

**Aldo Morelli e la “sua” geometria euclidea
(non è un mondo per vecchi)**

Giangiaco Gerla

Università di Salerno Dipartimento di
Matematica 84084 Via Giovanni Paolo II 132,
Fisciano Italy
ggerla@unisa.it

Abstract: Parlerò di geometria sintetica in ricordo del mio caro amico Aldo Morelli che le persone meno giovani della Mathesis sicuramente ricorderanno.

Parlerò di uno degli argomenti della geometria sintetica: la nozione di *equiscomponibilità* e questo poiché è un argomento che è all'interno dei programmi scolastici di tutti i livelli. Vedrò l'equiscomponibilità come una sorta di teoria della misura di carattere puramente sintetico.

Accennerò poi alla «*pointless geometry*»: un modo estremo di introdurre la geometria sintetica che potrebbe essere vista come esame degli oggetti del mondo).

Ovviamente stante il tempo a disposizione la mia speranza è solo di sollecitare interesse per tali argomenti e non certo di esaurirli.

Per un discorso più ampio si rimanda a [Gerla (2014)] per l'equiscomponibilità ed a [Gerla (2006)] per la geometria senza punti. In quest'ultimo articolo si può trovare la seguente dedica che mi piace ripetere:

“Dedicato al mio amico Aldo Morelli che a volte mi viene in mente con dolcezza”.

Equiscomponibilità

Ricordo che due figure geometriche F e G si dicono “equiscomponibili” se:

E' possibile, (con un paio di forbici),

- 1. Tagliare F in un numero finito di pezzi*
- 2. Spostare successivamente tali pezzi*
- 3. Ricomporli in modo da ottenere G .*

Nella scuola elementare l'equiscomponibilità può essere vista come un gioco. Le sue regole prevedono che se la figura F è tagliata in pezzi allora nel ricostruire G tutti i pezzi devono essere utilizzati.

Come è noto, questa nozione è importante per il calcolo delle aree perché due figure equiscomponibili hanno la stessa area.

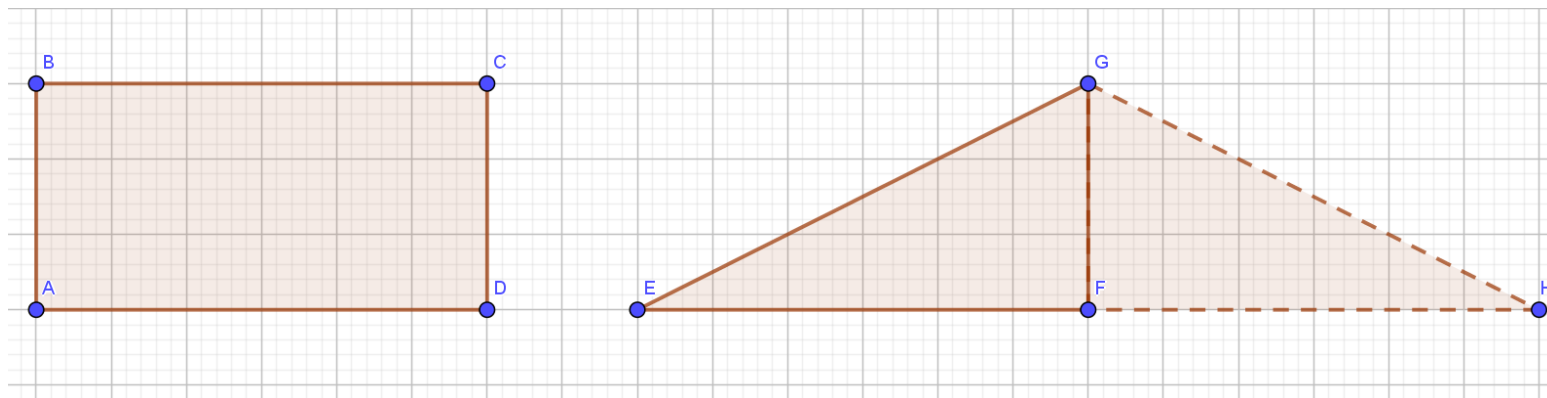
Ad esempio si potrebbe partire dal problema seguente:

Problema 1. Trasformare un rettangolo ABCD in un triangolo.



In una scuola elementare questo problema si può affrontare facendo fare agli studenti molti tentativi con fogli rettangolari di carta ed un paio di forbici.

