

Convegno Nazionale / Corso di Formazione

Rimini 20-21-22 aprile 2018

“L'attualità degli insegnamenti dei grandi Maestri della Mathesis nella seconda metà del secolo XX: nuove prospettive nella didattica e nei fondamenti della Matematica.”

Alessandra Rotunno

alessandra.rotunno@unina.it

L'insegnamento della Geometria Proiettiva nella Scuola secondaria di primo e secondo grado

Dedicato al Prof Aldo Morelli

- Dal dopoguerra al 2001 Il processo di evoluzione della Didattica della Matematica si è sviluppato nei Nuclei di Ricerca Didattica, attraverso l'insegnamento di Matematici/Pedagogisti come
Lucio Lombardo Radice
Emma Castelnuovo
Bruno de Finetti
Giovanni Prodi
Francesco Speranza
Bruno Rizzi

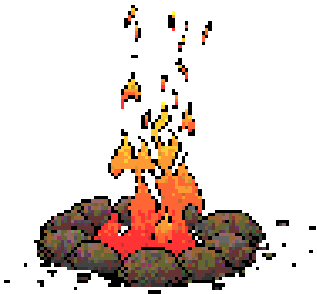
A Napoli, ma in generale nell'Università della Campania, ha fatto scuola il Prof Aldo Morelli, con cui si sono formate due intere generazioni.

- Al Modello del M.P.I. di Sperimentazione “*Brocca*”, per l’introduzione dell’Informatica nella Scuola e nelle Università, è stato aggiunto un *Progetto sulle interrelazioni tra l’insegnamento della Matematica e l’insegnamento del Disegno*, il cui obiettivo era lo utilizzo delle nuove tecnologie informatiche nella Rappresentazione (Cundari C. 1991).
- La finalità del Progetto era, oltre all'utilizzo delle tecniche informatiche (CAD, GET, CABRI',...) che sostituivano la rappresentazione con riga e compasso, l'esigenza di *educare i docenti* (successivamente gli studenti) alle conoscenze fondamentali della *Geometria* su cui sono basate le nuove tecniche, cioè la *Geometria Proiettiva* che, negli ultimi decenni è stata di fatto (anche se non ufficialmente) esclusa dai programmi di insegnamento nelle Università.

- Relativamente alla stesura del percorso di Matematica fu incaricato, su indicazione del prof. Bruno Rizzi, Ferdinando Casolaro
- Tali argomenti sono oggi inseriti nelle *Indicazioni nazionali per i licei* e nelle *Linee guida per gli Istituti tecnici*, in quanto uno studio corretto dell'Ottica moderna, non può prescindere dalla conoscenza dei fondamenti di Geometria Proiettiva (Casolaro F., Rotunno A. 2017)

Ottica degli antichi III sec a.C.

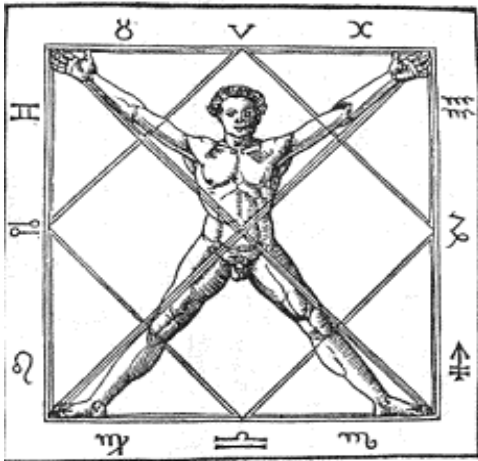
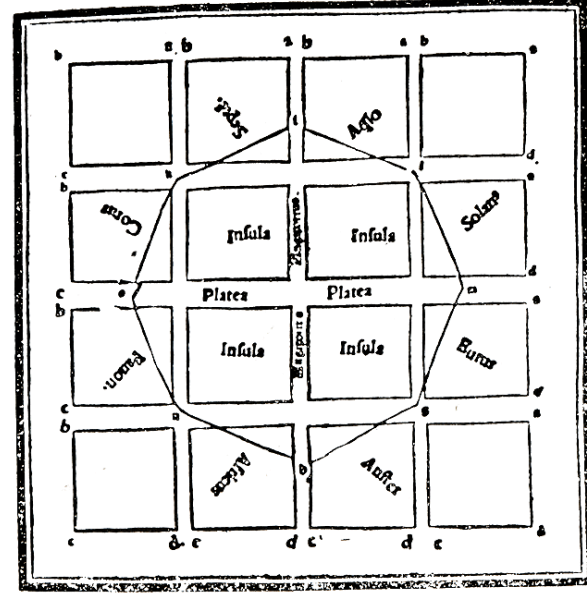
1° tentativo di razionalizzazione dell'arte
attraverso il concetto di propagazione
rettilinea della luce



Vitruvio: I sec. a.C.

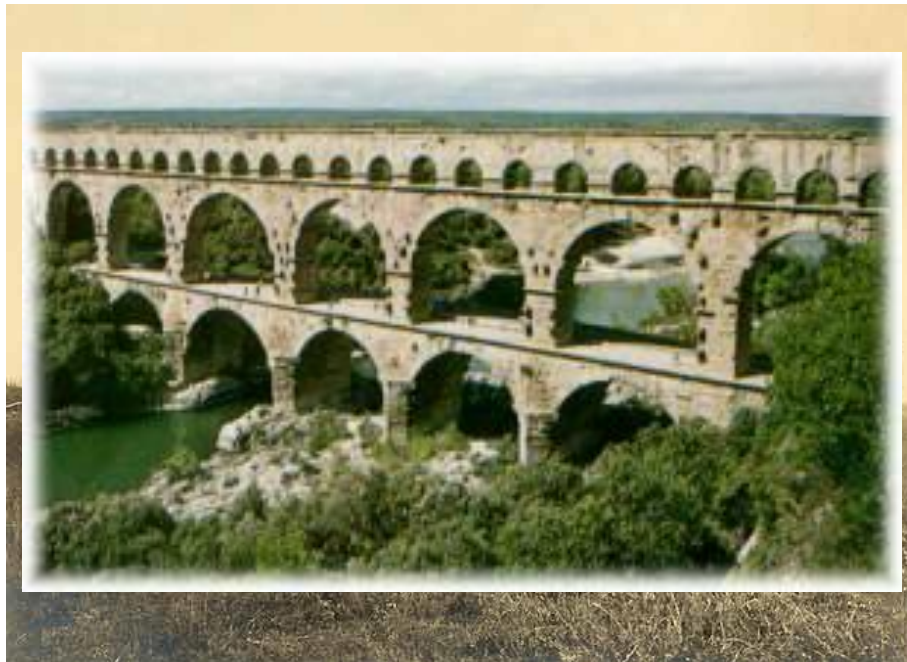
De Architectura :

- Interesse dei Greci per la rappresentazione come fondamento per l'arte pittorica
- Limiti dell'Architettura come Scienza
- Primo modello per i trattatisti Rinascimento



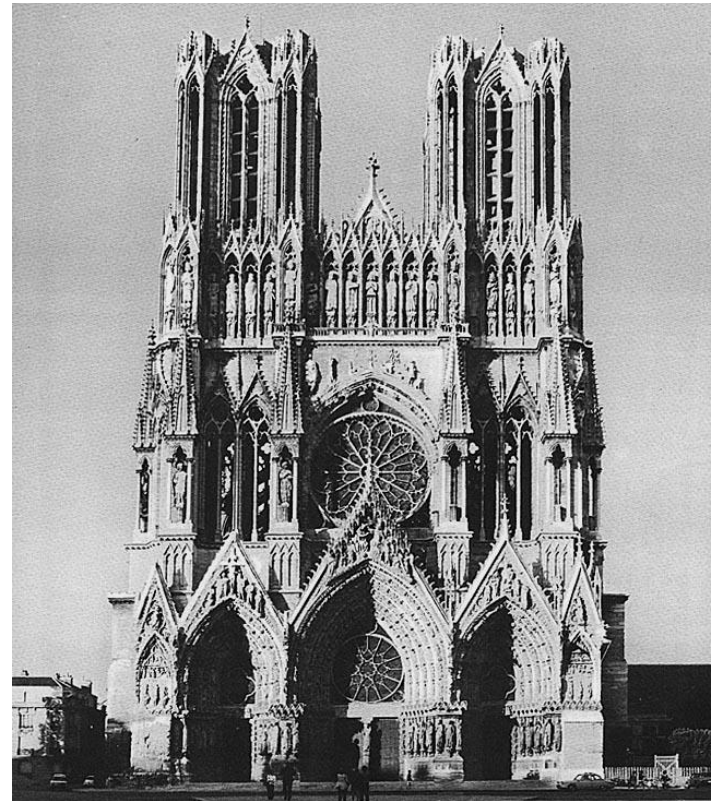
Periodo romano: III-X sec. d.C.

