



Convegno Nazionale

***L'attualità degli insegnamenti dei grandi Maestri della
Mathesis nella seconda metà del secolo XX:***

nuove prospettive nella didattica e nei fondamenti della Matematica

**Alla ricerca di massimi e minimi
in modo inconsueto**

**Rimini 20 aprile 2018
Silvana Bianchini
Mathesis-Firenze**

I problemi di massimo e minimo

- sono **interessanti** e, volendo, anche “**belli**”, perché domandano un qualcosa che suscita curiosità
- si **cerca il modo** di rendere massima o minima una quantità
- una ricerca che ha affascinato da sempre l'uomo

Il concetto di massimo e minimo lo si ritrova nei problemi più antichi

- negli elementi di **Euclide (inizio III sec. a.C.)**:
proposizione 27 del libro VI in cui si fa riferimento al massimo di una grandezza geometrica (area di un parallelogramma)
- in **Apollonio (III-II sec. a.C.)** studio della minima o massima distanza di un punto da una conica
- **Zenodoro**, attivo in Atene probabilmente nella prima metà del II sec. d.C., affronta i problemi sulle proprietà isoperimetriche dei poligoni regolari e del cerchio

- **nel Medioevo** si assiste all'applicazione di questi concetti nella ristrutturazione delle città che vengono circondate da cinta murarie per la difesa. L'obiettivo era quello di racchiudere la città in un perimetro minimo



pianta medievale di Milano

Non poteva essere diversamente

➤ se, come dice **Pierre de Fermat**

"la natura agisce nei modi e mezzi che sono i più semplici e rapidi"

➤ se, come afferma **Eulero**

"nulla accade nell'universo senza che si renda evidente una qualche regola di minimo e di massimo"

Solitamente si affrontano al quinto anno dopo aver trattato le proprietà delle derivate

Ha senso **aspettare proprio l'ultimo anno?**

- gli studenti, al quinto anno, si trovano in una **situazione didatticamente non favorevole** per il poco tempo a disposizione: **sono portati a memorizzare il procedimento di calcolo** e ad applicarlo meccanicamente
- **non si rendono conto** di come la **natura geometrica del massimo e minimo** sia strettamente legata all'espressione analitica
- è auspicabile **iniziare** a lavorare su questo tipo di problemi già nel **secondo o anche al primo biennio**

Problema di Massimo di Regiomontano (1436-1476)

- **Giovanni Müller**, detto Regiomontano da Regiomons, nome latino del suo paese natale, Königsberg in Franconia, è un giovane **matematico e astronomo tedesco**
- Nel XV secolo comincia a modificarsi la concezione medioevale della natura e dell'uomo e si gettano le basi di quella rivoluzione culturale che avrà inizio nei secoli successivi e che coinvolgerà l'arte, la letteratura e anche la matematica: **il Rinascimento**
- Centro di questa rivoluzione è l'Italia. Come tutti i letterati, gli scienziati e gli artisti di questo periodo, anche Regiomontano scende in Italia per respirare la nuova atmosfera
- nella corrispondenza epistolare che ebbe con il compaesano Cristian Roder, emerge un problema di massimo definito dal **Loria** storico della matematica:

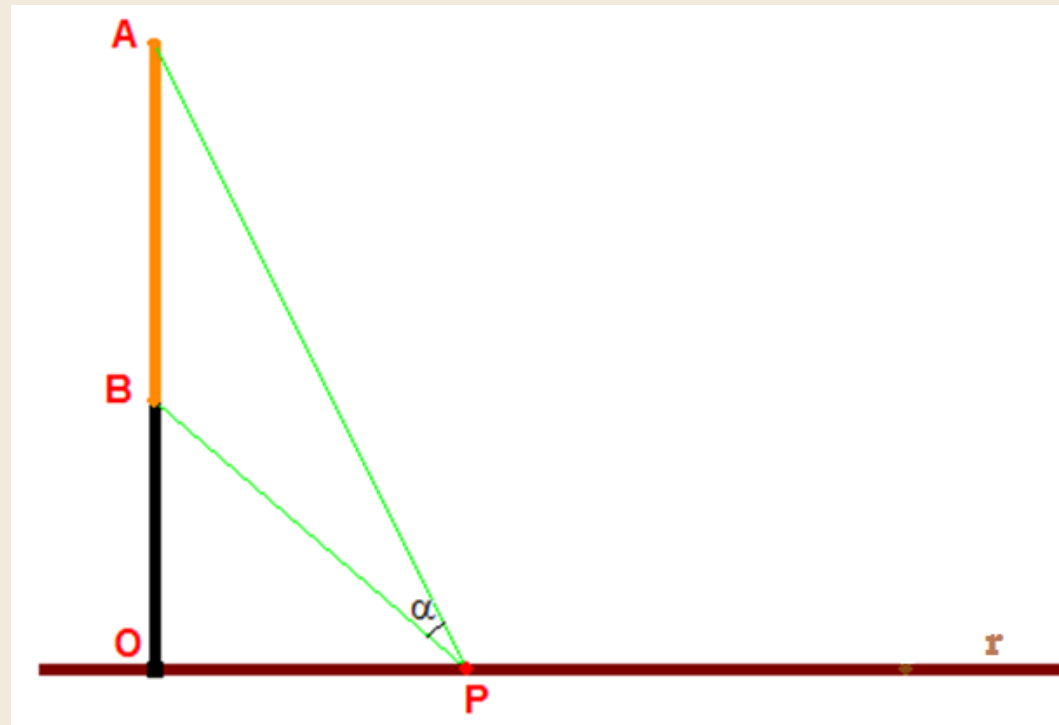
"il primo problema del genere che appaia nella letteratura dopo Apollonio"

Problema di Regiomontano

*"In quale punto della superficie terrestre un'asta sospesa verticalmente appare più lunga?"
(l'angolo di visuale è massimo?)*

AB asta di lunghezza **a**, **r** è la linea di terra
O piede della perpendicolare
condotta da B alla linea
di terra **r**

Si tratta di trovare sulla
linea di terra **r** il punto **P**
dal quale l'asta è vista
più lunga



Il problema è stato assegnato all'esame di stato del Liceo scientifico, anno 2014: quesito 3

Pag. 2/3



Sessione straordinaria 2014

Seconda prova scritta



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Y557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

Indirizzo: PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Un gruppo di attivisti antinucleari ha organizzato una marcia di protesta verso un sito scelto per la costruzione di una centrale termonucleare. Essi camminano, in pianura, con velocità costante, dirigendosi in linea retta verso le torri di raffreddamento dell'impianto, che sono già state costruite. Alle 7 uno degli organizzatori della marcia antinucleare vede la cima della torre di raffreddamento con un angolo di elevazione di 2° ; 30 minuti più tardi l'ampiezza dell'angolo è pari a 5° . Si calcoli a che ora il gruppo raggiungerà il cantiere, arrotondando il risultato al minuto.

2. Si calcoli il limite della funzione $\frac{(e^x - 1)^2}{3x^2 + 4x^3}$, quando x tende a 0.

3. Sia $AB = 2,5$ m l'altezza di una statua e $BP = 2$ m l'altezza del piedistallo su cui essa poggia. Si determini sul piano orizzontale passante per il punto P d'appoggio del piedistallo il luogo dei punti tali che da essi la statua sia vista sotto angolo massimo.

Perché non risolverlo al Primo o al Secondo Biennio?