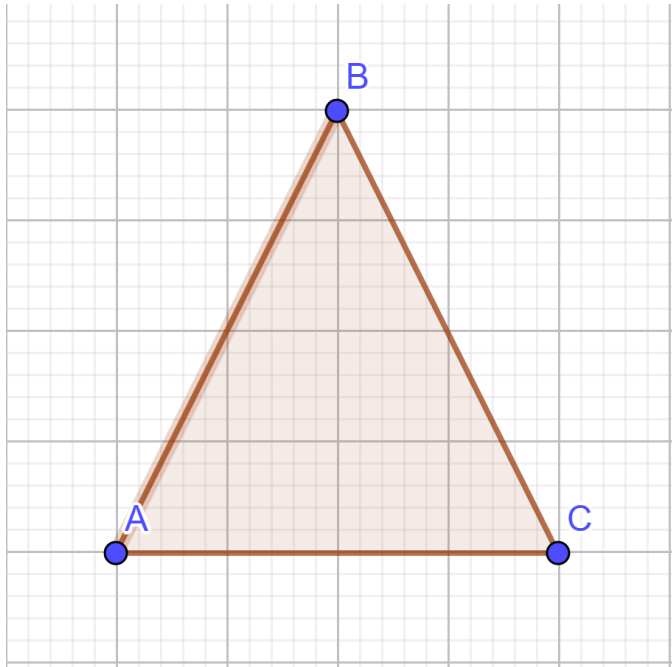
Una soluzione è tagliare lungo una diagonale e ricomporre opportunamente.



Altra soluzione?

Un secondo problema potrebbe essere il seguente:

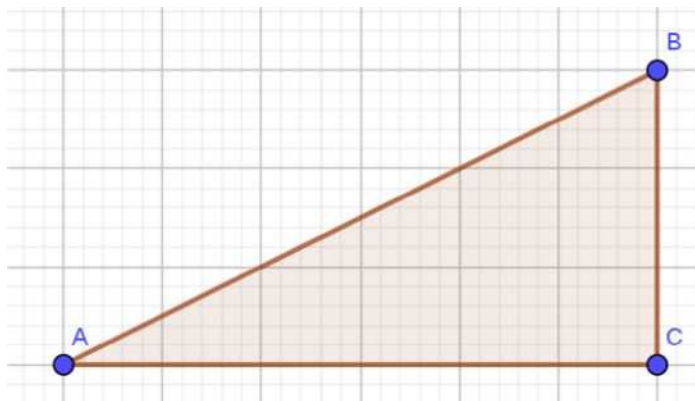
Problema 2. Dato un triangolo isoscele trasformarlo in un rettangolo.



Dovrebbe apparire che la soluzione del problema 1 è invertibile e diventare soluzione del problema 2. Basta leggere la figura da destra a sinistra. In altre parole la relazione di equiscomponibilità è simmetrica.

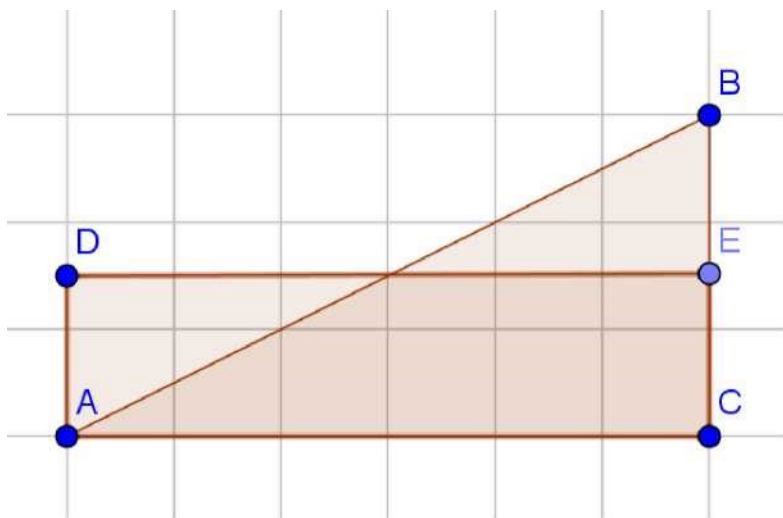
Poiché si mostra che è anche riflessiva e transitiva, siamo in presenza di una relazione di equivalenza.

Proviamo un caso semplice: il triangolo rettangolo.



