

Rimini 20-21-22 aprile 2018

Convegno Nazionale / Corso di Formazione

***L'attualità degli insegnamenti dei grandi Maestri della Mathesis
nella seconda metà del secolo XX: nuove prospettive nella
didattica e nei fondamenti della Matematica.***

Il “saper vedere” in Matematica: le proposte didattiche di Bruno de Finetti rivisitate con un software di matematica dinamica

Luigi Tomasi

Centro Ricerche Didattiche «U. Morin»

luigi.tomasi@unife.it

Bruno de Finetti (1906-1985)

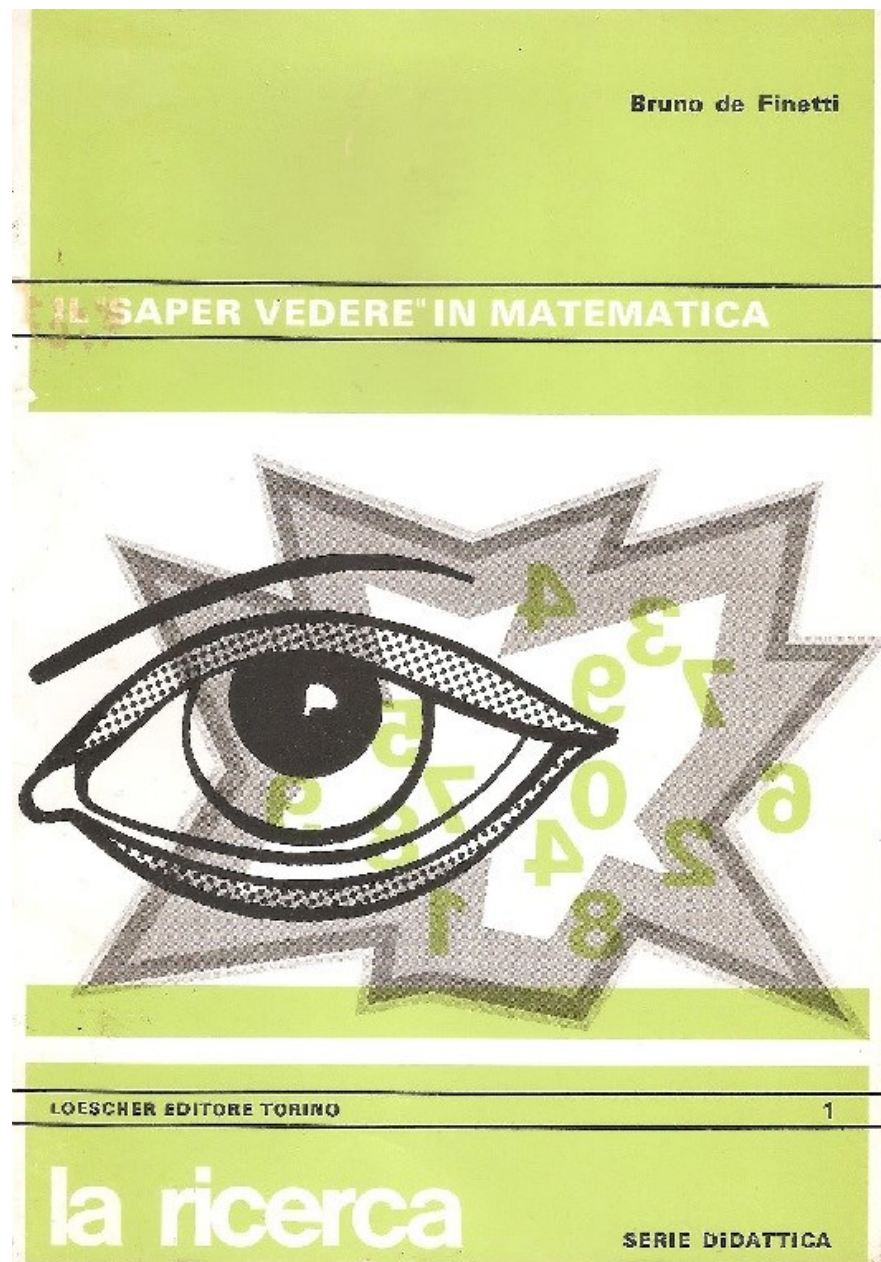
Presidente della Mathesis dal 1972 al 1981



Bruno de Finetti, IL "SAPER VEDERE" IN MATEMATICA, 1967

È un libro dedicato alla
didattica della
matematica.