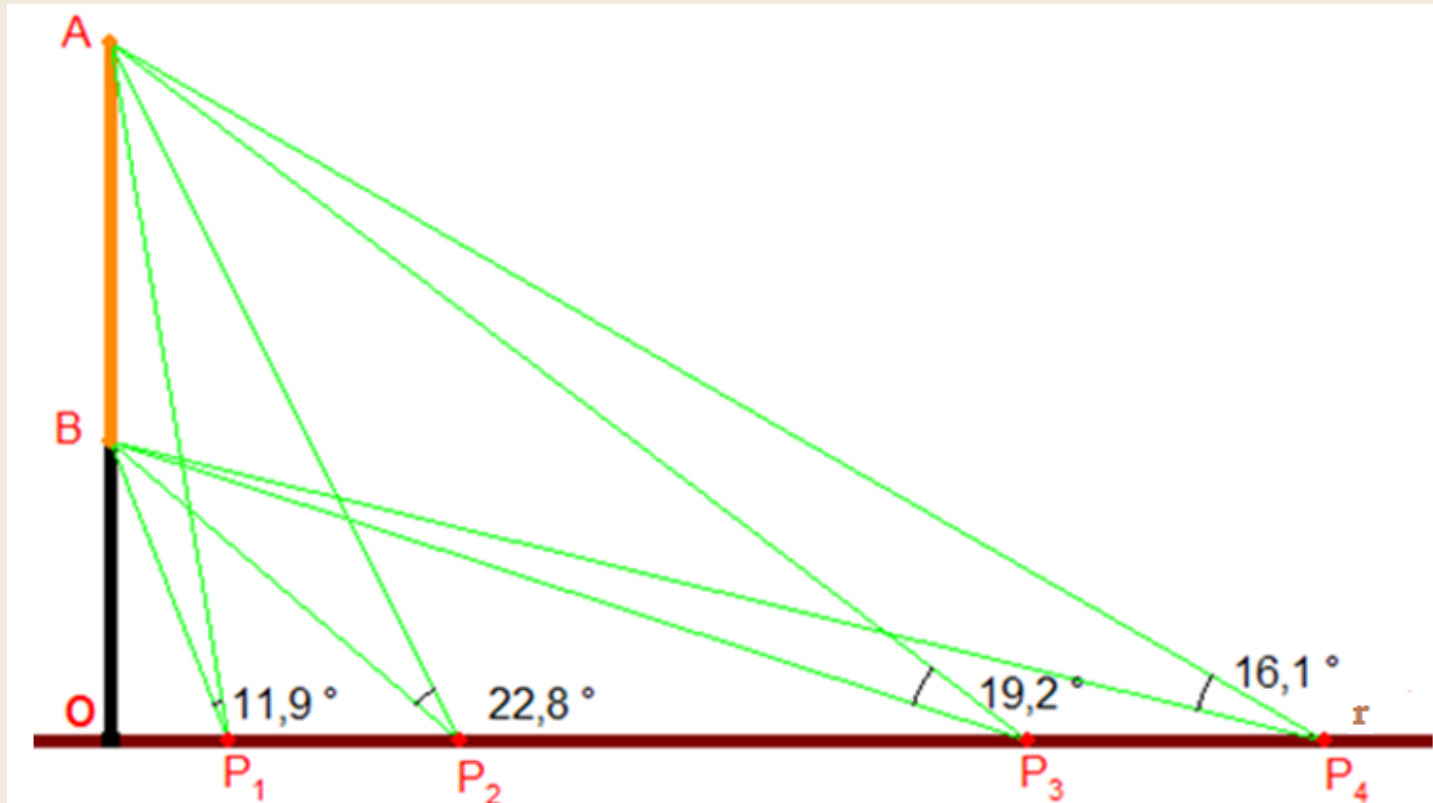
In che modo?

- guidando i ragazzi a **“riflettere per giungere ad un risultato”**, come consiglia il grande maestro **Bruno De Finetti** nel suo testo **“Il saper vedere in matematica”**
- il riflettere conduce l'allievo a **“capire e scoprire”** cosa bisogna guardare e osservare per dominare il problema: un percorso che **porta alla comprensione e la gioia del comprendere porta ad amare la matematica**
- De Finetti propone **un'educazione allo studio della matematica** avente il pregio di instaurare un **continuo passaggio dal concreto all'astratto e viceversa**
- **un'educazione** innovativa e rivoluzionaria ancora oggi attuale che **responsabilizza gli studenti e li rende attori** nello scenario matematico

Ci si domanda: esiste il massimo?

- Gli studenti **disegnano su dei fogli trasparenti**, in più punti della linea di terra r , **gli angoli di visuale** con cui viene vista l'asta **e ne misurano l'ampiezza** con un goniometro
- **Rilevano** che, man mano ci si allontana dall'asta, **le ampiezze degli angoli prima crescono e poi decrescono**

➤ deducono
**l'esistenza
del massimo**



L'importanza dell'attività manuale al primo biennio

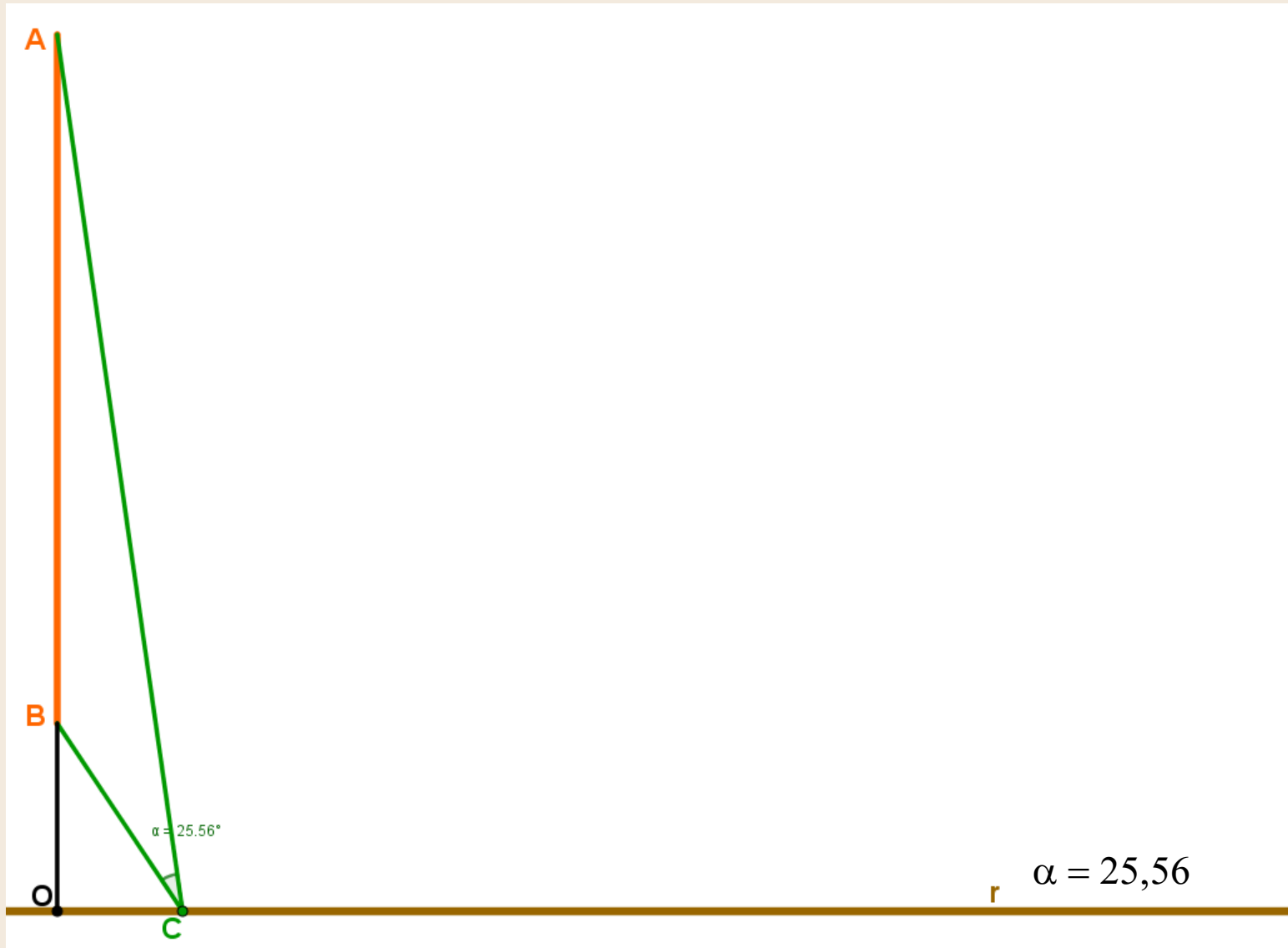
- L'uso di fogli trasparenti, matita, goniometro, tavoletta di legno può apparire non adeguato per studenti nati in un'era digitale
- in realtà l'attività manuale è molto importante dal punto di vista didattico, in quanto lascia traccia nel ragazzo e gli permette di "toccare con mano" la validità di ciò che sta cercando
- Per i più grandi, conviene utilizzare Geogebra

L'importanza dell'attività Geogebra

- È una attività da non sottovalutare perché porta lo studente a comprendere bene quali siano gli aspetti salienti da tenere presente per tradurre il problema in termini analitici
- Utilizzare Geogebra per rappresentare il problema, per visualizzarlo, per studiarlo è una fase importante che **dona concretezza** al lavoro del ragazzo e instaura in lui il desiderio e la gioia del capire che porta ad amare la matematica
- Ecco le **immagini della visione** dell'asta ottenute con Geogebra