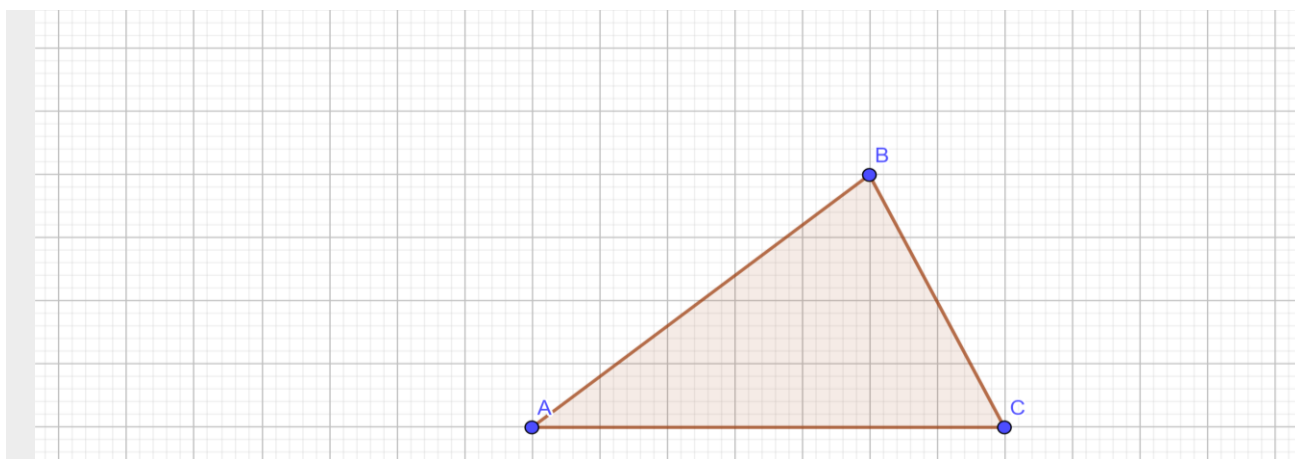
Problema 3. Trasformare un triangolo rettangolo in un rettangolo.