**Il "saper vedere" in
Matematica** ebbe una
grande diffusione
quando uscì, nel 1967.
Il libro inaugurò una
collana didattica
dell'editore Loescher.



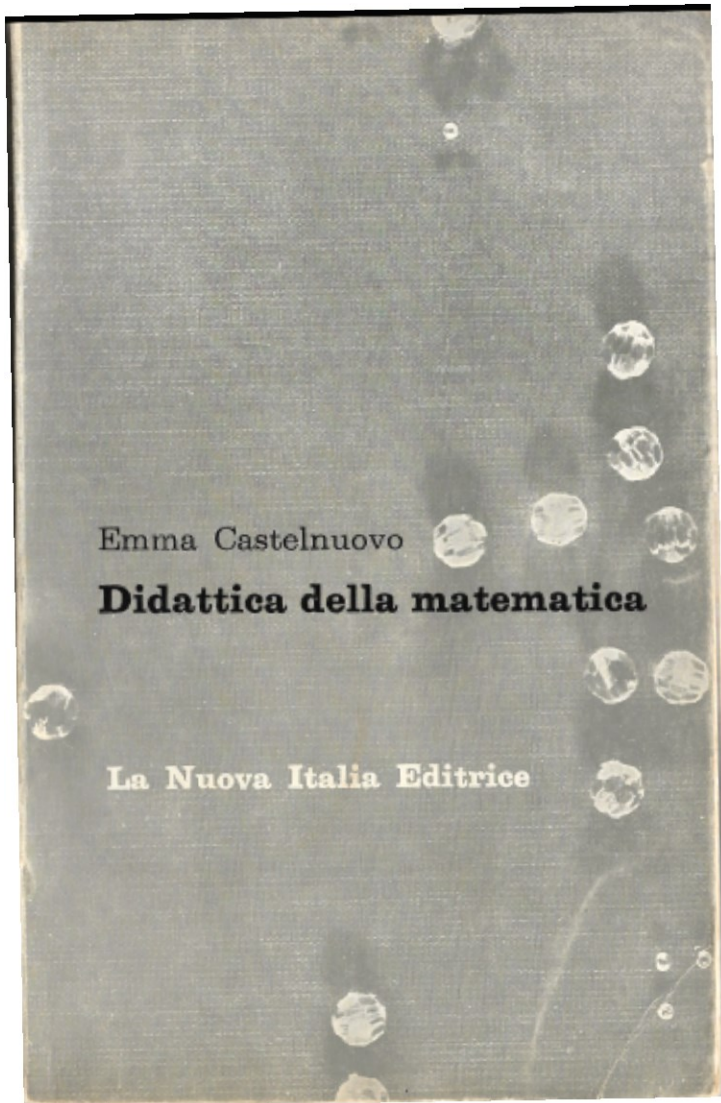
Una foto del 1967: Bruno de Finetti con Ugo Morin



VIII Congresso dell'UMI -
Unione Matematica Italiana
Trieste, ottobre 1967

Il «saper vedere» in matematica di Bruno de Finetti
è stato pubblicato pochi anni dopo un altro libro
molto importante per la didattica della matematica

1963



Emma Castelnuovo

Indice del libro
*Il “saper vedere” in
Matematica,*
di
Bruno de Finetti

1. Riflettere per giungere a un risultato
2. E, dopo, riflettere ancora
3. S'incontrano anche questioni generali
4. Come riflettere su di un problema
5. Saper vedere le cose facili
6. Saper vedere le cose concrete
7. Saper vedere gli aspetti economici
8. Riflettere sui casi particolari
9. Perché servirsi di formule?
10. Come fare infiniti passi in uno solo
11. Come sfruttare una visione dinamica
12. Come sfruttare una visione globale
13. Come sfruttare una visione deformabile
14. Come sfruttare certe tendenze “moderne”
15. Perché e come preoccuparsi delle approssimazioni
16. Come sfruttare i ragionamenti “per continuità”
17. Come riflettere in termini di probabilità
18. I “cervelli” elettronici e il nostro