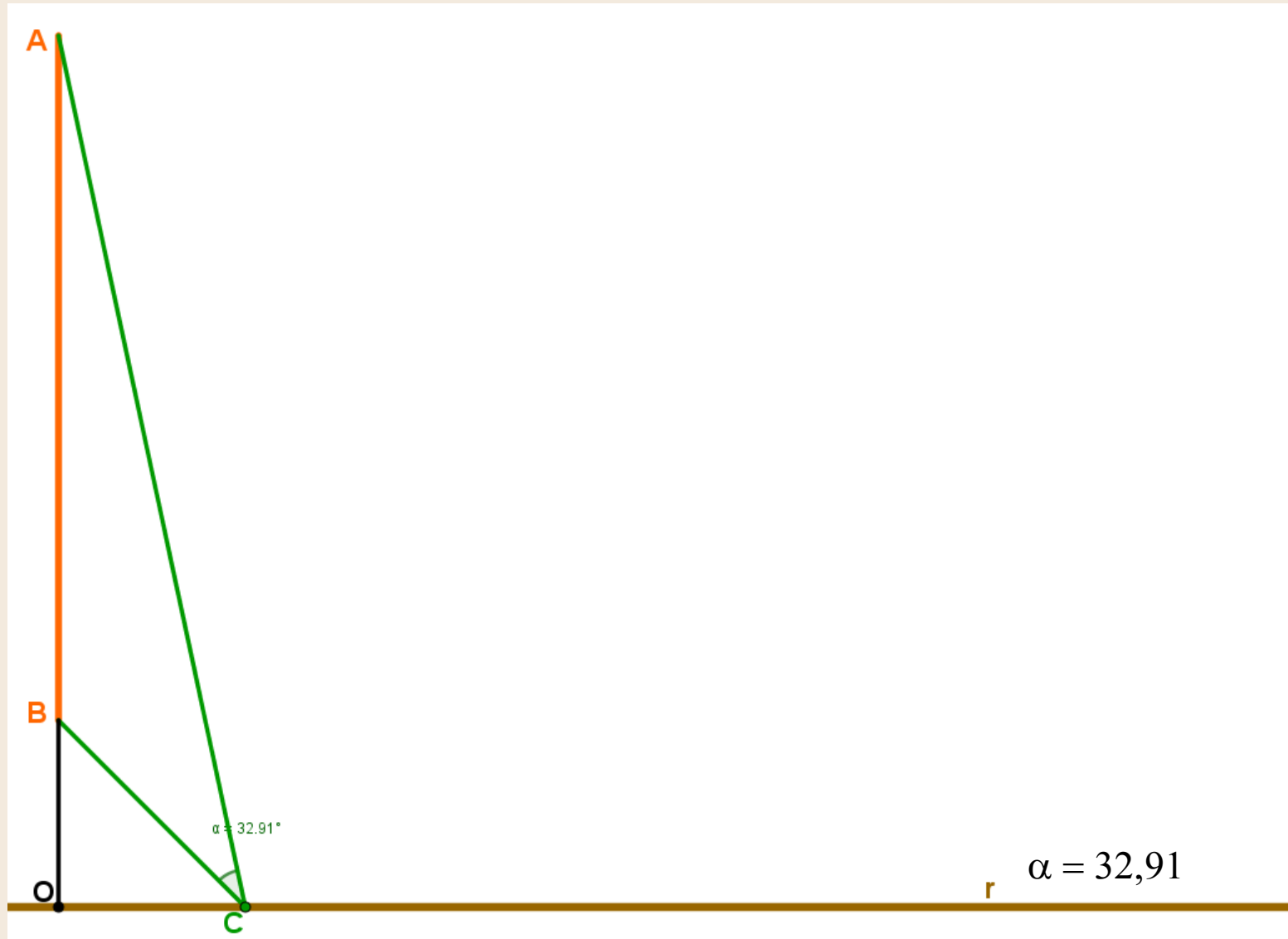
Esiste il massimo?

Allontanandoci dall'asta l'angolo aumenta, ma...



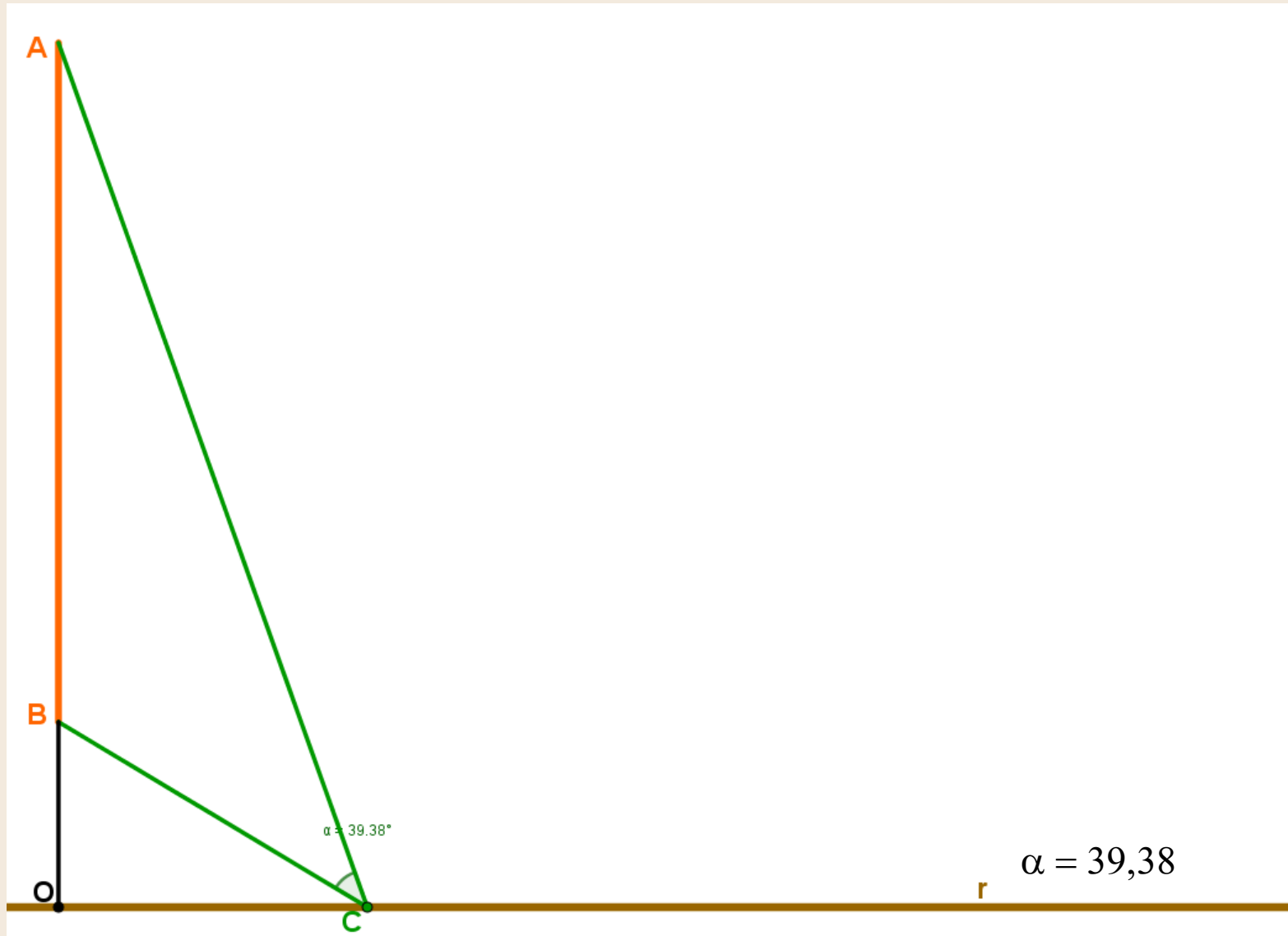
Esiste il massimo?

Allontanandoci dall'asta l'angolo aumenta, ma...