- Opere di grande bellezza ed ingegno, non razionalizzato



Architettura gotica : XII-XIII sec. d.C.

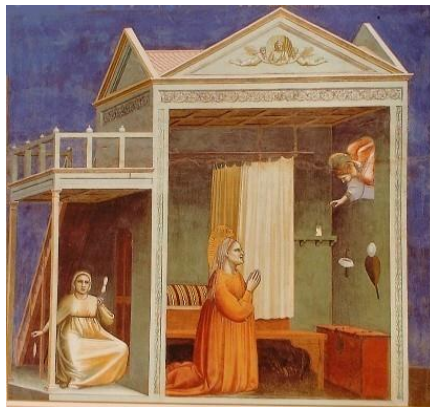
- Ottimizzazione degli spazi e della luminosità





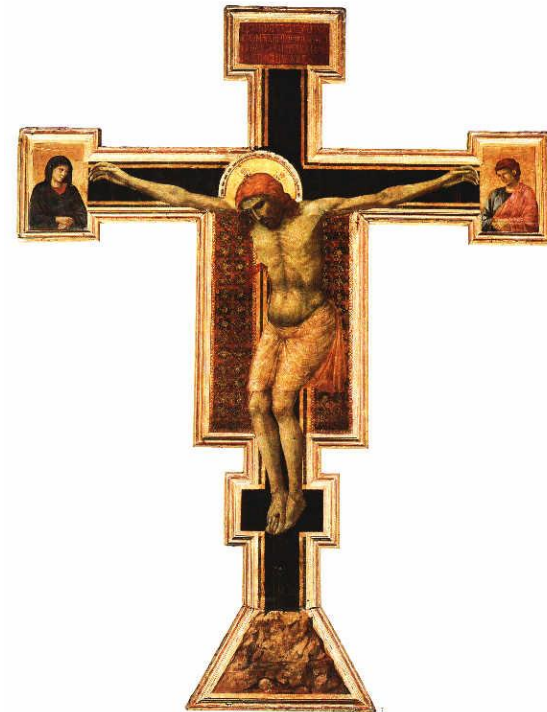
Giotto (Boninsegna e Lorenzetti) XIV sec

- Superamento concezione medievale
- 1° tentativo di rappresentazione degli oggetti in spazi piani limitati





Brunelleschi XV sec
(simmetrie)



Ingegno ed opera personale

Crocefisso di Santa Maria Novella:

opera nuova per le proporzioni e simmetrica distribuzione delle parti

Prime regole sulla prospettiva



Leon Battista Alberti
Letterato dell'Arte
(similitudine)

- Sulla stessa linea del Brunelleschi, ma
demanda ad altri la realizzazione
delle proprie opere





Piero della Francesca Matematico dell'Arte

Razionale → richiama Euclide

- *Costruisce teorema dopo teorema, problema dopo problema*
- *Piero non si ritrasse mai dalle matematiche nelle quali era stato tenuto maestro raro, tanto che i libri meritatamente gli hanno acquistato nome del geometra che fusse nei tempi suoi*

– G. Vasari

miglior





Leonardo da Vinci - XV sec.

(*“Mirabile e celeste – Vario ed instabile”*. Vasari)



- genialità – la pittura deve avere un fondamento scientifico
- *Studia prima la scienza, e poi seguita la pratica nata da essa scienza: quelli che si innamorano della pratica senza la diligenza sono come i nocchieri che entrano in mare sopra nave senza timone o bussola, che mai non hanno certezza dove si vadino. Sempre, la pratica deve essere edificata sopra una buona teorica, della quale la **prospettiva** è guida e porta: senza quella, niente si fa bene, così di pittura come in ogni altra professione.*
(*Trattato della Pittura* - cap.VII)



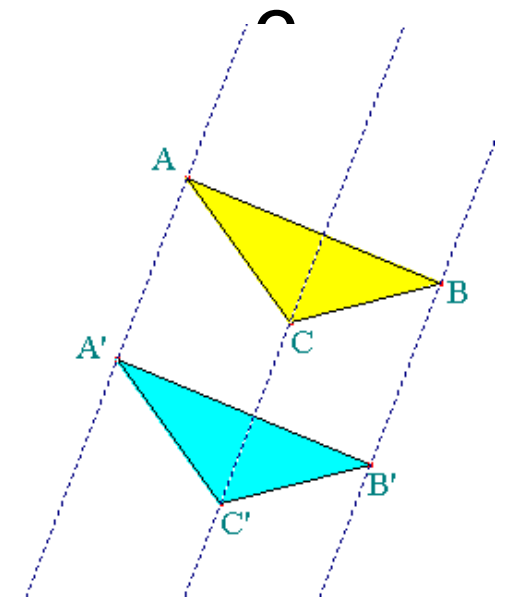
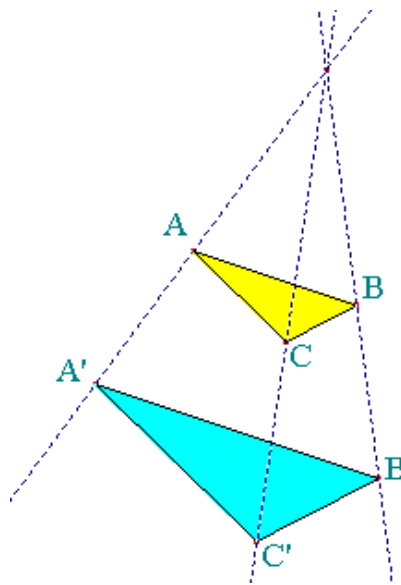
Federico Commandino XVI sec.

- - La prospettiva passa dalle mani degli artisti a quelle degli scienziati
- - Prima intuizione di omologia che si svilupperà nei 2 , 3 secoli successivi



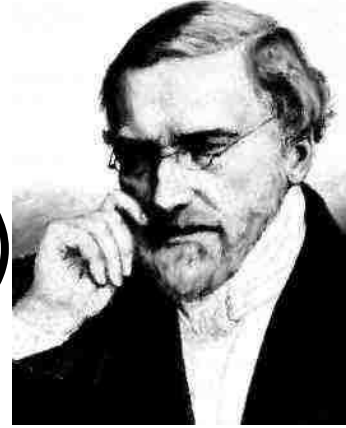
Desargues XVII sec.

Inaugurando il metodo delle proiezioni centrali, definisce per la prima volta il punto all'infinito ponendo le basi della G.D. della G.P.

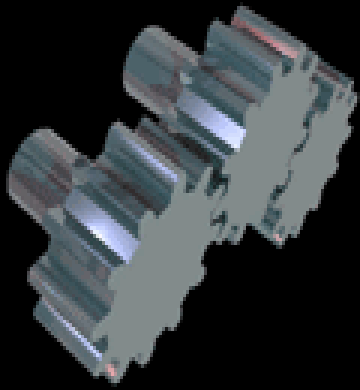




Gaspard Monge (1746-1818)
Jean Victor Poncelet (1778-1867)



- Il piano euclideo ampliato a piano proiettivo
- Aggiunta di una terza coordinata x_3
- $X_3 = 0 \Rightarrow$ punto all'infinito
punto improprio



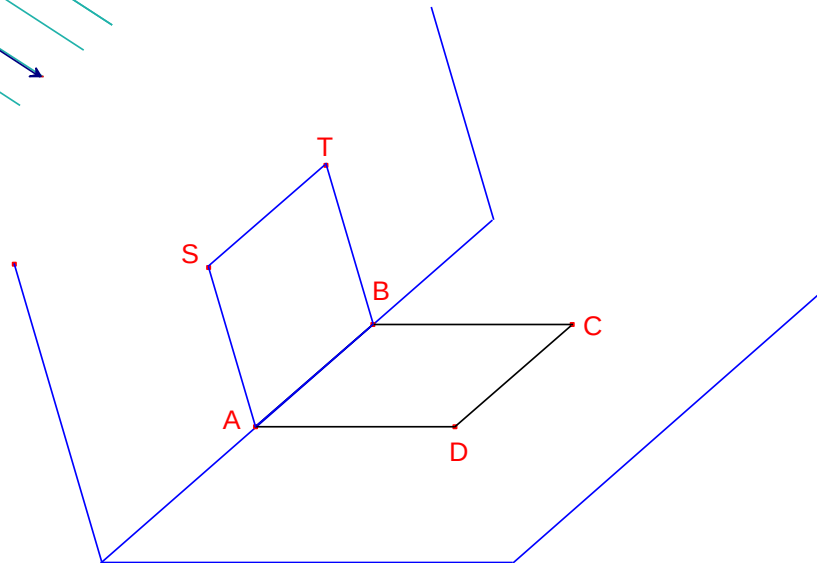
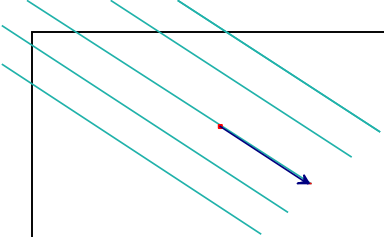
DIDATTICA MODERNA

E' indispensabile ampliare la geometria euclidea alla geometria proiettiva?