Esercizi e problemi

Nota bibliografica

Nota didattica

Platone, Socrate e lo schiavo

(Platone, *Menone*): il quadrato di area doppia

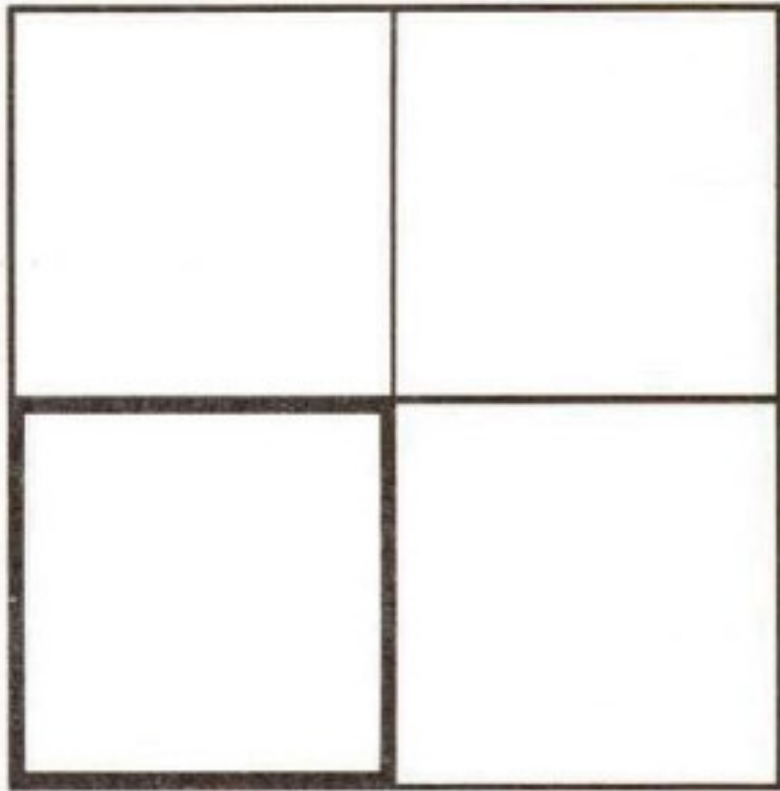


Figura 1

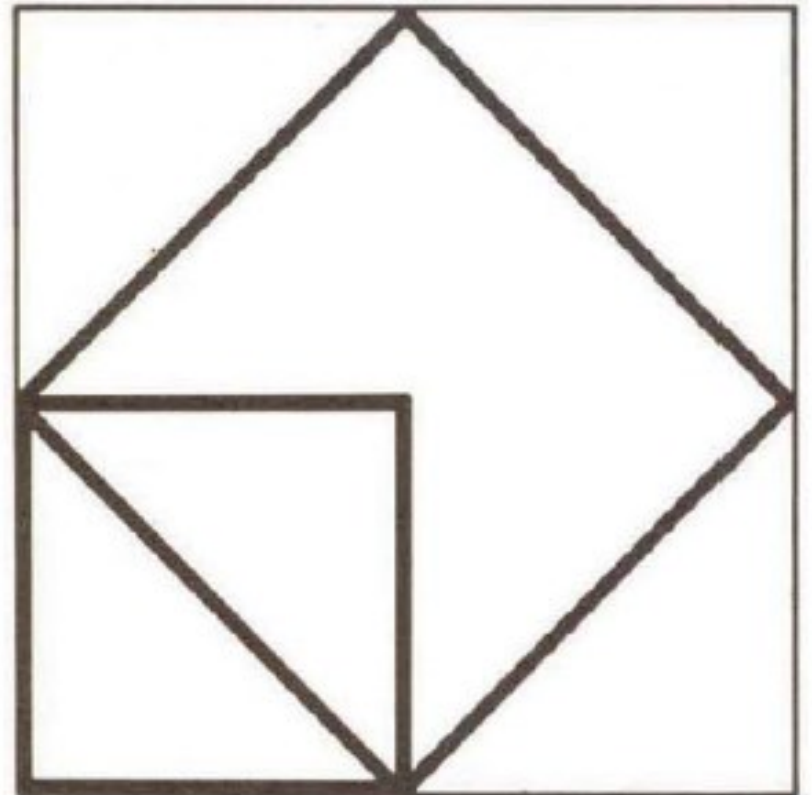


Figura 2

Volume di un ottaedro regolare (l'idea di un allievo di Emma Castelnuovo, citata da Bruno de Finetti)

