $a=b$ oppure $b=0$** , casi che a meno di una costante moltiplicativa, si riducono alla successione di Fibonacci.

e) Dati tre numeri consecutivi di Fibonacci, F_{n-1}, F_n, F_{n+1} si ha:

$$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} \mp 1.$$

Questa proprietà dà luogo ad un interessante paradosso.

Paradosso della scomposizione del quadrato. È possibile scomporre un quadrato di area 64 ed ottenere un rettangolo di area 65.

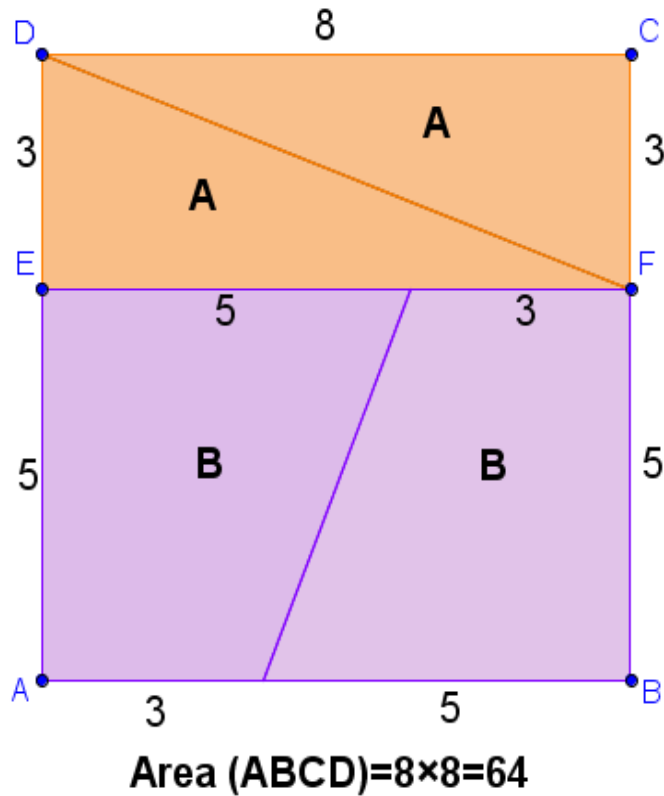


Figura a

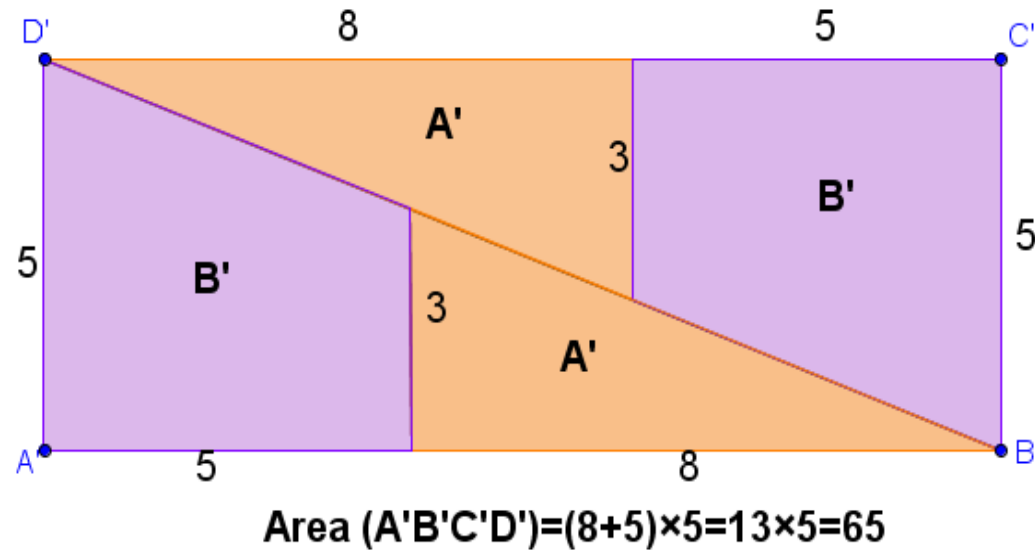
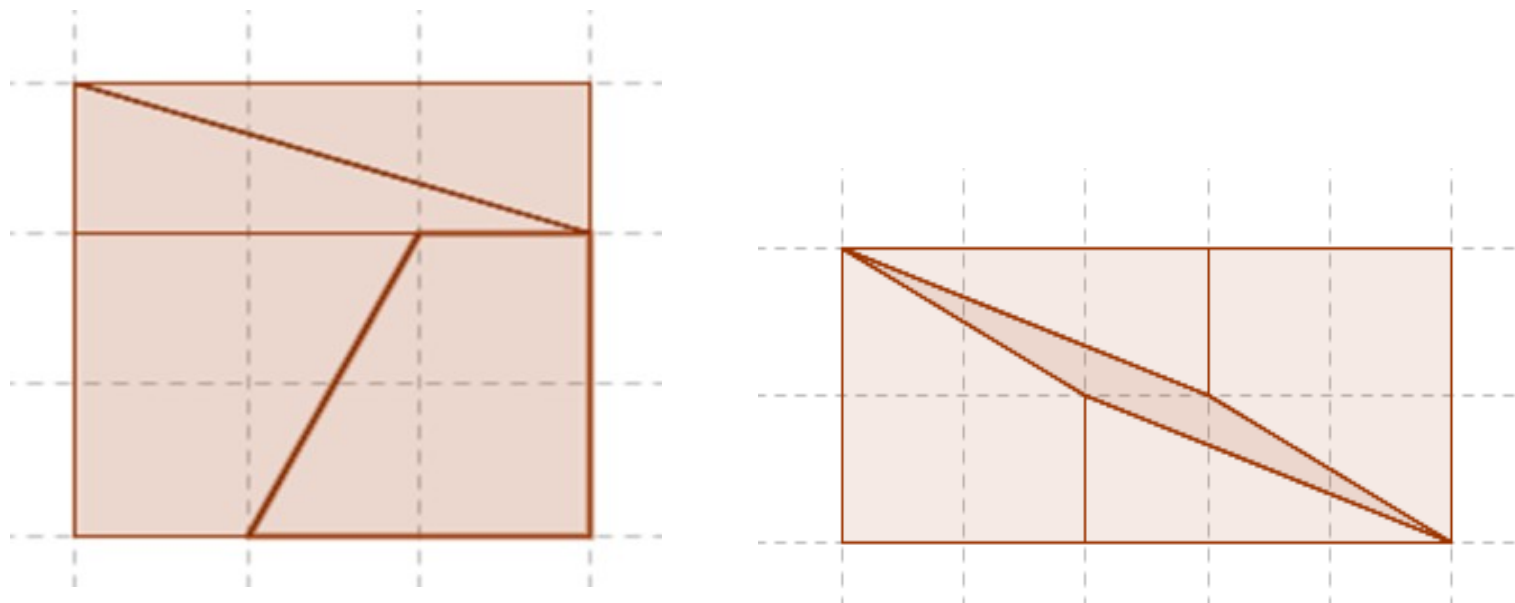