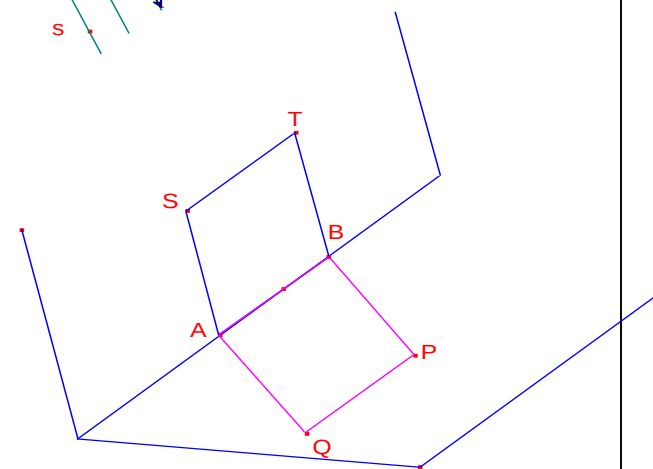
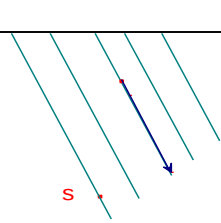
Le trasformazioni euclidee, (quelle conservano gli angoli), in natura sono poche.

Il primo approccio di bambino con la geometria ha due caratteristiche:

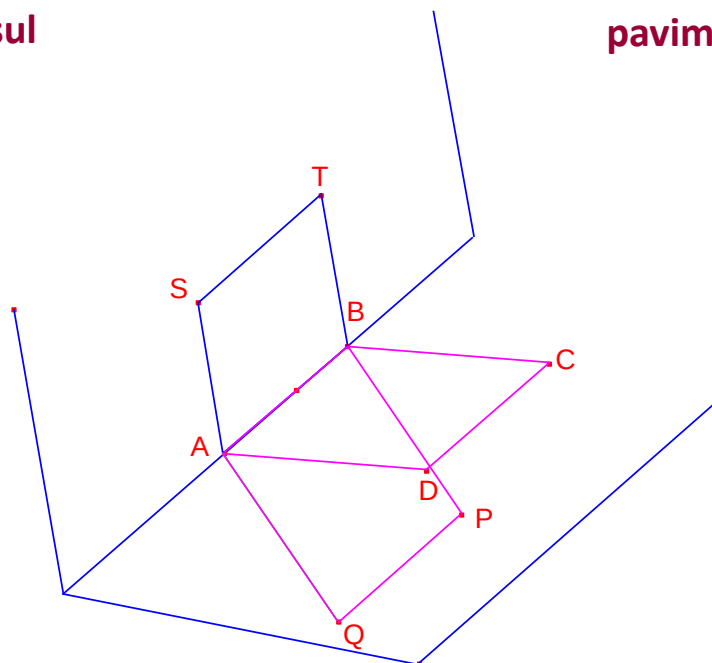
1. la visualizzazione della forma (approccio euclideo)
2. la visualizzazione delle ombre (approccio proiettivo che non conserva gli angoli, e va oltre la geometria euclidea)



**Proiezione delle finestra sul
pavimento la mattina**



**Proiezione delle finestra sul
pavimento alcune ore dopo**



Sovrapposizione delle proiezioni

Possibili Osservazioni

- Quali forme hanno le proiezioni della finestra sul pavimento?
- Quali sono le proprietà che si mantengono?
- Quali sono le proprietà che cambiano?

Struttura di Programmazione Didattica

1 Introduzione storica-epistemologica

2 Enti geometrici fondamentali

3 Parti limitate e parti illimitate della retta e del piano

Semirette- segmenti

Angoli -poligoni

4 I triangoli: criteri di congruenza e teoremi relativi

5 Parallelismo e perpendicolarità: teoremi relativi – 5° postulato

Le discussioni sul postulato delle parallele

Nascita delle geometrie non euclidee

6 Teoremi sui triangoli che si basano sul 5° postulato

7 Quadrilateri: trapezio, parallelogramma e teoremi relativi

8 Proiezioni ortogonali: perpendicolarità e segmenti obliqui

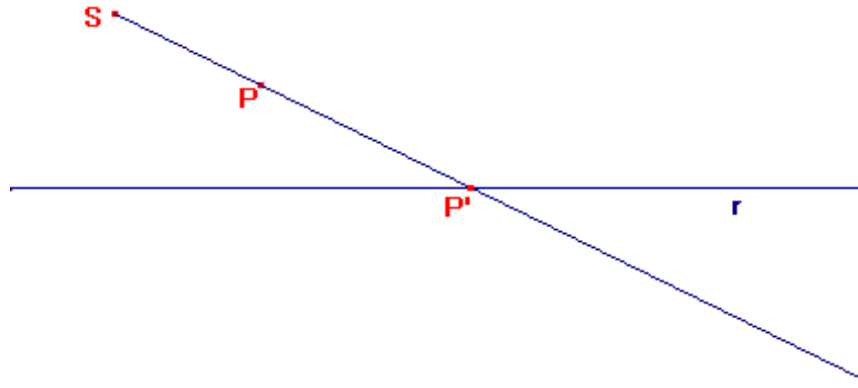
Proiezione e sezione: prospettiva,

Omologia: la geometria proiettiva

9 Teorema di Talete

Le trasformazioni geometriche: isometrie.

- Si definisce **Proiezione di un punto P** su una retta r, da un **centro di proiezione S**, il punto $P' \equiv SP \cap r$

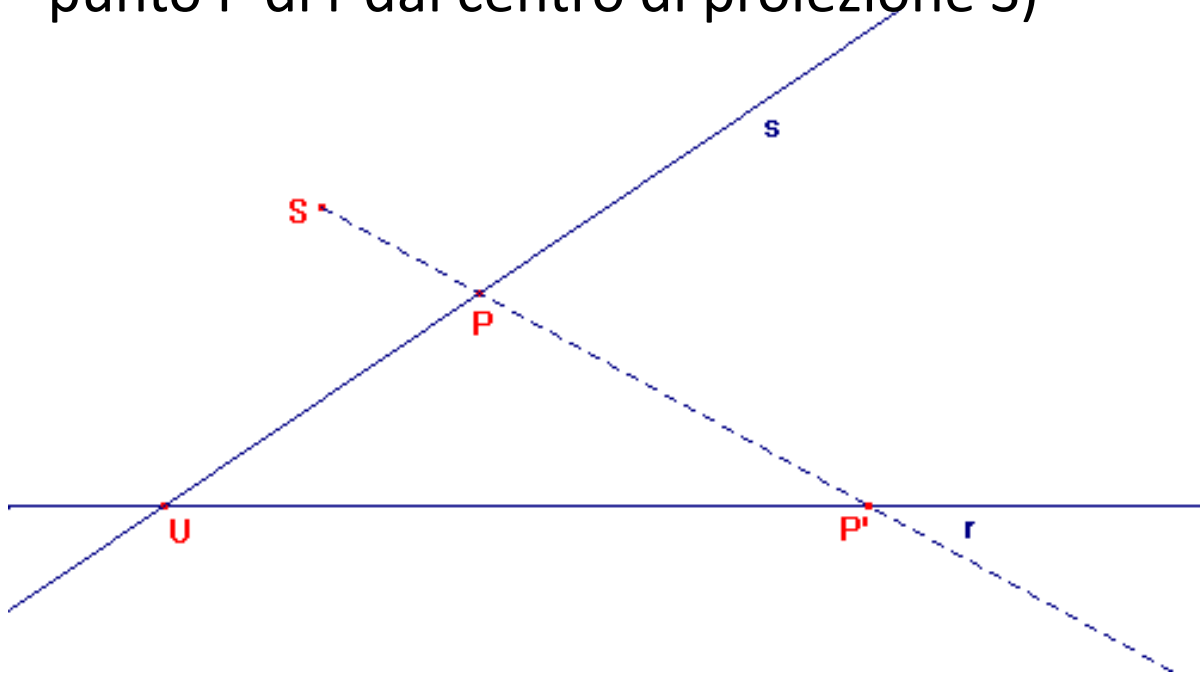


- Se il segmento SP è perpendicolare ad r, la proiezione si dice ortogonale.