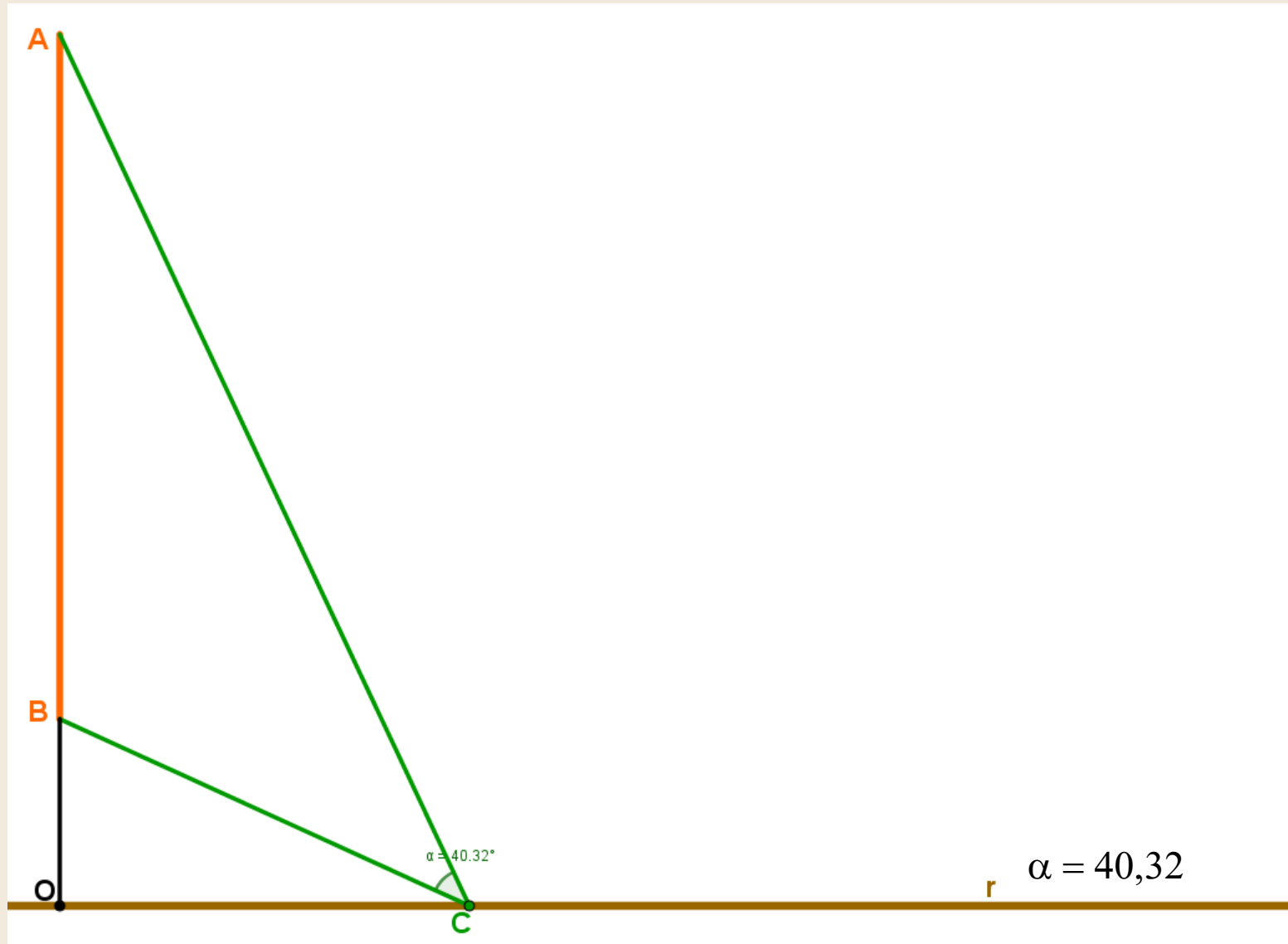
Esiste il massimo?

Allontanandoci dall'asta l'angolo aumenta, ma...

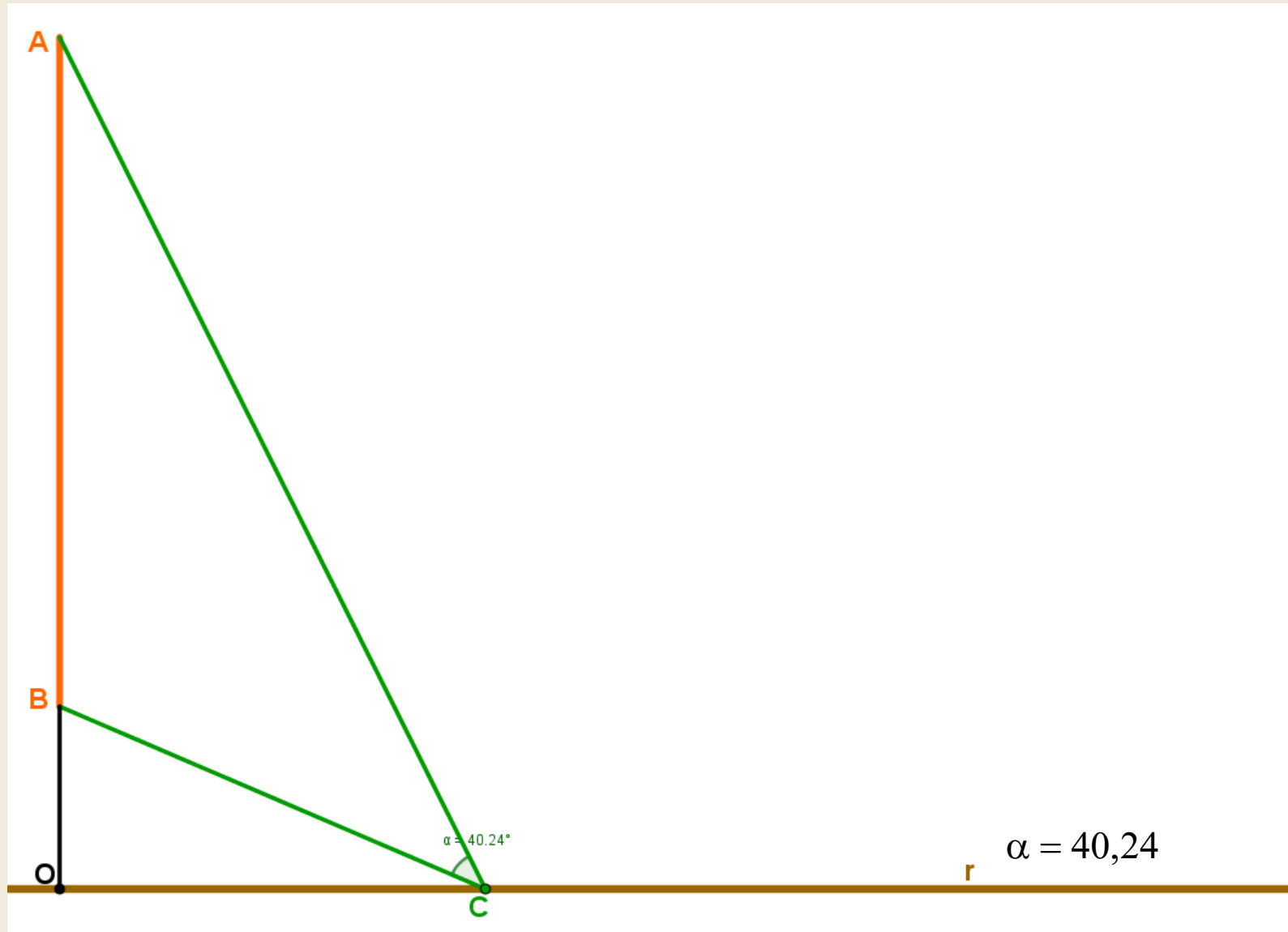


Esiste il massimo?

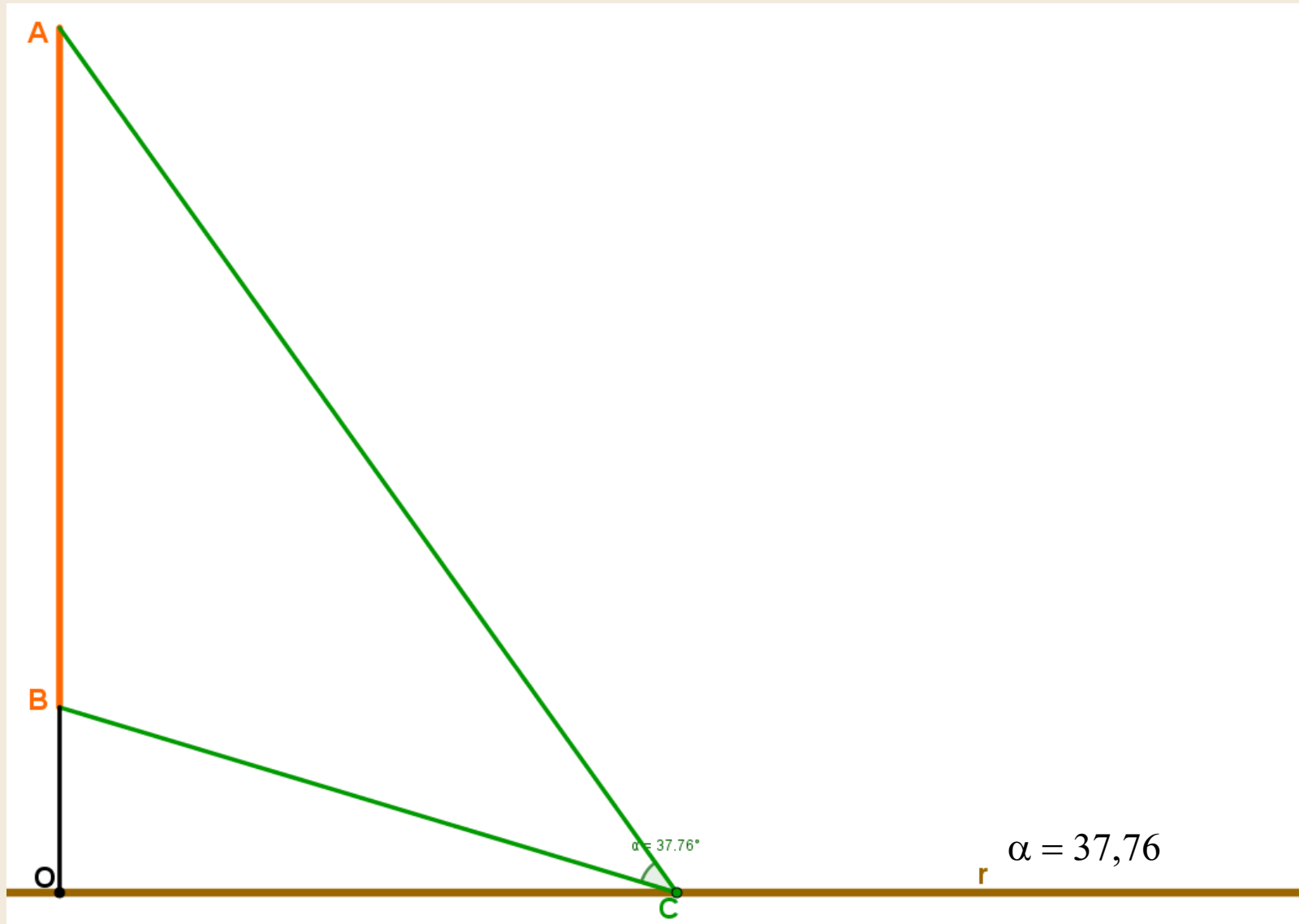
Allontanandoci dall'asta l'angolo aumenta, ma...