Figura b

La spiegazione del paradosso sta nel fatto che i quattro pezzi in cui viene suddiviso il quadrato di partenza non combaciano esattamente quando si vanno a ricomporre nel rettangolo. Infatti, con riferimento alla figura b, il lato obliquo del trapezio rettangolo in basso ha una pendenza di $(5-3)/5 = 2/5$ mentre l'ipotenusa del triangolo rettangolo in basso ha una pendenza di $3/8$. Ovviamente essendo $2/5 = 16/40$ e $3/8 = 15/40$ risulta che la prima è maggiore della seconda. Similmente avviene per il trapezio ed il triangolo in alto. In definitiva nel ricomporre la figura appare un foro dalla forma di un parallelogramma molto sottile la cui area, pari ad una unità, spiega l'apparente paradosso.



Questo paradosso si verifica ogni volta che il quadrato considerato ha come lunghezza del lato un numero presente nella successione di Fibonacci e poi viene scomposto in pezzi le cui lunghezze dei lati sono i numeri della successione che lo precedono.

Questa proprietà non è verificata da una qualunque successione generalizzata: ad es. se consideriamo la successione di Lucas 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... e i termini 3, 4, 7 si ha $4^2=16$ mentre $3*7=21$.

E' però vera in generale la relazione: $G(n)^2 = G(n-1)*G(n+1) - [G(1)^2 - G(2)^2 + G(1)*G(2)]$.

Infatti se per tre numeri $a, b, a+b$ si ha la relazione $b^2 - a*(a+b) = K$ allora per i numeri $b, a+b, a+2b$ sussiste la relazione $(a+b)^2 - b*(a+2b) = -K$.

Se ne deduce che la proprietà vale in generale come enunciata per induzione.

f) La somma di dieci numeri di Fibonacci consecutivi è divisibile per 11.

Questa proprietà sussiste anche per successioni generalizzate essendo per queste:

$$G_1 = a, \quad G_2 = b, \quad G_{n+1} = aF_{n-1} + bF_n$$

g) Dati comunque quattro numeri di Fibonacci consecutivi, il prodotto degli estremi, il doppio del prodotto dei medi e la somma dei quadrati dei medi formano una terna pitagorica.

Si può fare facilmente una verifica diretta della proprietà, che è **valida per ogni successione generalizzata**. Ad esempio se consideriamo la successione di Lucas 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... e si considerano i quattro numeri 3, 4, 7, 11, si verifica facilmente che i tre numeri $3 \cdot 11 = 33$, $2 \cdot 4 \cdot 7 = 56$, $4^2 + 7^2 = 65$ costituiscono una terna pitagorica.

h) Due numeri di Fibonacci consecutivi sono coprimi.

Questa proprietà si può estendere a tutte le successioni generalizzate di Fibonacci che iniziano con due coprimi.

i) Dati quattro numeri di Fibonacci consecutivi La differenza dei quadrati di due intermedi è eguale al prodotto dei due estremi.

Questa proprietà si può estendere come la precedente a tutte le successioni generalizzate di Fibonacci, essendo, dati comunque i numeri $a, b, a+b, a+2b$,

$$(a+b)^2 - b^2 = a(a+2b).$$

l) La somma dei quadrati dei numeri di Fibonacci di posto n e $n+1$ è eguale al numero di posto $2n+1$.

Questa proprietà non può essere estesa alle successioni generalizzate di Fibonacci: ad esempio per la successione di Lucas 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... risulta $G(4)^2 + G(5)^2 = 16 + 49 = 65$ mentre $G(9) = 47$.

Bibliografia minima

Fernando Corbalàn, *La sezione aurea, Il linguaggio matematico della bellezza*, Mondo Matematico, 2011.

Mario Livio, *La sezione aurea*, Rizzoli, 2003.

Edouard Lucas, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure*, Bollettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, Roma, Tomo X, marzo, aprile e maggio 1877.

Pier Daniele Napolitani, *Fibonacci, La rinascita della matematica in occidente*, Corriere della sera, 2016.

L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abbaci*, Springer, 2003.