Se consideriamo la retta r e la retta PP' che si intersecano nel punto P'; il loro punto di intersezione **P' è detto sezione**, in analogia alla sezione tra due piani, alla sezione di un piano con una qualsiasi figura solida

Un' operazione di sezione e proiezione tra rette (o tra piani nello spazio) si chiama **prospettività**.

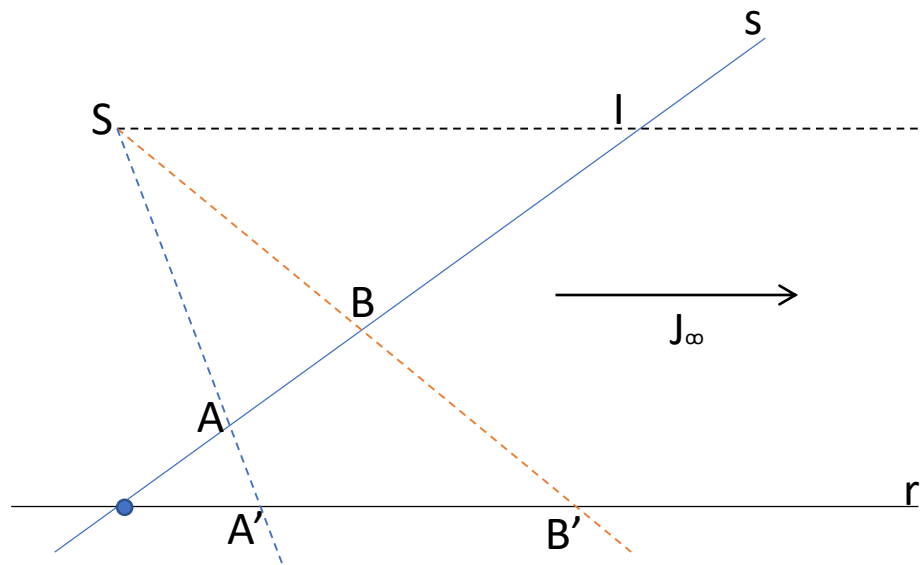
Date due rette r ed s del piano ed un punto S esterno sia ad r che ad s , si definisce *prospettività di centro S tra le rette s ed r* la corrispondenza che ad ogni punto $P \in s$ fa corrispondere il punto $P' \equiv SP \cap r$ (cioè la proiezione del punto P di r dal centro di proiezione S)



La definizione di
prospettività tra rette
si amplia a
prospettività tra piani

E' importante osservare che se le rette r ed s sono parallele questa corrispondenza è biunivoca.

Se invece sono incidenti, si vede che esiste un punto I appartenente ad s che non ha corrispondente nella prospettiva in quanto la retta SI è parallela ad r .



Prima di parlare di punto improprio o punto all'infinito è opportuno far vedere che la caratteristica del punto I appartenente ad r di non avere corrispondente sulla retta s , non è riferita solo ad r ma a tutte le rette parallele ad r , cioè ad una direzione del piano.

Ciò ci permette di **caratterizzare** intuitivamente il **punto improprio come direzione del piano**.

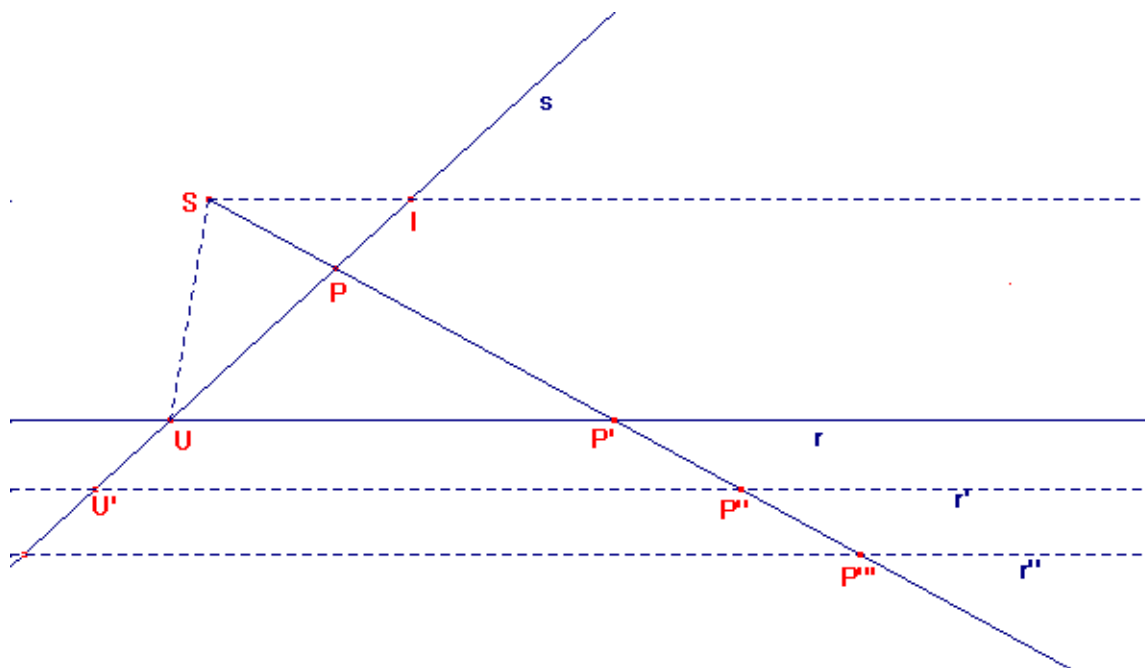
Se s è parallela ad r , la corrispondenza è completa e biunivoca in quanto la semiretta che congiunge il centro di proiezione S con un qualsiasi punto di s , interseca certamente la retta r , e viceversa.

Se s incide r in un punto U , si può osservare:

- a) al punto U corrisponde se stesso: U è detto **punto unito**;
- b) esiste un punto $I \in s$ tale che la retta IS è parallela ad r , per cui al punto I non corrisponde alcun punto di r .

E' possibile completare la corrispondenza biunivoca tra s ed r , associando al punto $I \in s$ un elemento J_∞ di r che è detto **punto improprio** o **punto all'infinito** ed è individuato dalla direzione della retta r .

Infatti, se consideriamo la prospettività di centro S tra la retta s ed una qualsiasi retta r' parallela ad r , possiamo osservare che al punto $I \in s$ corrisponde ancora J_∞



Resta però il problema di rappresentarlo analiticamente
come i punti propri del piano, cosa che ha portato, con
l'ampliamento del piano euclideo al piano proiettivo,
all'**aggiunta di una terza coordinata** che per i punti
impropri è uguale a zero. Una giustificazione si può dare
come segue:

Punto e Retta nel piano Proiettivo

Partendo dalla rappresentazione di un punto $P(x,y)$ nel piano cartesiano, mediante l'ampliamento proiettivo, si individua il punto improprio con l'aggiunta di una terza coordinata.

Consideriamo una direzione δ del piano (punto improprio P_∞); sia r la retta per l'origine che individua P_∞ e sia $P_1(x,y)$ un punto di r .

PUNTO e RETTA nel PIANO PROIETTIVO

$$P_1(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{1}, \frac{\bar{y}}{1} \right); \quad P_2(2\bar{x}, 2\bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{1/2}, \frac{\bar{y}}{1/2} \right); \dots\dots$$

$$P_{10}(10\bar{x}, 10\bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{1/10}, \frac{\bar{y}}{1/10} \right); \dots\dots$$

$$P_{1000}(1000\bar{x}, 1000\bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{1/1000}, \frac{\bar{y}}{1/1000} \right); \dots\dots$$

$$P_1(\bar{x}, \bar{y}, 1); \quad P_2\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2}\right); \dots\dots\dots P_2\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{10}\right); \dots\dots\dots P_{1000}\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{1000}\right)$$

I punti di tale successione appartengono tutti alla retta r ed al crescere dell'indice k , cresce la distanza OP_k , ovvero, al tendere a zero del denominatore comune alle due coordinate che diventa terza coordinata, il punto P_k si allontana indefinitivamente.