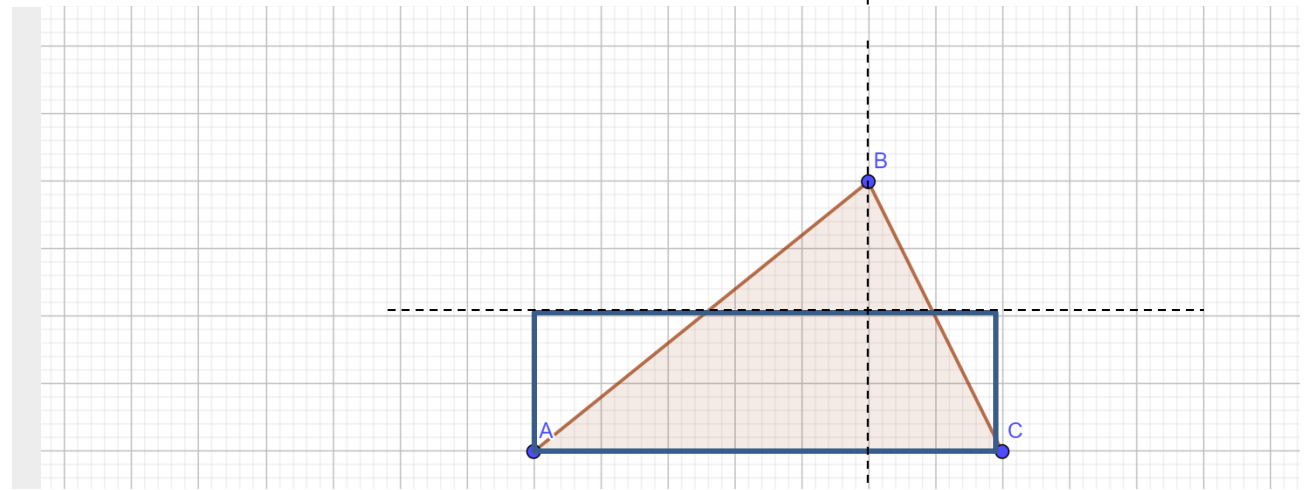
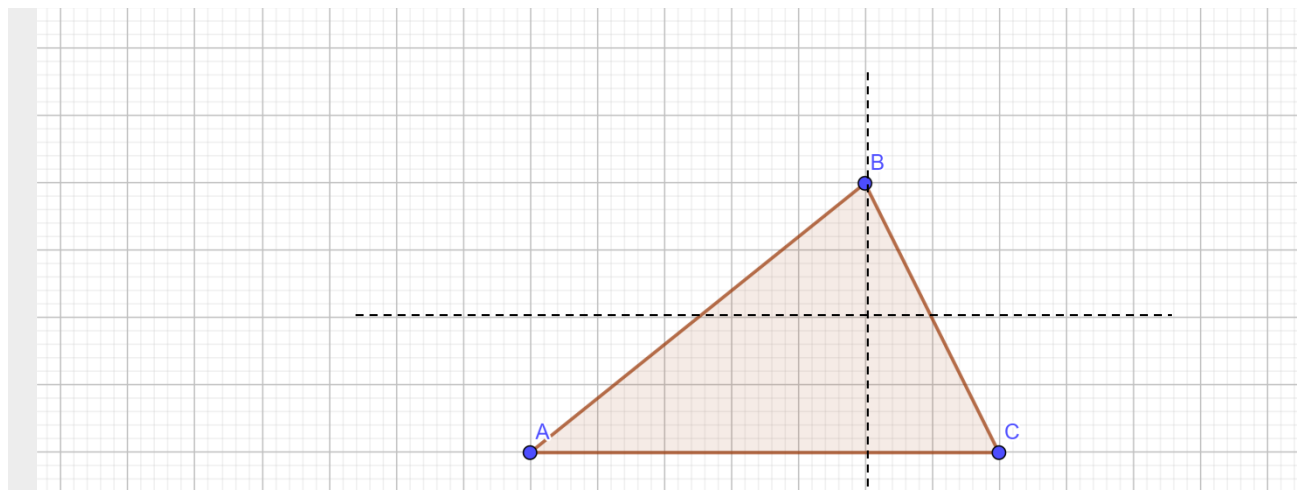
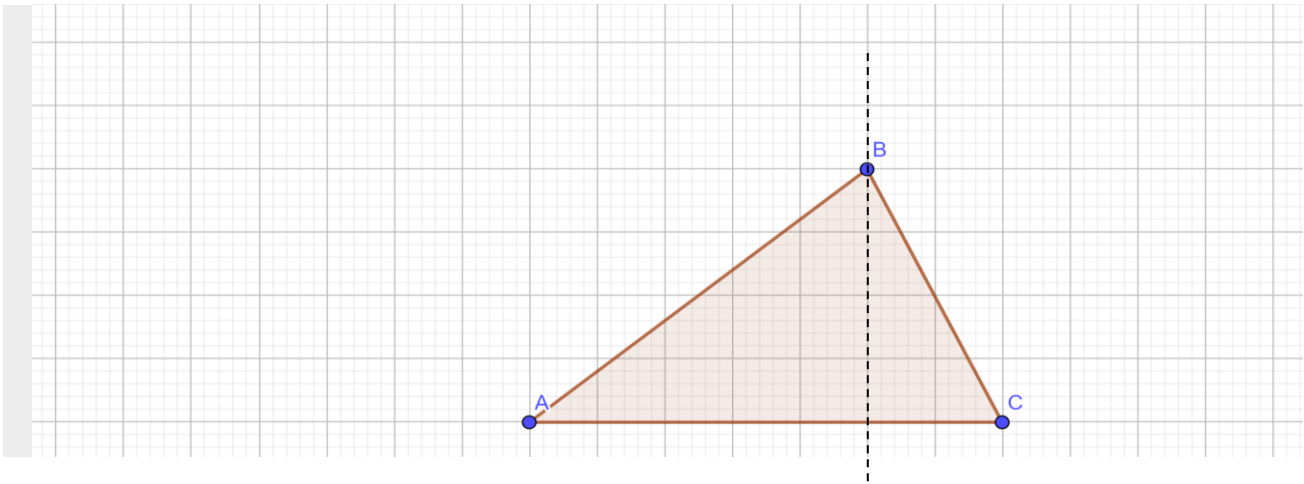
Si può suggerire che vogliamo una figura con quattro angoli retti e quindi che è opportuno tagliare la fastidiosa punta in B. Il taglio dovrebbe creare un nuovo angolo retto in modo da avvicinarci alla forma del rettangolo, la punta dovrebbe essere tagliata in modo da ottenere un triangolino che si possa comporre con il resto e quindi che non sia troppo piccolo o troppo grande.