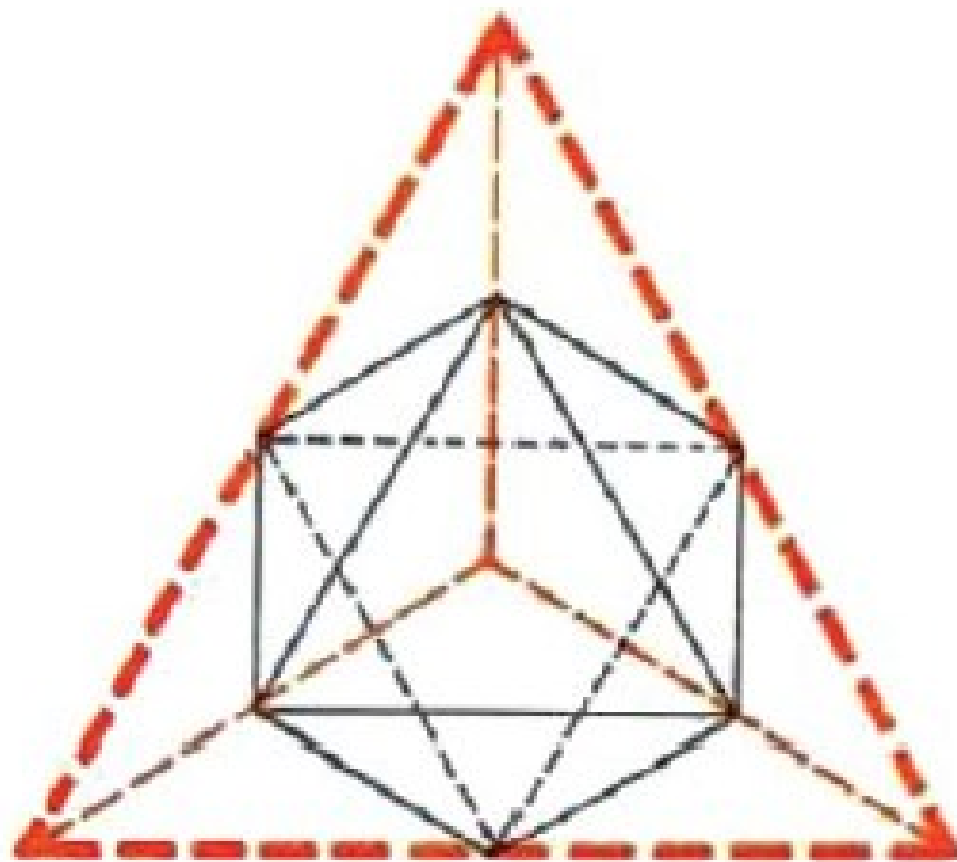


Figura 3

Volume di un ottaedro regolare (l'idea di un allievo di Emma Castelnuovo, citata da Bruno de Finetti)

Come mai – ci si chiederà – uno studente di scuola media, sia pure particolarmente dotato, ha potuto vedere quel problema sotto un aspetto non propinatogli da libri o docenti? Occorre dire che l'insegnante, in quella classe, è la prof. Emma Castelnuovo (NB, 1, 14), il cui metodo d'insegnamento tende a stimolare l'intelligenza anziché a soffocarla (come in genere avviene) sotto aridi nozionismi, talora pretesamente pratici, talora pretesamente scientifici.

L'idea dello scolareto Gauss (per trovare la somma di $1+2+3+\dots+99+100$)