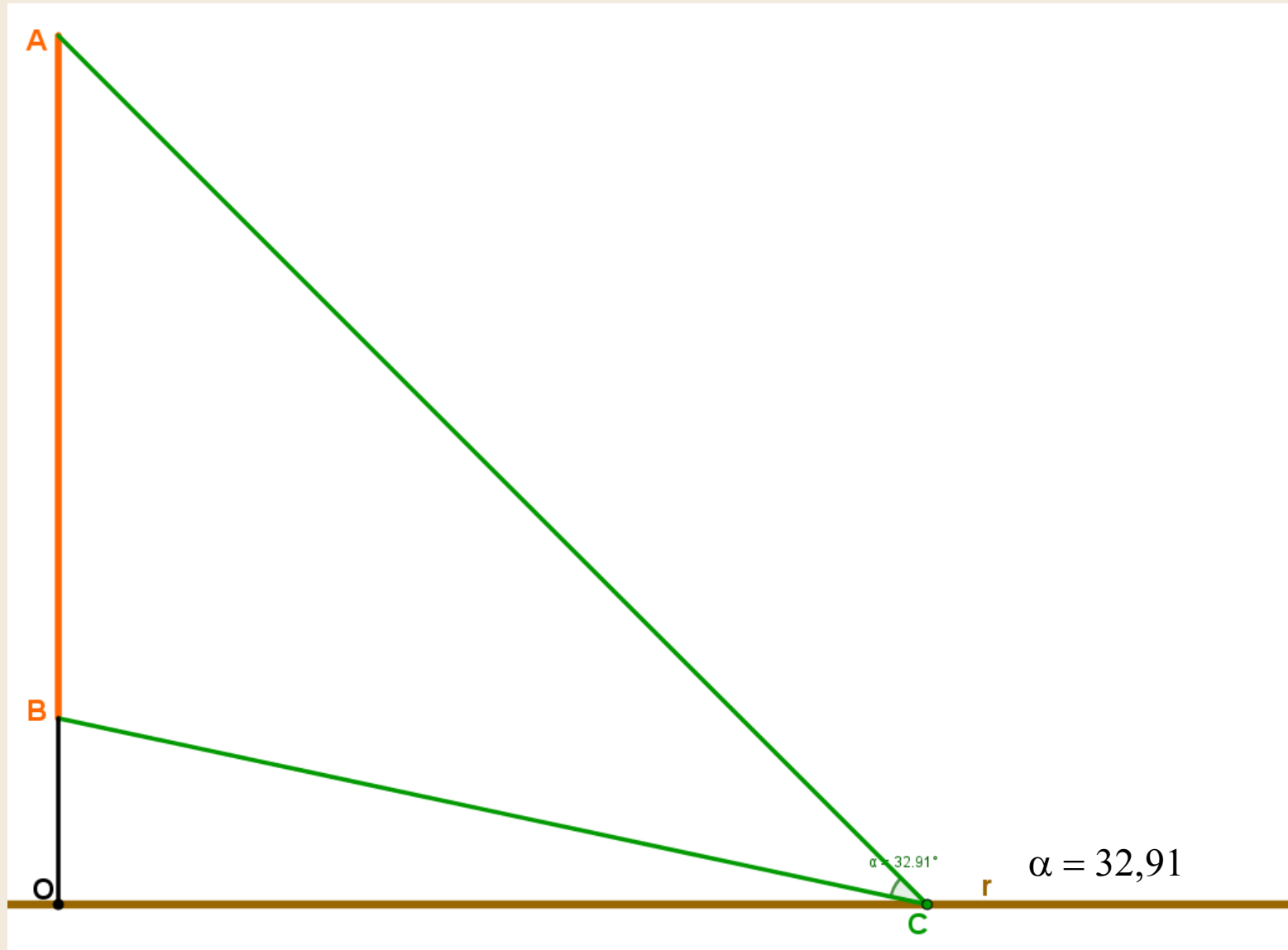
Esiste il massimo?
ma... poi inizia a diminuire



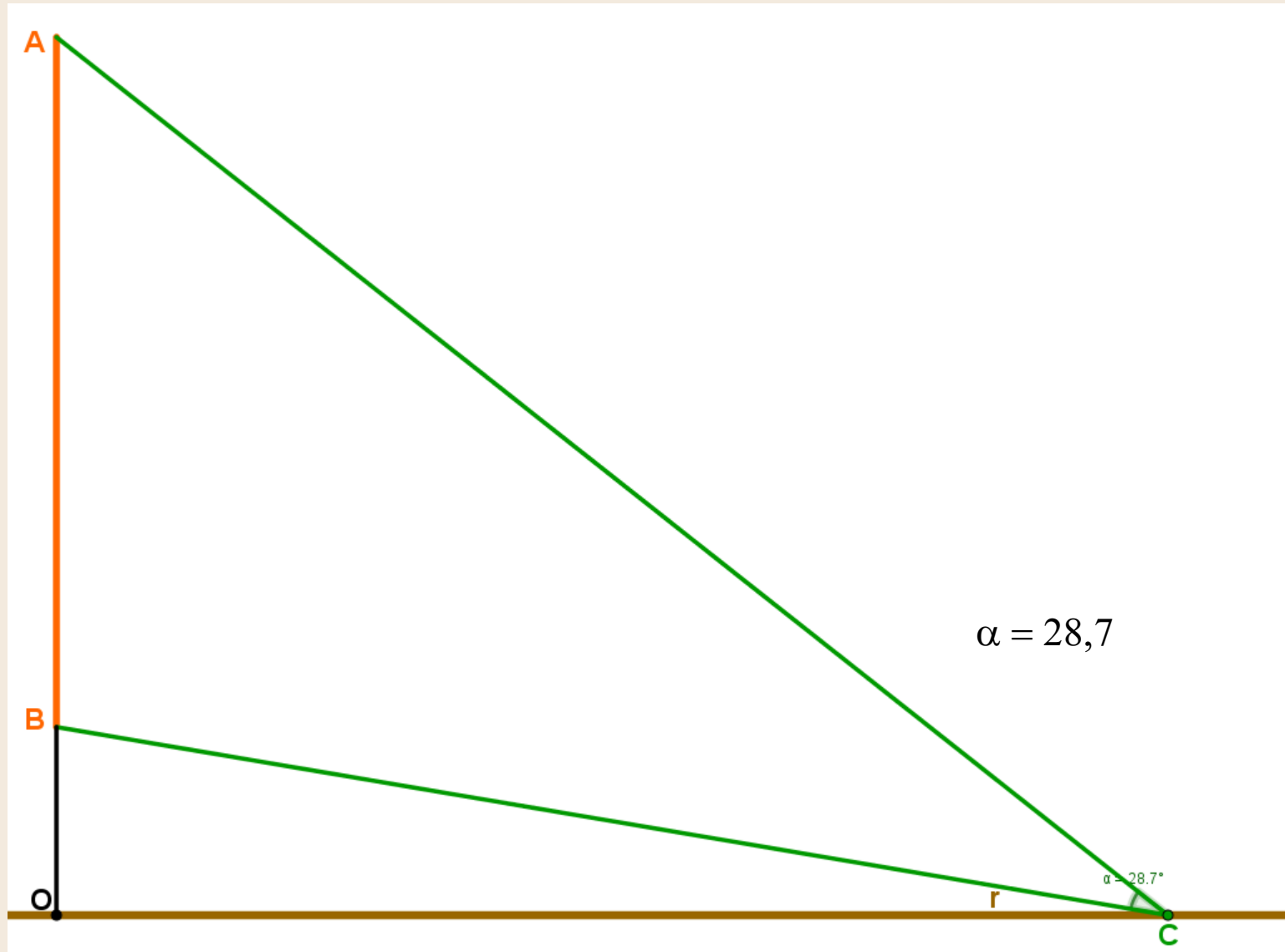
Esiste il massimo?
ma... poi inizia a diminuire



Esiste il massimo?
ma... poi inizia a diminuire



Esiste il massimo?
ma... poi inizia a diminuire



Ad ogni punto della linea di terra viene associato il corrispondente valore dell'angolo.