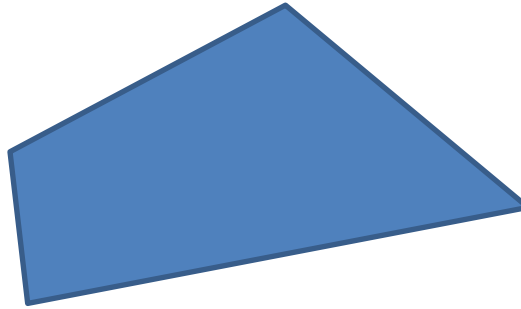
La soluzione consiste nel tagliare a metà altezza il triangolo rettangolo e poi ruotare opportunamente il piccolo triangolo ottenuto. tagliare orizzontalmente a metà altezza il triangolo e ruotare opportunamente il triangolino superiore OEI intorno al punto O.

Problema 4. Trasformare un triangolo con angoli alla base acuti in un rettangolo.





Problema: trasformare un qualunque quadrilatero convesso in un rettangolo.

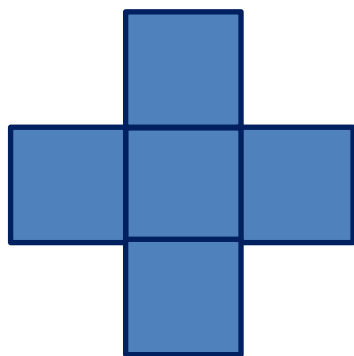


Problema: Trasformare una qualunque figura poligonale in un numero finito di rettangoli

Problema: Sommare due diversi rettangoli in un unico rettangolo.

Problema: Trasformare un rettangolo in un rettangolo di base unitaria.

Problema: Trasformare la seguente croce in un quadrato.



Teorema. Ogni figura a contorni rettilinei è equiscomponibile ad un rettangolo di lato unitario prefissato.

(Calcolare l'area = trovare un rettangolo di base unitaria equivalente).

Teorema. Ogni figura a contorni rettilinei è equiscomponibile ad un quadrato.

(Calcolare l'area = trovare un quadrato equivalente).

Per una teoria sintetica della misura (*Scissors Measures*).

L'equiscomponibilità è una relazione di equivalenza ed in ogni classe di equivalenza è presente uno ed “un solo” rettangolo di lato unitario ed “uno ed un solo” quadrato.

Allora il significato dei due teoremi precedenti è che ogni figura a contorni rettilinei ammette una riduzione a “forma normale” ad un rettangolo di lato unitario (o ad un quadrato). Non è difficile definire nell'insieme dei rettangoli unitari e nell'insieme dei quadrati un ordinamento ed un'operazione di addizione.

Tale modo di procedere costituisce una teoria della misura di carattere puramente sintetico in cui non si utilizzano numeri reali e suggerisce una direzione di ricerca per misurazione come riduzione a forma normale (vedi Hales 2005).

Point-free geometry

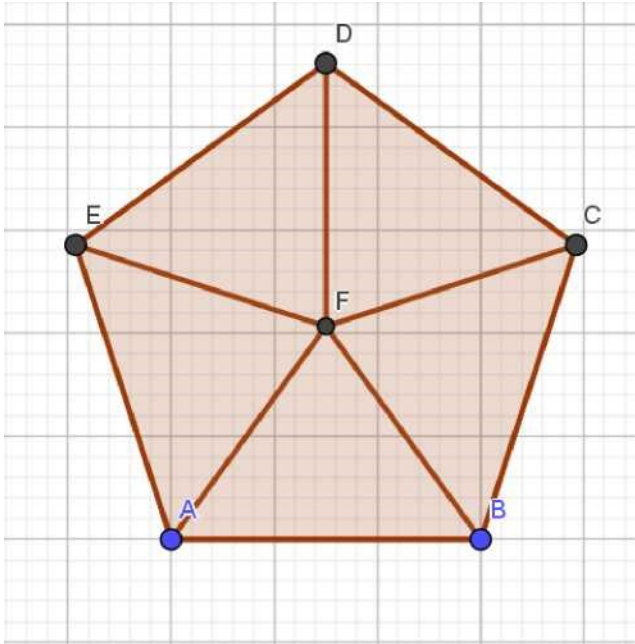
Naturalmente la definizione che abbiamo sopra dato di equiscomponibilità in termini di forbici, pezzi di carta, tagli e spostamenti non sarebbe accettata dai matematici.