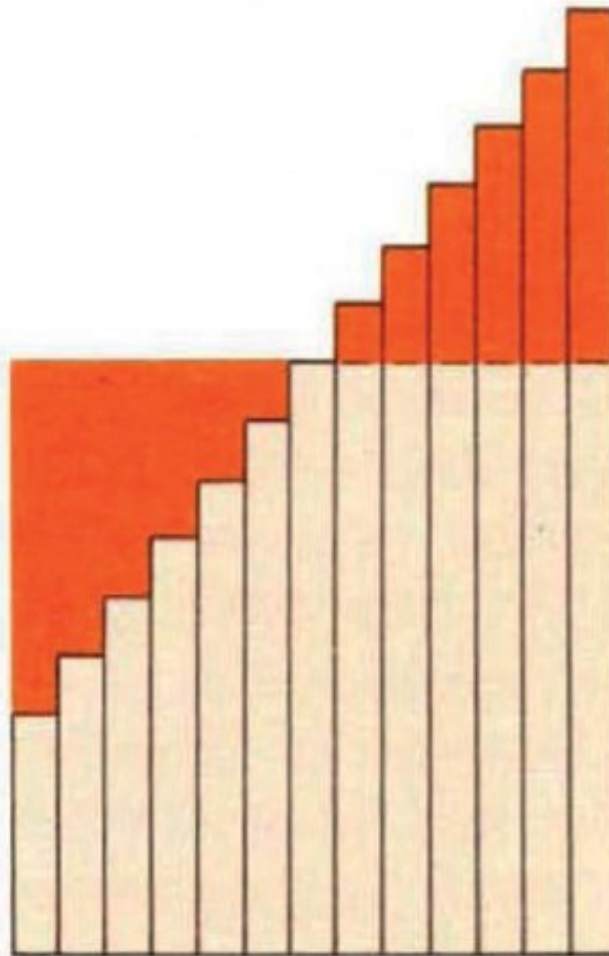


Figura 4

Risolvere un problema

Risolvere un problema è sempre di per sé uno sforzo istruttivo: ogni successo rende più facili ulteriori successi. Ma il vantaggio è molto più grande se ci si sofferma a riflettere, su ogni problema che ci si presenta, non soltanto quanto occorre per risolverlo ma poi ancora per far tesoro di tutte le osservazioni che siamo capaci di trarne sviscerandolo.

Praticamente, si tratta solo di domandarsi vari “perché?”:

- **perché** vale la conclusione trovata (ossia: sussisterebbe oppure varierebbe, e come, se modificassi i dati in questo o quel modo)?
- **perché** ho incontrato difficoltà e poi le ho superate (cioè: dov'era “il bandolo della matassa” e com'è che prima mi sfuggiva e poi l'ho visto)?

Risolvere un problema

Riflettendo su cose del genere ogni esempio arricchisce l'esperienza in misura moltiplicata ed in modo assai più profondo. Più profondo che mai, forse, se si giunge a riflettervi quasi senza accorgersene (come quando si cerca invano l'impostazione di un problema prima di addormentarsi, e al risveglio vediamo di averla già trovata).

Nulla è troppo banale

... il motivo per consigliare un po' di attenzione a dei dati numerici è questo: la maggior parte delle persone (a mio avviso) non si rende conto di quanto più rapidamente crescano le aree e più ancora i volumi al crescere delle dimensioni lineari (lunghezze).

Due valigie della stessa forma sembrano “quasi uguali”, quanto a capacità, quando differiscono di poco le dimensioni lineari: non sembra che in genere le persone si rendano ben conto che ad un aumento delle dimensioni lineari (lunghezza, larghezza, altezza) del 10% (oppure del 20% o del 25%) corrispondono aumenti di capacità (volume) di circa 33% (oppure 75% o 100%: raddoppio).

Aumenti percentuali...

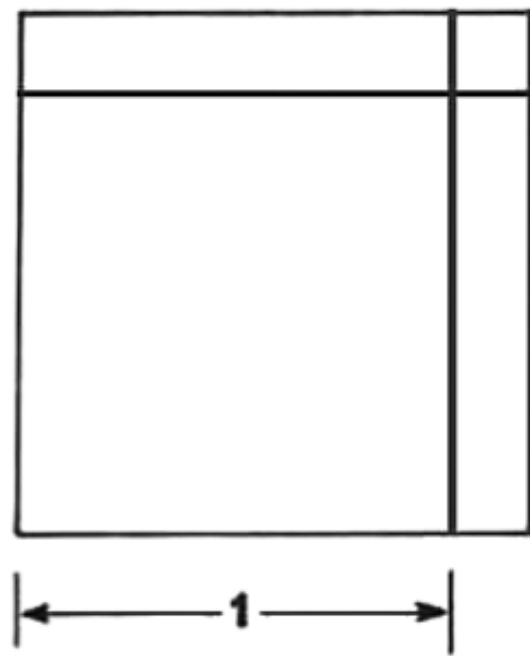
Vogliamo vedere quali aumenti di area e volume corrispondono a piccoli aumenti nelle lunghezze? Costruiamo la tabellina:

AUMENTO %										
in lunghezza	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
in area	2,01	4,04	6,09	8,16	10,25	12,36	14,49	16,64	18,81	21,00
in volume	3,03	6,12	9,27	12,48	15,75	19,08	22,47	25,92	29,43	33,10