Con GEOGEBRA è possibile raccogliere la successione di tali valori e generare la funzione a cui possiamo associare una linea di tendenza che esprime sinteticamente quello che abbiamo sperimentato concretamente.

Verifichiamo con Geogebra



problema visione asta verticale.ggb

In questo modo vengono raggiunti gli obiettivi espressi dalle Indicazioni Nazionali

Le Indicazioni Nazionali richiedono di portare lo studente ad essere in grado di

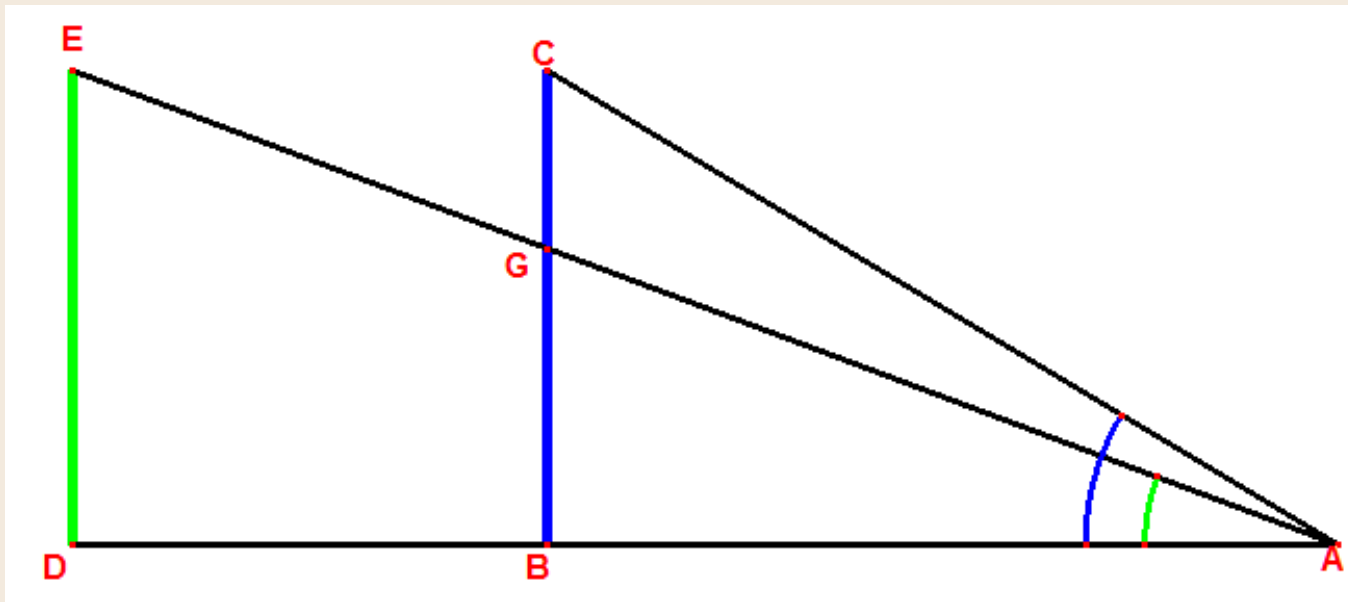
*“passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale) **anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione**”*

Verificato che il massimo esiste, come trovarlo?

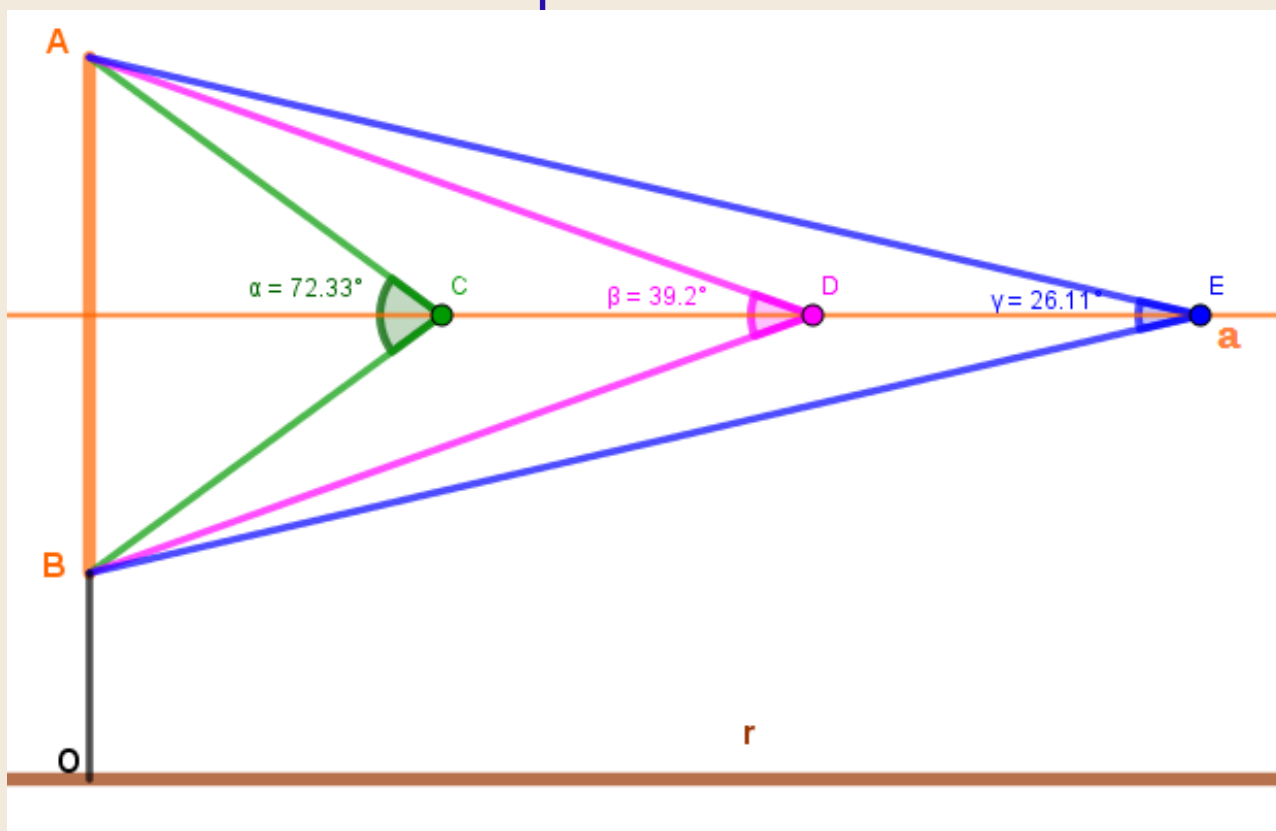
- occorre guidare l'allievo alla ricerca di una rappresentazione della "situazione reale" che aiuti a comprendere
- quale **grandezza** determina **la variazione dell'angolo di visuale**?
- come **funziona la visione per angoli**?

La visione per angoli Piero della Francesca (1416-1492)

- *"**Tutte le cose** vedute **socto un medesimo angolo**, [...] s'appresentano **a l'occhio equali**"*
- *"Se da un puncto partissero linee a **do base equali** et una fosse più propinqua che l'altra, **la più propinqua farà maggiore angolo** nel dicto punto"*



- la **distanza dall'asta** è la grandezza che **determina** la **variazione dell'angolo** di visuale: ponendoci di fronte all'asta cosa succede? Verifichiamo
- Tracciato l'asse **a** dell'asta e, presi punti diversi su di esso, gli studenti misurano i rispettivi angoli di visuale e rilevano che all'aumentare della distanza dall'asta diminuisce la loro ampiezza



Come si spiega ciò matematicamente?