Una definizione più precisa, in cui si assume che una figura sia un insieme di punti, è la seguente:

Definizione. F ed G sono equiscomponibili se esiste una partizione finita $F_1, \dots, F_n$ di F ed una partizione finita $G_1, \dots, G_n$ di G con F_i isometrico a G_i .

Tuttavia tale definizione, pur apparendo più rigorosa, presenta notevoli problemi.

Ad esempio, consideriamo un pentagono regolare e scomponiamolo in cinque triangoli come in figura. E' la scomposizione utilizzata per provare la formula per l'area dei poligono regolari: *area = perimetro per apotema diviso due*.



Si pone tuttavia il problema di dire con più precisione che tipo di partizione determinano tali triangoli. Infatti per avere una partizione i triangoli devono essere insiemi disgiunti e la loro unione deve dare il pentagono.

- Il punto F a quale triangolo appartiene?
- A chi appartengono gli infiniti punti del segmento AF?
- Un triangolo è un insieme chiuso o un insieme aperto?

Si deve anche tenere conto che per il principio di uguaglianza dei triangoli qualunque insieme di punti sia un triangolo la sua chiusura ed il suo interno devono essere congrui (cioè isometrici) avendo gli stessi lati. Ma questo è impossibile poiché una isometria è un omeomorfismo e quindi non può portare un chiuso in un aperto.

Allora per salvare tale principio dobbiamo scegliere: o tutti i triangoli sono degli aperti o tutti sono dei chiusi. Una soluzione spesso adottata è assumere che le figure geometriche siano insiemi chiusi ma, poiché in questo caso quella disegnata non sarebbe una partizione, fornire una definizione diversa di “scomposizione”.

Ci si accontenta di richiedere che i pezzi della scomposizione non abbiano punti della frontiera in comune. In questo caso i nostri triangoli costituiscono una partizione, meglio “*scomposizione*” del pentagono (si veda ad esempio Morelli 1989).

Forse è sbagliato pensare alla geometria come ad un ramo dell'analisi matematica anche se entrambi gli argomenti si riferiscono al dominio R^n . Si pongono allora le seguenti questioni.:

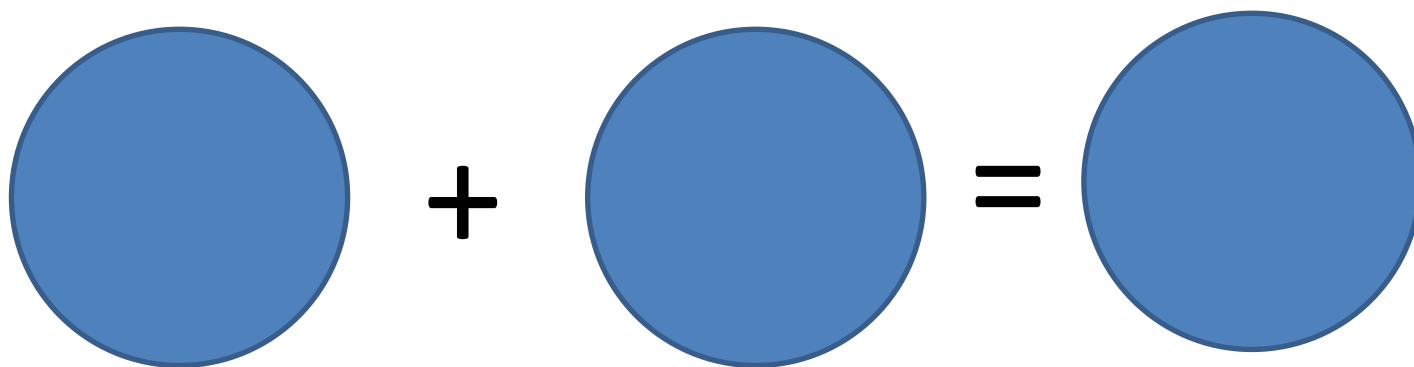
- *E' giusto identificare una figura geometrica con un insieme qualsiasi di punti?*
- *E' possibile fare a meno dei punti e considerare le figure geometriche direttamente come enti primitivi come la nostra intuizione suggerisce?*

IDEA. Non sono le figure geometriche ad essere definibili tramite i punti ma i punti ad essere definiti tramite le figure geometriche.