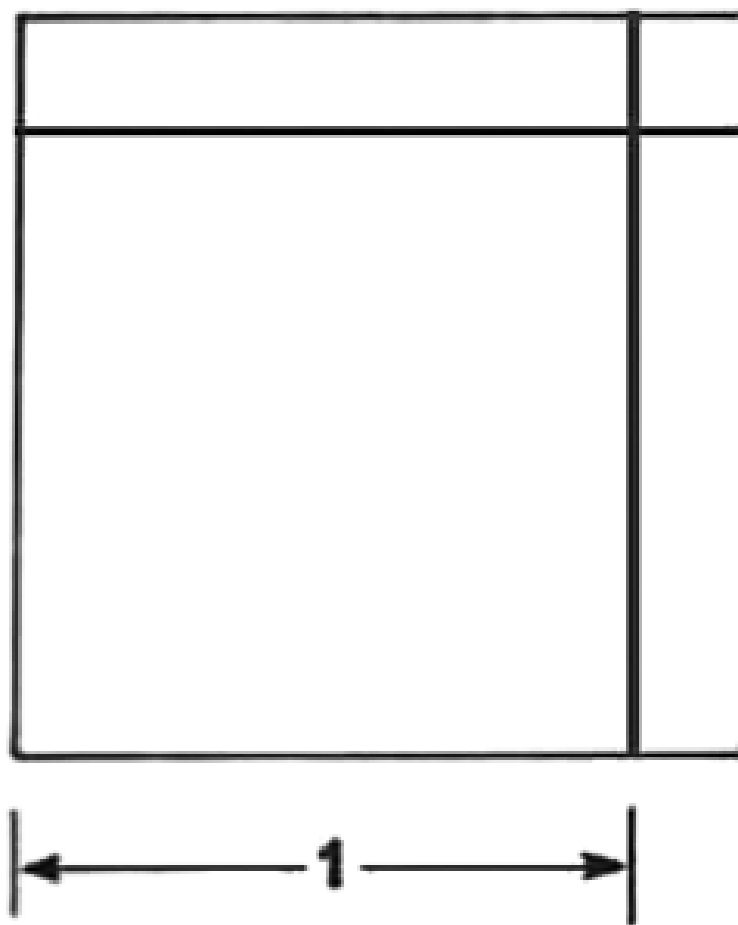
(Basta ad es. moltiplicare 1,01 per 1,01, e si ha 1,0201, e poi moltiplicare ancora per 1,01, e si ha 1,030301; gli aumenti sono perciò 2,01% e 3,0301% arrotondato a 3,03%; cfr. tabella, 1^a colonna).

Aumenti percentuali dell'area...

E perché avviene questo? La spiegazione è semplice, ed è cosa che servirà aver presente per molte ulteriori discussioni e applicazioni. Ci limitiamo a indicarla mediante le *figg. 6 e 7*: se prendiamo un quadrato, diciamo per semplicità di lato = 1, e aumentiamo il lato di a (cosicché diventerà $1 + a$), l'area aumenta dei due rettangoli allungati (in *fig. 6*), ciascuno dei quali ha area a (più il quadratino al loro incontro: ma è trascurabile se a è piccolo). Analogamente il cubo (*fig. 7*) si accresce di tre piastre (base 1×1 , spessore a , volume a), più (ma per a piccolo sono trascurabili) tre sbarrette e un cubetto (lungo gli spigoli e al vertice da completare) ⁽⁴⁾.