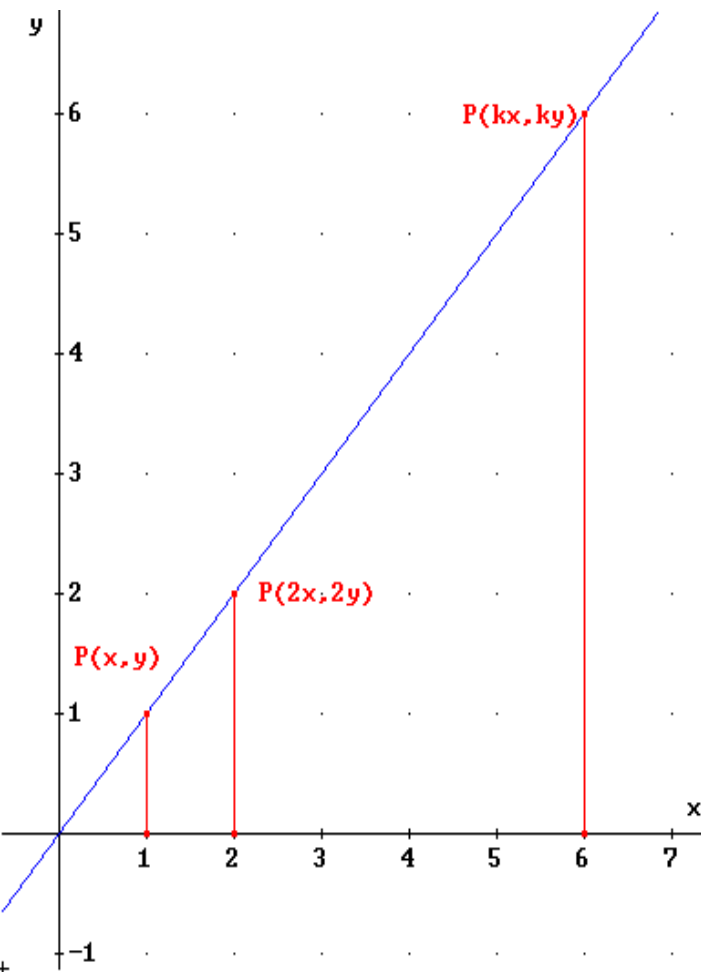
Posto:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \quad y = \frac{x_2}{x_3}$$

possiamo definire le coordinate dei punti impropri come terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) in cui risulta $x_3 = 0$.

Pertanto, l'espressione $x_3 = 0$.

Individua il luogo geometrico dei punti impropri del piano, cioè la **retta impropria**.



Classificazione delle coniche

Le intersezioni di una conica con una retta si ricavano dalla risoluzione di un sistema a due incognite formato da un'equazione di secondo grado e da un'equazione di primo grado, per cui si ottengono due soluzioni che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse coniugate.

Diciamo dunque che una retta (anche impropria) interseca una conica in due punti.

- Se la conica è **un'ellisse**, la retta può essere esterna (due intersezioni immaginarie), tangente (due intersezioni reali e coincidenti), secante (due intersezioni reali e distinte). *Ciò si verifica qualunque sia la direzione della retta.*
- Se la conica è **una parabola** si hanno sempre due intersezioni per ogni direzione diversa dalla direzione dell'asse della parabola; infatti, una retta parallela all'asse della parabola interseca la parabola in un solo punto reale, mentre la seconda soluzione è all'infinito; diciamo in tal caso che *la parabola ha un punto di intersezione con la retta impropria.*
- Se la conica è **un'iperbole**, si può osservare che le rette aventi le direzioni dei due asintoti hanno una sola intersezione con la conica, mentre l'altra è all'infinito; diciamo allora che *l'iperbole ha due intersezioni con la retta impropria*

Per classificare quindi una conica operiamo nel piano proiettivo, intersecando la conica rappresentata dall'equazione

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

Con la retta impropria di equazione $x_3 = 0$.

A seconda delle soluzioni del sistema si stabilisce il tipo di conica

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

dalla cui equazione risolvente:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

ricaviamo il numero di intersezioni con la retta impropria analizzando il segno del discriminante Δ . Risulta:

$$\frac{\Delta}{4} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -A_{33}$$

Quindi si ha:

- 1) Se $\Delta > 0$ risulta $A_{33} < 0$: la conica ha due intersezioni reali con la retta impropria (le direzioni degli asintoti) ed è un'iperbole
- 2) Se $\Delta = 0$ risulta $A_{33} = 0$: la conica ha una sola intersezione reale (due intersezioni coincidenti) con la retta impropria (le direzioni degli asintoti) ed è una parabola
- 3) Se $\Delta < 0$ risulta $A_{33} > 0$: la conica non ha intersezioni reali con la retta impropria ed è un'ellisse.

Pertanto il segno del determinante A_{33} ci
permette di classificare le coniche col piano
proiettivo.

Dalle operazioni di proiezione per le funzioni lineari di primo grado (rette), e di proiezione e sezione per le funzioni quadratiche di secondo grado (coniche), la Geometria Proiettiva ci permette uno studio ed un'analisi con una visualizzazione molto più ampia, anche per lo studio delle trasformazioni geometriche.

Le proprietà che non variano della G.P. sono incluse nelle proprietà che non variano della G.A. che a loro volta sono incluse nelle proprietà che non variano della G.E, i cosiddetti invarianti.

Spazio piatto: da Talete (VI sec. a.C. ad oggi)

Trasformazioni lineari

```
graph TD; TL[Trasformazioni lineari] --> GP[Geometria Proiettiva]; TL --> GA[Geometria Affine]; TL --> GE[Geometria euclidea]; GP --> O[Omografie]; GA --> A[Affinità]; GE --> S[Similitudini]; S --> I[Isometrie];
```

Geometria Proiettiva

Omografie

Invarianti

Rette in rette

Coniche non degeneri

Birapporto

Geometria Affine

Affinità

Invarianti

Parallelismo

Coniche chiuse

Rapporto semplice

Geometria euclidea

Similitudini

Invarianti

Perpendicolarità Misure angoli

Circonferenze

Rapporto distanze

Isometrie

Invarianti

Le isometrie conservano tutte le proprietà delle similitudini e
mutano segmenti congruenti in segmenti congruenti

Rapporto Semplice

Fissiamo sulla retta orientata r due punti **A** e **B**, possiamo definire per ogni $P \in r$ il rapporto (rapporto semplice) che indichiamo con λ

$$(ABP) = \lambda = \frac{AP}{BP}$$

Osserviamo che λ assume valori positivi all'esterno di **AB**, valori negativi all'interno.

Birapporto e coordinate proiettive

Dati 4 punti A,B, C, D (propri o impropri) di una retta r, dicesi *birapporto* dei 4 punti considerati, in quell'ordine, e lo si indica con (ABCD), il numero:

$$(ABCD) = (ABC) : (ABD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

cioè il rapporto tra i rapporti semplici (ABC) e (ABD)

Invarianti delle trasformazioni lineari

Relativamente alle trasformazioni di rette (invarianti espressi da equazioni di primo grado) ed alle trasformazioni di coniche (invarianti espressi da equazioni di secondo grado),

un'Omografia muta *una retta in un'altra retta ed una circonferenza in una conica reale non degenera*; inoltre, indicato con r ed s due rette che si corrispondono nell'omografia, si conserva il *birapporto* tra quaterne di punti, corrispondenti sulle rette r ed s

Rappresentazioni di primo grado

Poiché un'omografia muta rette in rette, deve essere rappresentata, nel piano proiettivo, da equazioni di primo grado:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \quad (*)$$

dove la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (*,*)$$

ha rango tre ($\det A \neq 0$), affinché la corrispondenza sia biunivoca.

Affinità

Se l'omografia muta rette parallele in rette parallele, è detta *Affinità*

Relativamente alle proprietà espresse da equazioni di primo grado, poiché in una trasformazione affine si conserva il parallelismo, *un punto improprio si muta in un altro punto improprio*, per cui *la retta impropria è unita*.

Relativamente alle trasformazioni espresse da equazioni di secondo grado, *una circonferenza si muta in una conica chiusa* (ellisse); inoltre, se r ed s si corrispondono nell'affinità, si conserva il *rapporto semplice* tra terne di punti di esse che si corrispondono ed è *costante il rapporto tra le misure delle aree di figure corrispondenti*.