Cioè

Fondare la geometria piana sul concetto primitivo di figura geometrica a due dimensioni e definire poi, per astrazione, i punti e le linee partendo dalle figure geometriche. (Fare la stessa cosa per la geometria dello spazio).

Paradosso di Banach-Tarski”



TENTATIVI: Tutti i tentativi per un approccio formale alla point-free geometry assumono come nozione primitiva quella di regione (che non è necessariamente un insieme di punti) e di inclusione (che non è necessariamente di tipo insiemistico). Quindi partono da un insieme con una relazione d'ordine: $(R, \leq)$.

Si distinguono fra loro per il fatto che aggiungono differenti nozioni primitive (sfere, semipiani).

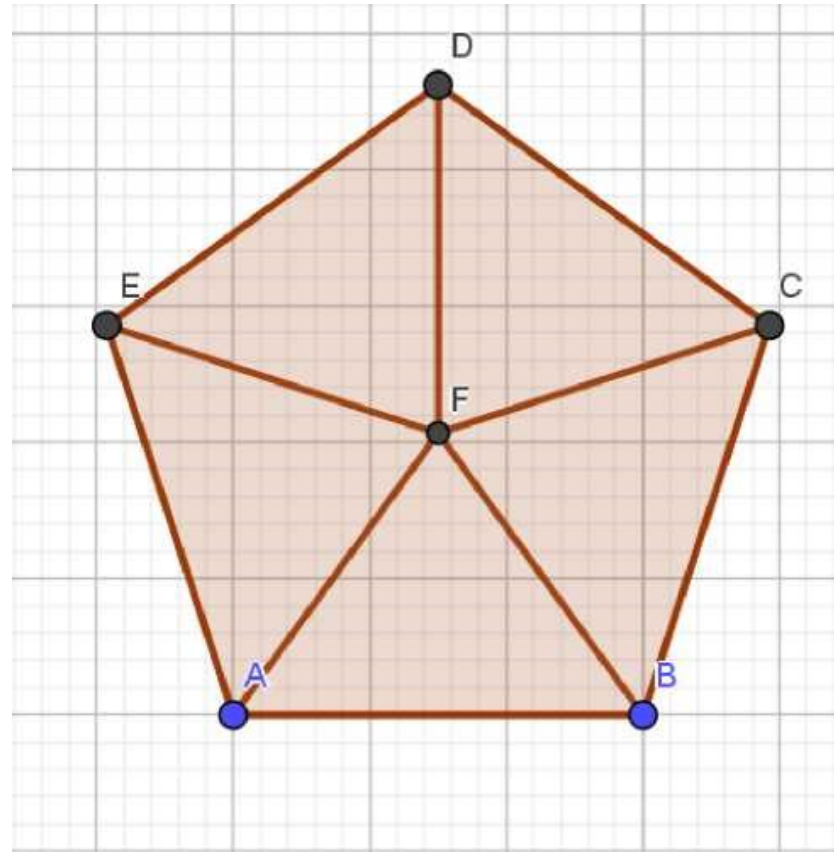
Da notare che in molti tentativi la classe delle regioni è un'algebra di Boole senza atomi e che quindi i punti non esistono e non esistono le rette.

Un esempio è costituito dall'algebra di Boole dei chiusi regolari dello spazio topologico R^2 .

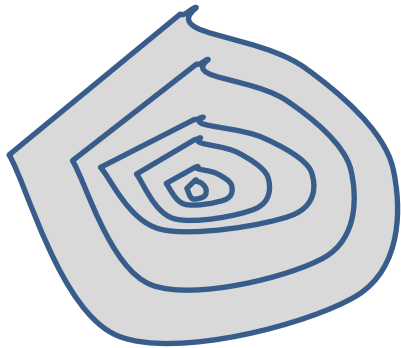
Def. x chiuso regolare se $x = c(i(x))$.

I punti ed i segmenti non sono chiusi regolari. Un triangolo chiuso è un chiuso regolare.

Questa è un partizione !



Whitehead. Effettua un'analisi dello spazio quadridimensionale che suggerisce possibili sistemi di assiomi per una geometria senza punti. Concentra la propria attenzione sulla relazione di contatto tra regioni, e le nozioni di convessità, e di movimento rigido. I punti sono definiti tramite successioni di regioni “nested” cioè decrescenti (processi di astrazione) (Whitehead, 1929, ed anche Gerla-Tortora 1992).