Geometricamente

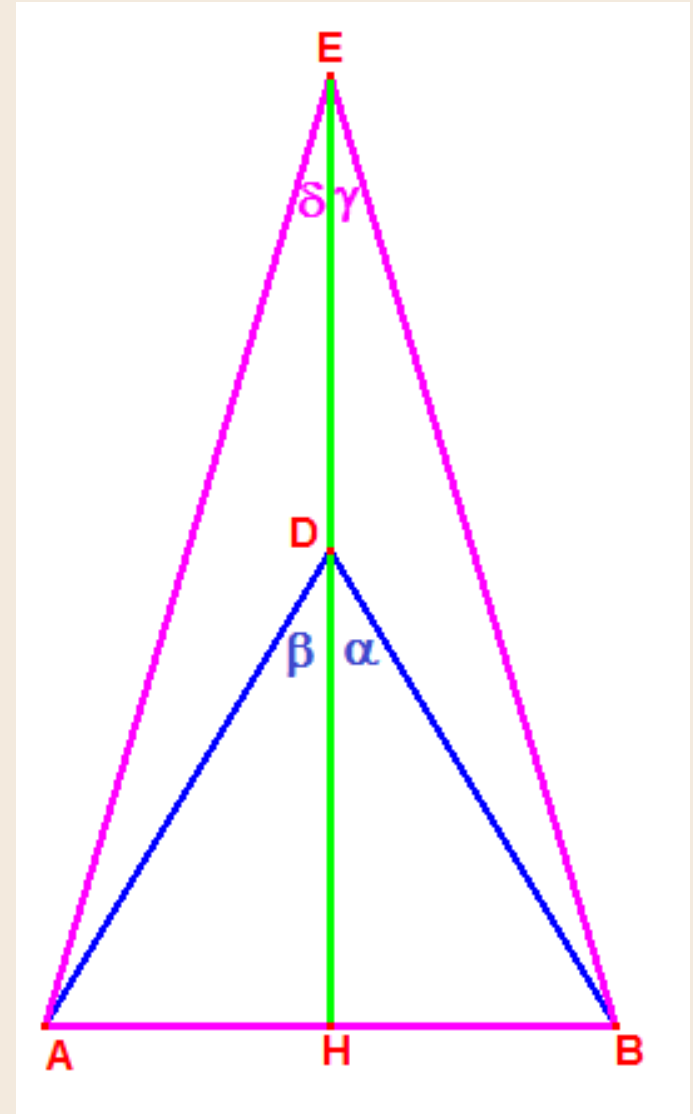
per il teorema dell'angolo esterno
applicato al triangolo BED si ha

$$\alpha > \gamma$$

e al triangolo DEA si ha

$$\beta > \delta$$

quindi $\alpha + \beta > \gamma + \delta \rightarrow \hat{BDA} > \hat{BEA}$



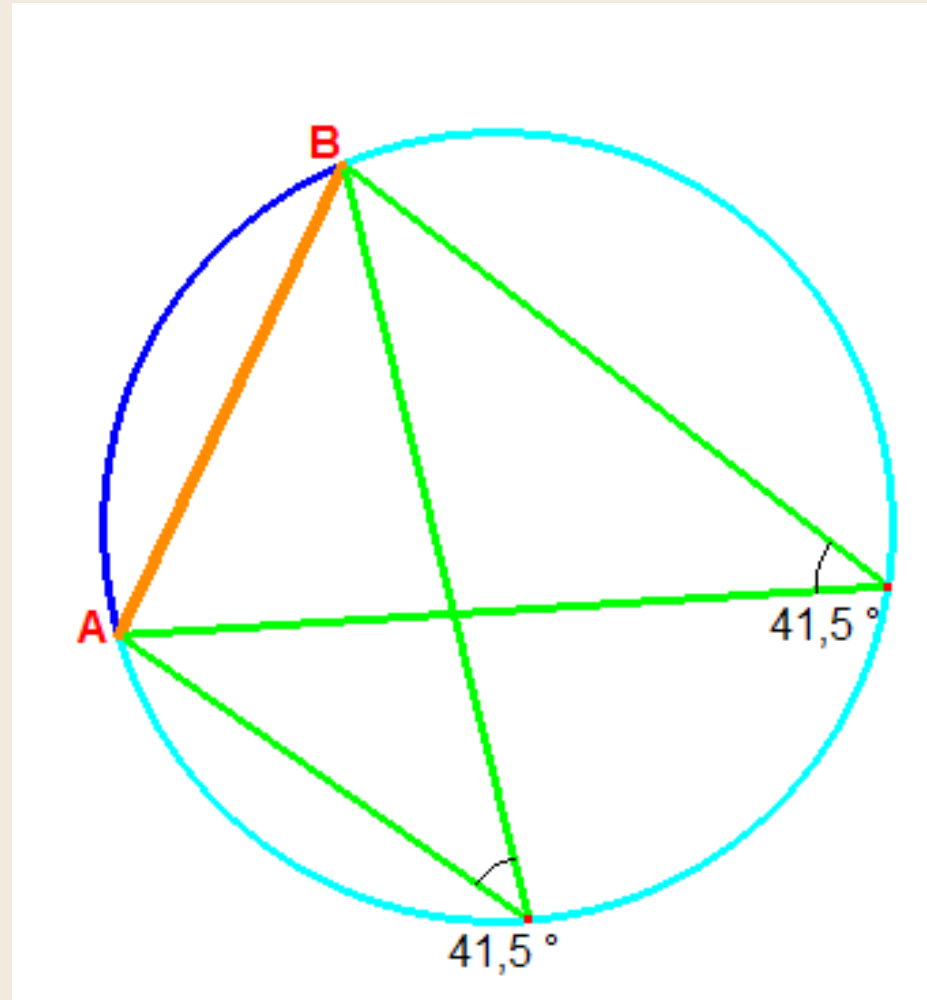
Come si spiega ciò matematicamente?

Trigonometricamente

- Un triangolo è sempre inscrittibile in un cerchio e un lato del triangolo può considerarsi una sua corda
- per il teorema della corda **$AB = 2r \sin \alpha$**
rimanendo costante la lunghezza di AB → i valori di **r** e **$\sin \alpha$** cambiano in modo **inversamente proporzionale**

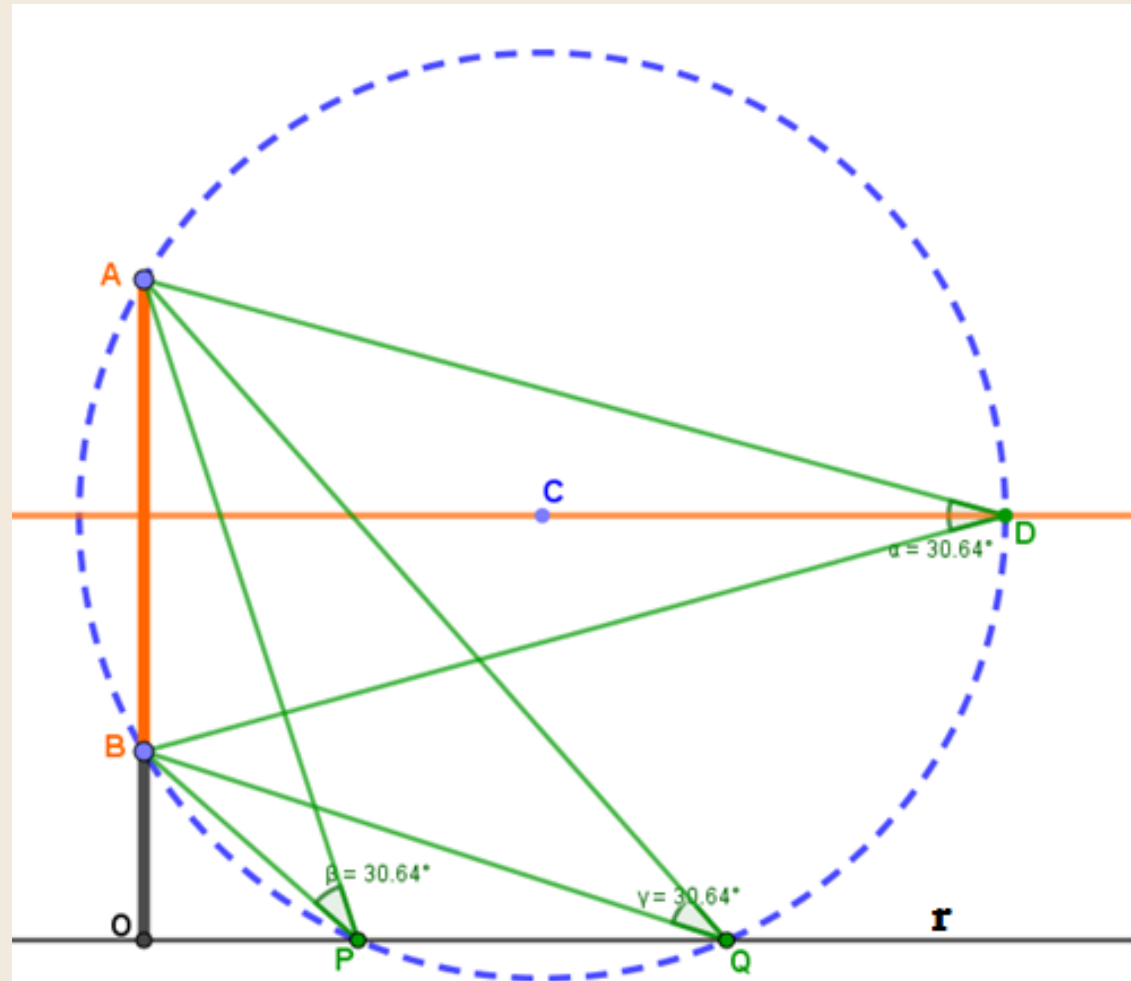
Ma l'occhio deve stare sulla linea di terra r