Espressione analitica di una affinità

La proprietà delle affinità di avere unita la retta impropria, si traduce analiticamente nella eliminazione della terza equazione della (*) in quanto risulta $x'_3 = x_3$

Pertanto un'affinità è espressa analiticamente da due equazioni lineari (il piano proiettivo coincide con il piano affine):

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \quad (***)$$

Similitudine

Un'affinità in cui si conservano le ampiezze degli angoli è detta *Similitudine*

Relativamente alle proprietà espresse da equazioni di primo grado, in una similitudine, *rette perpendicolari si mutano in rette perpendicolari*; relativamente alle proprietà espresse da equazioni di secondo grado, *una circonferenza è mutata in un'altra circonferenza*.

Inoltre, si conserva il rapporto tra le misure di coppie di segmenti corrispondenti.

Conservazione di rapporti

E' interessante notare che nel passaggio:

omografia $\rightarrow$ affinità $\rightarrow$ similitudine

in cui si conserva rispettivamente il

birapporto $\rightarrow$ rapporto semplice $\rightarrow$ rapporto distanze

si passa da una proprietà relativa

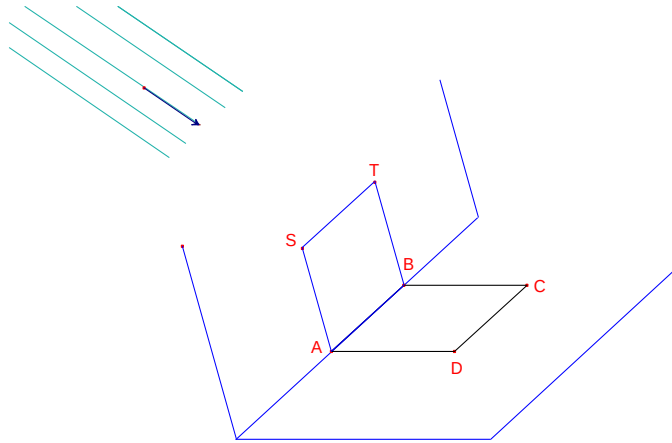
- a quattro punti corrispondenti (birapporto),
- tre punti corrispondenti (rapporto semplice),
- due punti corrispondenti (rapporto distanza).

Isometria

Se la similitudine conserva le distanze, è detta *Isometria*.

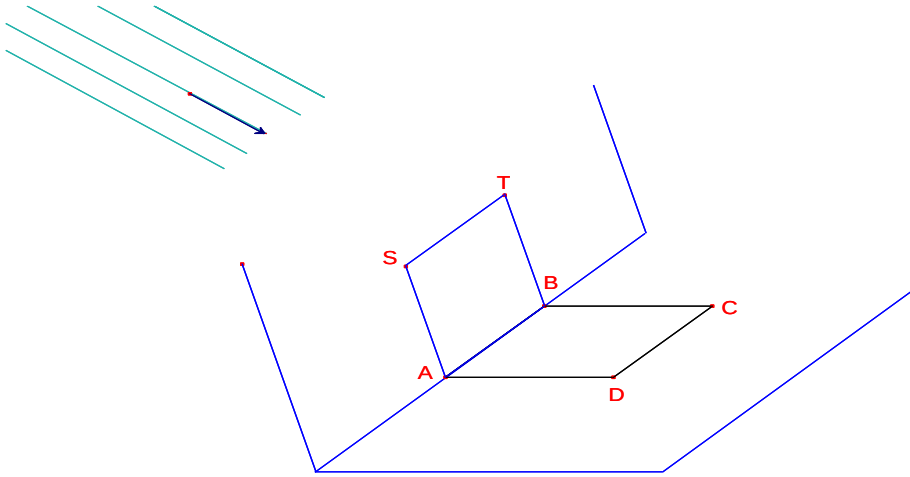
Lo studio delle proprietà delle *similitudini* e delle *isometrie* è l'argomento dei testi di geometria euclidea.

- Ogni prospettiva tra enti geometrici ω e τ o la composizione di due o più prospettive è detta proiezione tra ω e τ .
- Nel caso in cui gli enti geometrici sono due piani α e β dello spazio tridimensionale la proiezione è detta **omografia** tra piani α e β .
- Se α e β sono sovrapposti diciamo *prospettiva* del piano in sé.
- La composizione di due prospettive nello spazio è detta **omologia**.



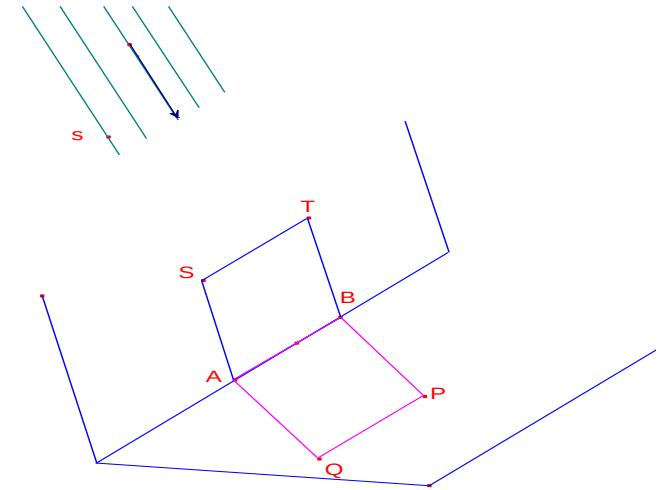
La figura schematizza la prospettiva con centro improprio (si considera il sole come punto all'infinito) tra il piano verticale che contiene la finestra, e il piano orizzontale che contiene la proiezione (quindi è una prospettiva tra piani).

L'OMOLOGIA: composizione di due prospettività

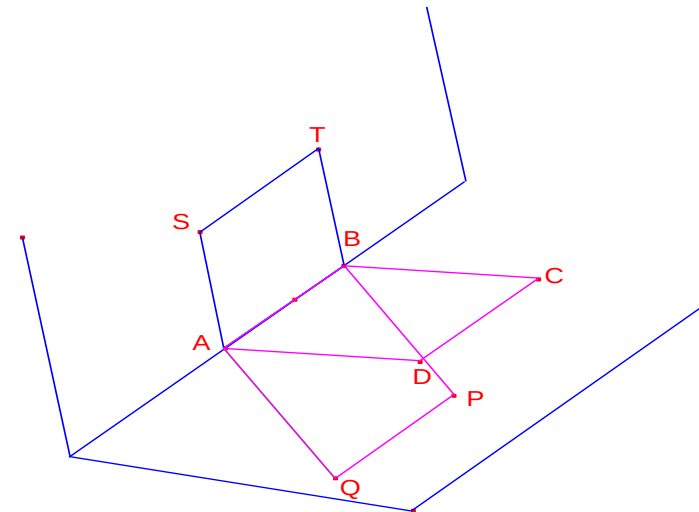


Proiezione della finestra sul piano orizzontale la mattina

Sovrapposizione delle proiezioni: la trasformazione sul piano orizzontale, che muta ABCD in ABPQ, è l'omologia