Tarski. Assume come nozione primitiva, oltre quella di *regione*, *inclusione sfera*. Una volta definita la relazione di concentricità tra sfere, un punto è una classe di equivalenza modulo tale equivalenza (Tarski 1923).

Sniatycki. Assume come primitiva la nozione di semipiano. Si definisce la retta come l'insieme costituito da un semipiano h e dal suo complemento $-h$ (lati della retta).

Due rette sono *parallele* se hanno due lati disgiunti, altrimenti si dicono *incidenti*.

Un angolo è un elemento della partizione definita da due rette incidenti.

Un punto è definito come “spigolo” di un angolo (Sniatycki, 1968).

Dana Scott. Basato sulla nozione di gruppo di movimenti. Articolo da poco sottoposto ad una rivista (Scott, 2018).

Approccio metrico. Si assume come primitiva le nozioni di distanza tra due regioni e quella di diametro di una regione. Un punto è una successione di regioni una dentro l'altra con diametro che tende a zero (Gerla 1990) .

Approccio che si basa sui convessi. Utilizziamo la nozione di ovale (che corrisponde a quella di insieme convesso). Chiamiamo *semipiano* un ovale il cui complemento è un ovale. Procediamo poi come in Sniatycki, 1968. (Gerla-Gruszczynski, 2017).

Progetto di ricerca didattica: Definire un percorso di geometria solida che non parta da nozioni astratte quali punti, rette e piani ma da regioni o, se si vuole corpi solidi. Punti rette e piani dovrebbero essere definiti “per astrazione”.

Sarebbe auspicabile proporre nozioni primitive ed assiomi con un carattere “concreto”. Il tutto dovrebbe costituire un percorso didattico per la geometria da proporre nelle scuole.

Stiamo lavorando, all'interno della geometria piana, a strutture del tipo (B, O) con B algebra di Boole completa, O sistema di chiusura i cui elementi vengono chiamati ovali e definendo

- *semipiano* un convesso il cui complemento è convesso
- *retta* un insieme $l = \{h, -h\}$ costituito da un semipiano h e dal suo complemento $-h$: semipiani che si chiameranno *lati* della semiretta.
- *parallele* due rette se uno dei lati della prima è disgiunto da uno dei lati della seconda.
- *incidenti* due rette che non sono parallele.

- *angolo* l'intersezione di due semipiani che sono lati di rette incidenti

-L'assioma delle parallele coincide con l'affermazione per cui se due semipiani sono contenuti in uno stesso semipiano allora sono confrontabili (uno di essi è contenuto nell'altro).

- Un ulteriore assioma potrebbe essere il teorema di separazioni per insiemi convessi.

-Dati due insiemi convessi disgiunti x ed y esiste un semipiano che contiene x ed il cui complemento contiene y .

Bibliografia

- Gerla G., Tortora R., La relazione di connessione in A.N. Whitehead: aspetti matematici, *Epistemologia*, 15 (1992) 341-354. pdf
- Gerla G. (1990). Pointless metric spaces, *J. Symbolic Logic*, 55 (1990) 207-219.
- Gerla G. (2006). Un punto dal volto di gatto (I) e (II): fare a meno dei punti, *Periodico di Matematiche*, 3 (2006) 9-20, 4 (2006) 15-25.
- Gerla G. (2014). Equiscomponibilità, *J. of Science & Philosophy Divulcation*, 1.
- Gerla G., R. Gruszczyński. (2017), Point-Free Geometry, Ovals and Half-Planes, *The Review of Symbolic Logic*, Volume 10, 2, 237-258.
- Hales T. C. (2005). What is motivic measure? *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 42, n. 3, 119-135.
- Morelli A. (1989). *Geometria* 1 e 2, Loffredo Editore, Napoli.
- Morelli A., (2001). *Raccolta di scritti per l'insegnamento*, a cura di F. Casolaro e T. Olivello, Università degli Studi di Napoli, Dipartimento di Matematica.
- Scott D. S. (2018). *Geometry without points*, Preliminary report. Submitted.
- Sniatycki, A. (1968) An axiomatics of non-Desarguean geometry based on the halfplane as the primitive notion, *Dissertationes Mathematicae*, 59, 1-42.
- Tarski A. (1923). Foundations of the geometry of solids, in *Logic, semantics, metamathematics*, papers from 1923 to 1938, Clarendon Press, Oxford, 1956.
- Whitehead, A. N. (1929). *Process and Reality*, Macmillan, New York.