- come risolvere il problema?
- si invitano gli studenti a rivedere le proprietà degli angoli alla circonferenza
- gli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco sono uguali
- si rendono conto che il luogo dei punti che vedono l'asta sotto uno stesso angolo è **l'arco AB**



Le precedenti considerazioni servono per rappresentare in modo adeguato il problema della visione dell'asta

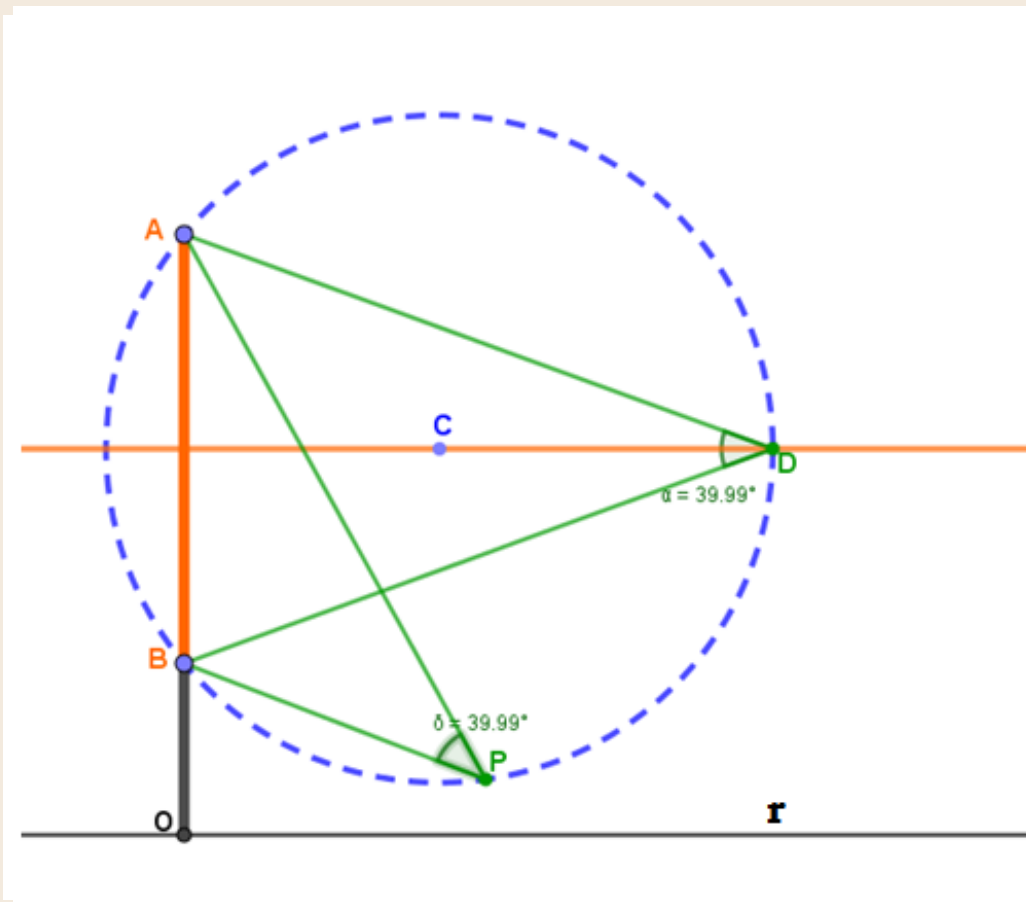
- per rappresentare la visione dell'asta occorre tenere conto della **distanza dall'asta** e **dell'angolo** con cui l'asta viene **vista da un punto della linea di terra r**
- ciò si realizza tracciando l'asse dell'asta
- e la circonferenza con centro in un punto dell'asse che interseca la linea di terra in P e in Q



- Rileviamo che, avvicinandosi all'asta, il raggio della circonferenza diminuisce, mentre aumenta l'ampiezza dell'angolo di visuale: i punti P e Q della circonferenza, comuni alla linea di terra, si accostano
- quando vengono a coincidere, la circonferenza da secante diventa tangente e l'angolo di visuale è massimo.

➤ Il punto di visuale massima è il **punto di contatto** della circonferenza tangente alla linea di terra

➤ Diminuendo ancora il raggio della circonferenza, diminuisce la distanza dell'occhio dalla visione dell'oggetto, **aumenta l'ampiezza dell'angolo**, ma l'occhio non sta più sulla linea di terra



Colpisce la “semplicità” con cui sia possibile determinare il punto sulla linea di terra di visuale massima

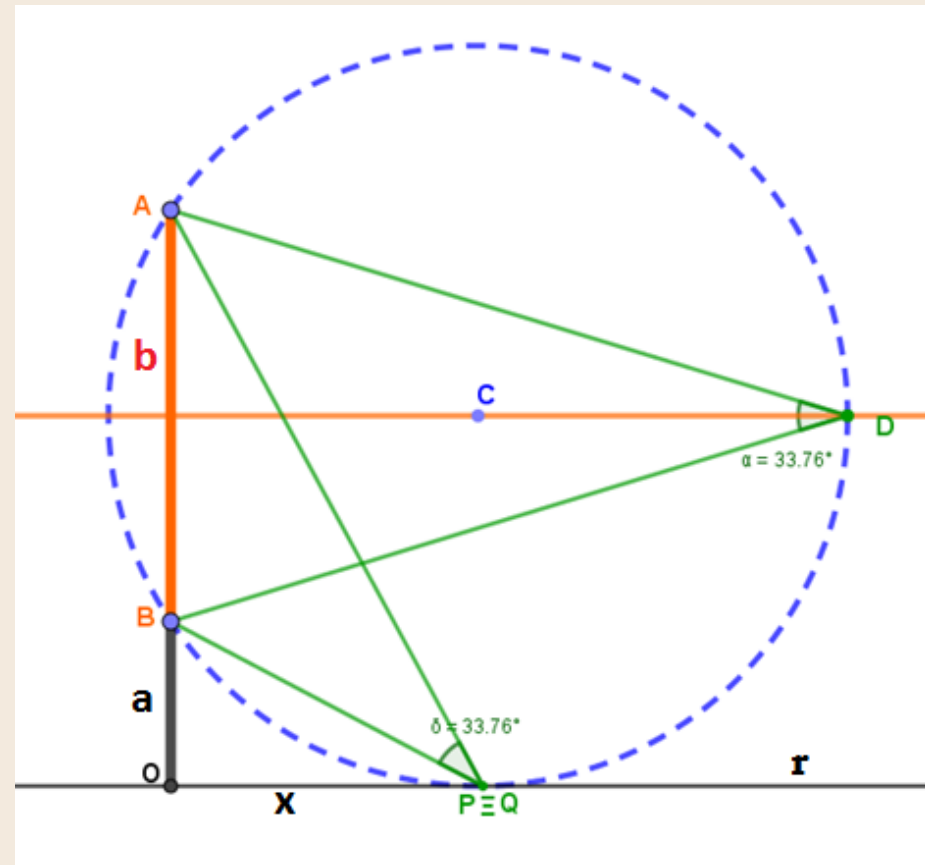
➤ basta applicare il teorema della tangente e della secante ad una circonferenza si ottiene

$$\overline{OP}^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OA}$$

Ponendo: $\overline{OP} = x$ $\overline{OB} = a$ $\overline{AB} = b$

$$x^2 = a \cdot (a + b) \rightarrow x = \sqrt{a(a + b)}$$

➤ Il punto P, tale che $\overline{OP} = \sqrt{b(a + b)}$ è il **punto da cui l’asta è vista sotto angolo maggiore**



Riferimenti bibliografici

1. Gino Loria – Storia delle matematiche - Hoepli-1982
2. Piero della Francesca- De Prospectiva Pingendi- Le lettere
Firenze 1984