Proiezione della finestra sul piano orizzontale alcune ore dopo



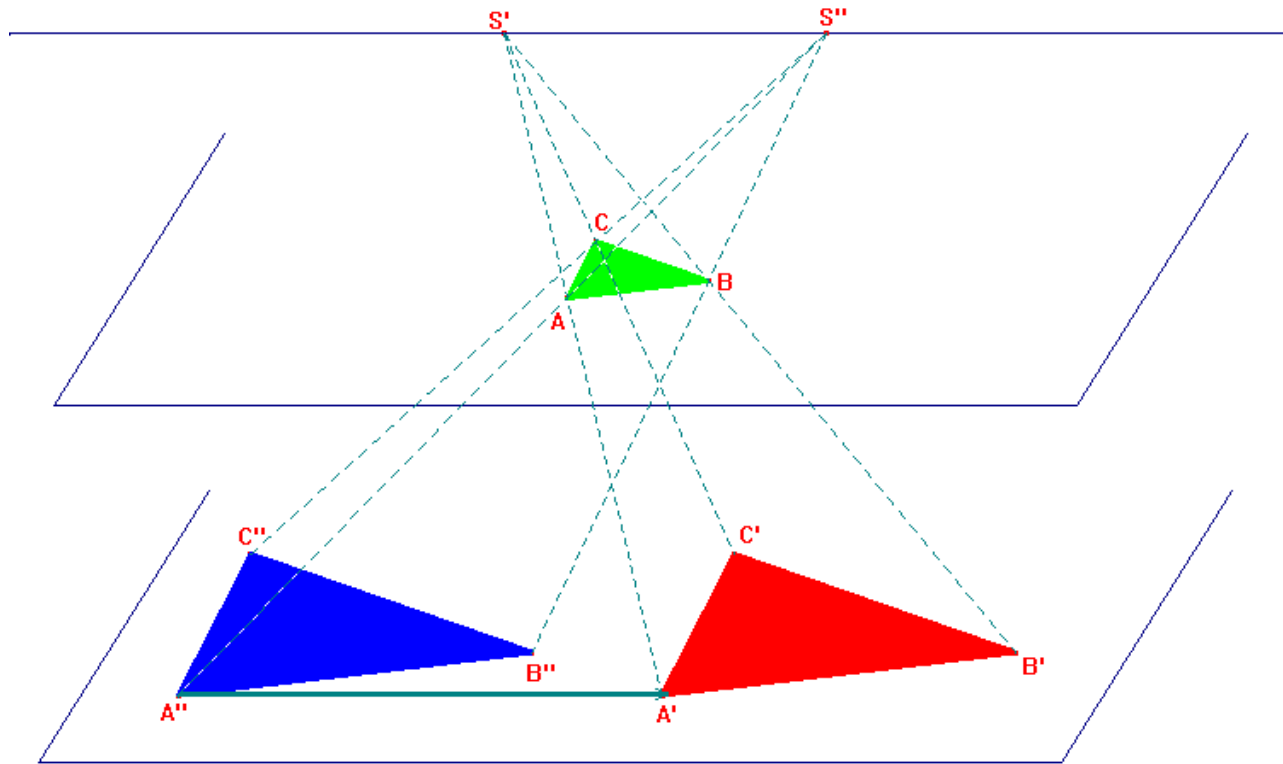
Proprietà Omologia

- Genesi dell'omologia nello spazio, trasformazione piana
- Le proprietà dell'omologia (per il docente Disegno Geometrico):
 - 1) esiste un punto unito che può essere proprio o improprio
 - 2) esiste una retta unita che può essere propria o impropria.
 - 3) punti corrispondenti sono allineati con il centro
 - 4) rette corrispondenti si incontrano sull'asse

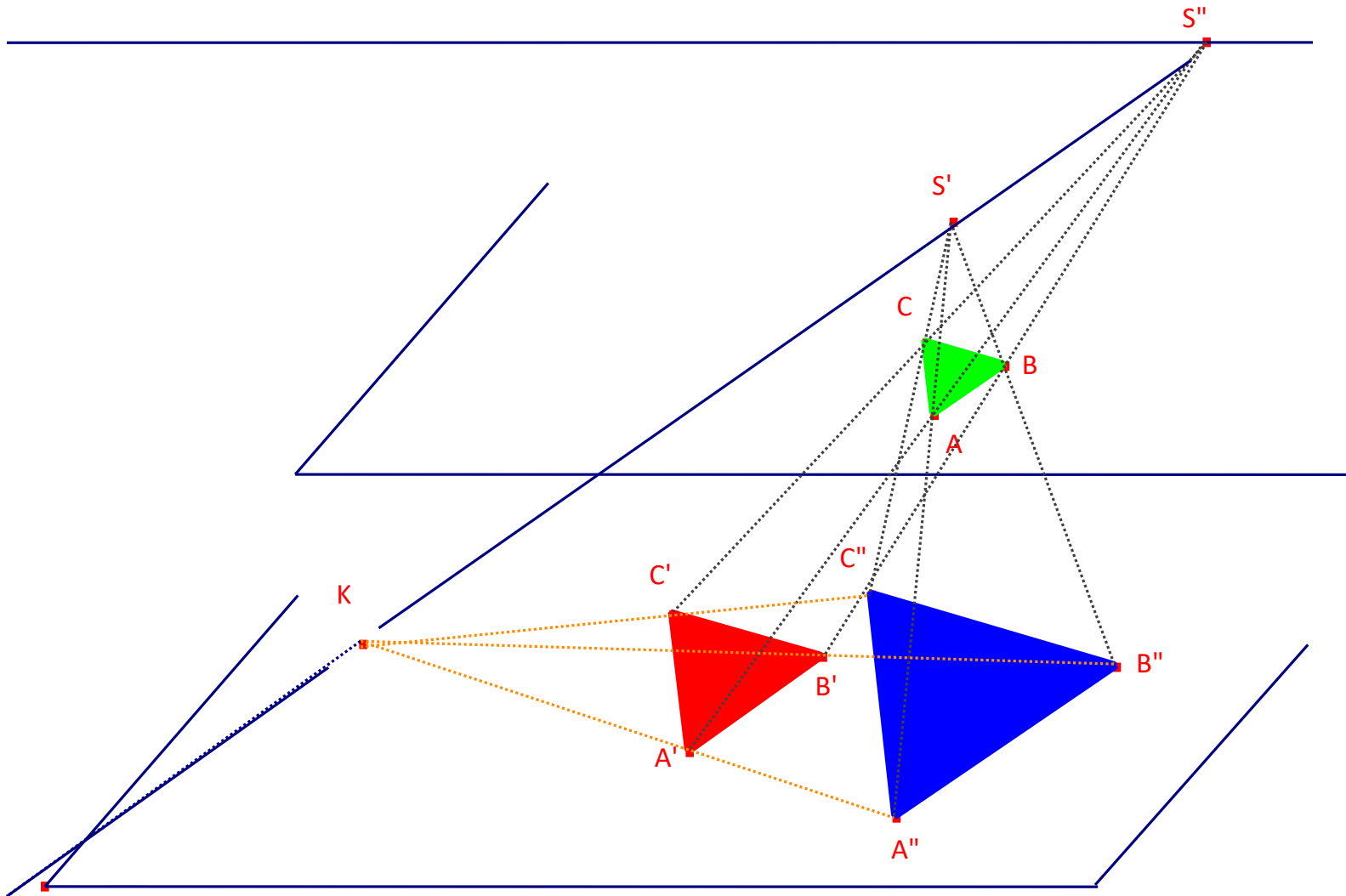
F.Casolaro Proiettività tra piani. Legge di dualità. Omografia e omologia Atti M.P.I. e Università La Sapienza di Roma 1990-1991 a cura di Cesare Cundari.

Per il docente di Matematica le caratteristiche dell'omologia sono:

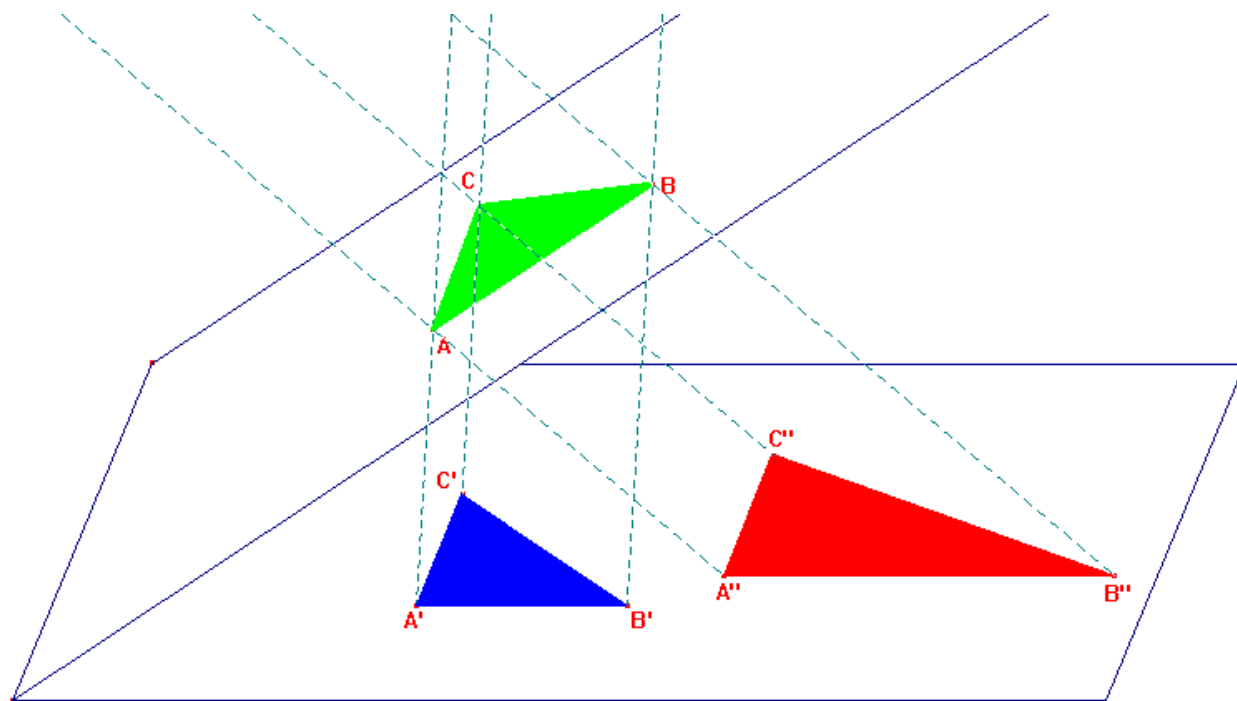
Asse improprio, centro improprio l'omologia è una **traslazione**

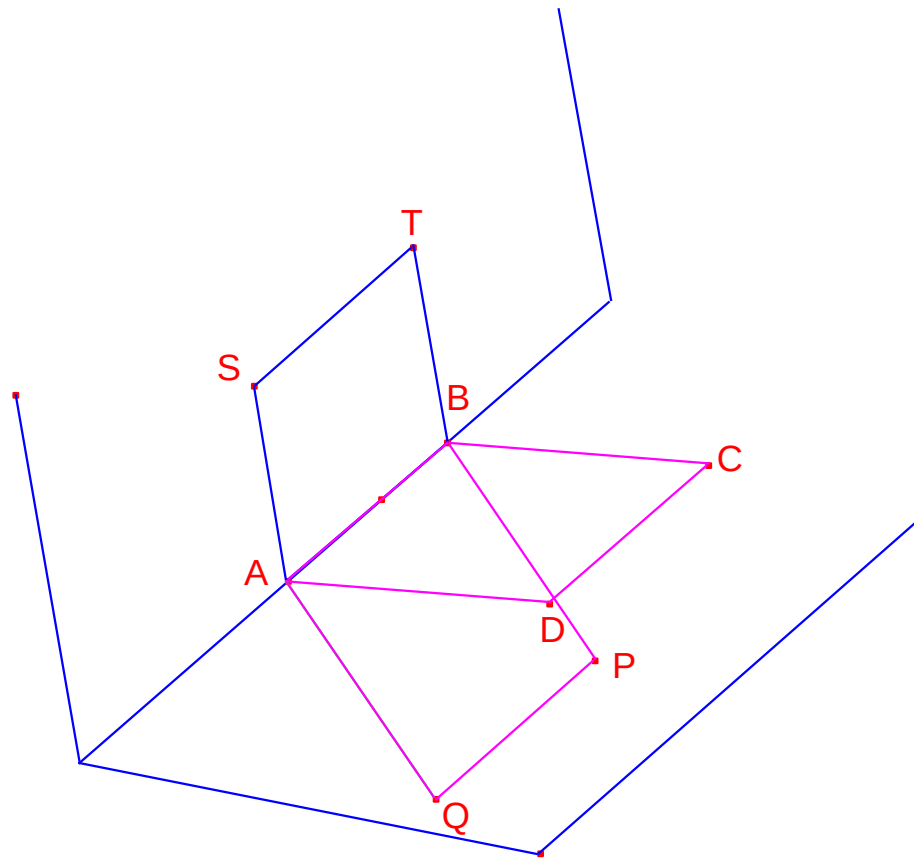


Asse improprio, centro proprio l'omologia è una *omotetia*



Asse proprio, centro improprio l'omologia è detta *affinità omologica* o *omologia affine* (*simmetria assiale*, il piano di riferimento è perpendicolare al piano della figura, che è a sua volta perpendicolare alla congiungente i centri di proiezione S_1 ed S_2 ed è equidistante da essi).



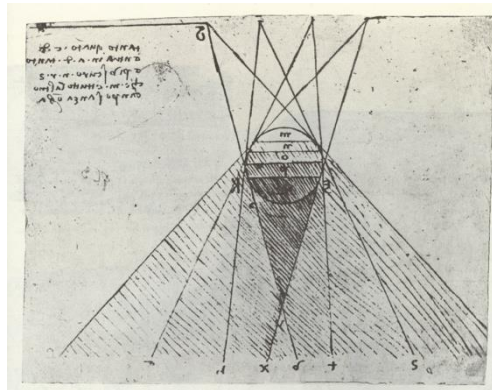


Omologia Affine

CONCLUSIONI

Questo percorso ha i seguenti obiettivi:

1. L'adeguamento della Geometria alla realtà del mondo che ci circonda.
2. Permettere la trattazione dell'Architettura e la Rappresentazione come Scienza.
3. Mettere in risalto, attraverso luci ed ombre, come la bellezza dell'Universo ha le basi nella Geometria



Bibliografia

[1] **F.Casolaro - A. Rotunno:** *“Presentazione di un percorso didattico di geometria proiettiva: Trasformazioni geometriche nell’arte”* - <www. aifnapoli2” – Relazioni tra Fisica e Matematica>.

[2]**C. Cundari** - Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell’Università “La Sapienza” di Roma (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991): *“Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie”*.

[3] **Gino Loria** - Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai giorni nostri - Milano, Ulrico Hoepli, 1921.

[4] **F. Casolaro - F. Eugeni:** *“Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebre reali doppie”*. Atti del Convegno “Aspetti multidisciplinari della didattica della matematica” - Teramo, 1-3 dicembre 1995. Ratio Matematica n. 1, 1996 – pag. 23-33.

[5] **F. Casolaro - L. Cirillo:** *“Le trasformazioni omologiche”*. Atti Convegno Nazionale Mathesis *“I fondamenti della matematica per la sua didattica”*- Verona, 28-30 novembre 1996 – pag. 309-318.

[6] **F. Casolaro:** *“Modello geometrico non euclideo per lo spazio fisico”*, Atti Convegno *“Metodi di rappresentazione dell’incertezza nell’Architettura”* - Pescara, novembre 1997 – pag.103-106.

[7] **F. Casolaro - C. Di Foggia**: “*Insegnamento della Matematica nel terzo millennio: la didattica breve*”. Atti del Convegno Nazionale “*Matematica nel 2000*”. Ortona aprile 1998 – pag. 236-243.

[8] **E. Ambrisi - F. Casolaro**: “*Il valore culturale della prova di Matematica agli esami di Stato*”. Congresso Nazionale Mathesis 1998: “*Matematica è/e Cultura*” - L'Aquila, 19-21 ottobre 1998 – pag. 27-32.

[9] **F. Casolaro**: “*Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo*”. Atti del Congresso Nazionale Mathesis “*La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo*” – 17-19 ottobre Bergamo 2002 – pag.185-198.

[10] **F. Casolaro**: “*Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica*” - Atti del Convegno Internazionale “*Matematica e Arte: un sorprendente binomio*” Vasto, 10-12 aprile 2003; pagg. 129-148.

[11] **F. Casolaro – R. Pisano**: “*Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività*”, Atti del XXVI Congresso Nazionale di “*Storia della Fisica e dell'Astronomia*” (SISFA 15-17 giugno 2006), tenutosi il giorno 15/05/2006 presso la Facoltà di Architettura “*Valle Giulia*” dell'Università di Roma “*La Sapienza*”. pag. 221-231.

[12] **F. Casolaro - R. Prosperi:** Atti della Scuola Estiva di Terni, 26-30 luglio 2011“*La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica*”. Editore 2C Contact.

[13] **F. Casolaro - R. Pisano:** "An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)" - History Research - Vol. 1, Number 1, December 2011 - pag. 47-60.

[14] **F. Casolaro - L. Paladino:** "Evolution of the geometry through the Arts" - 11th International Conference APLIMAT 2012 - in the Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Tecnology in Bratislava, 7-9 febbraio 2012, pag. 481-490.

[15] **F. Casolaro:** "L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?" – Atti del Convegno "Euclide...oltre Euclide" (Castellammare di Stabia, 10-12 maggio 2013) - "Science &Philosophy Divulgation" - DiSciPhil - Fascicolo 1(2014) - Fondazione “Panta Rei” Numero speciale di Ratio Mathematica - ISSN: 2282-7757.

[16] **F. Casolaro-A. Rotunno:** “Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations”. Atti del Convegno: Third International Conference - Recent Trends in Social Sciences: Qualitative Theories and Quantitative Models (RTSS), University of Defence-Brno, Czech Republic, 15-17 ottobre 2015.

Springer - book of Series. Studies in Systems, Decision and Control/series/13304.