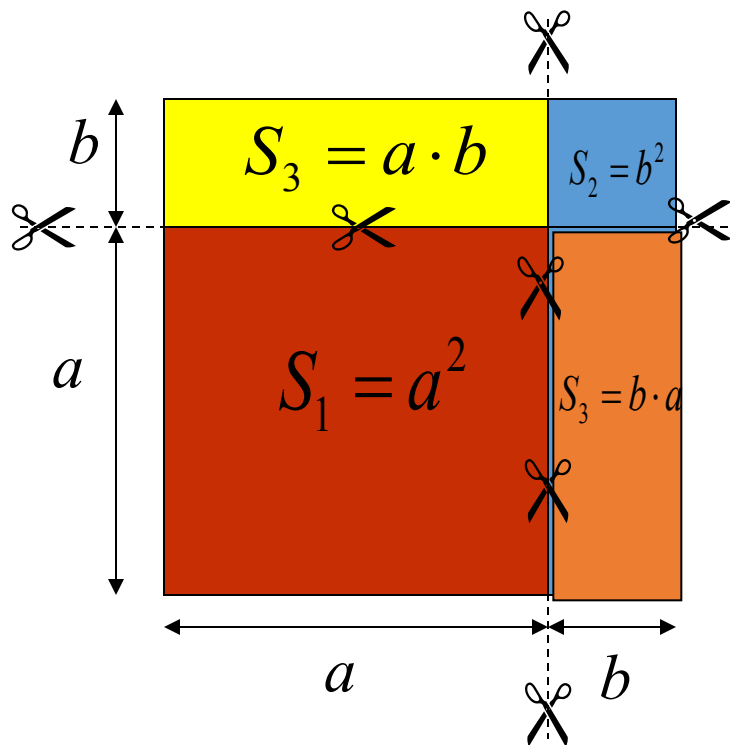
Aumenti percentuali dell'area...



$$(1 + a)^2 = (1 + a)(1 + a) = 1 + 2a + a^2 = \text{quadrato grande} + \text{due rettangoli} + \text{quadrato piccolo};$$

Quadrato di un binomio

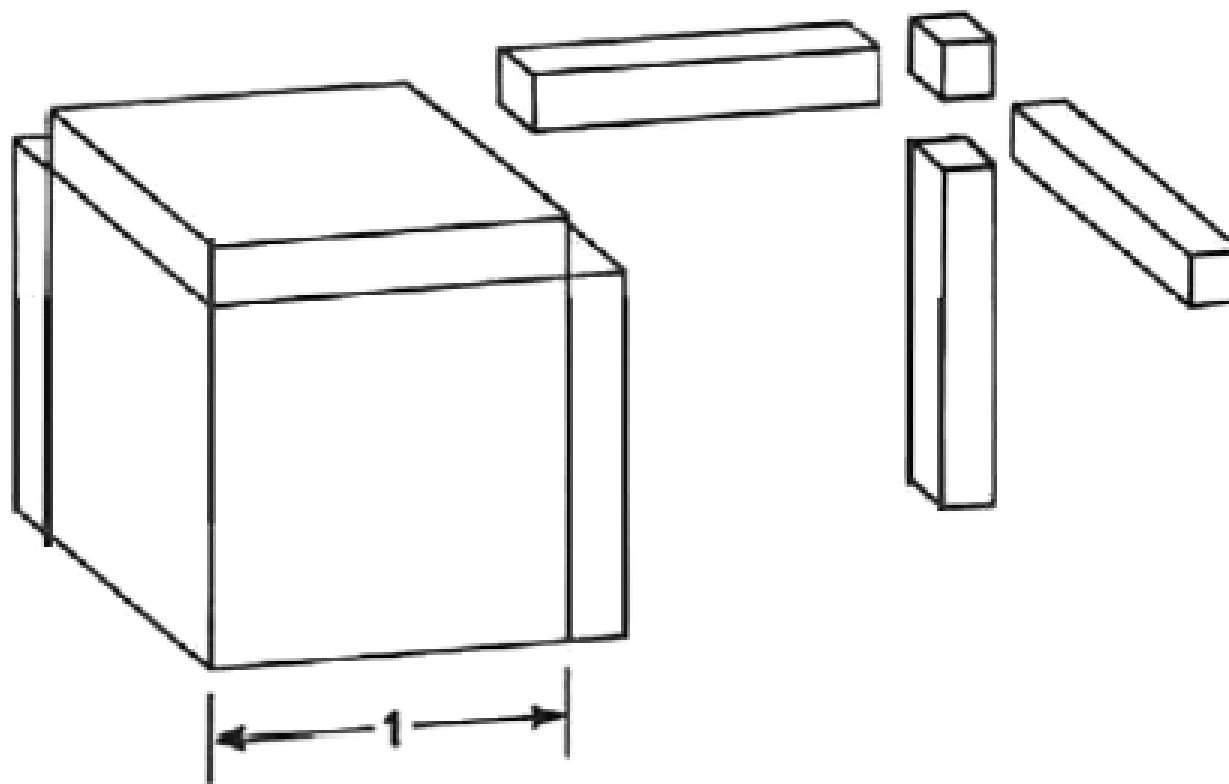
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



$$S = (a+b)^2$$

$$S = \boxed{a^2} + \boxed{b^2} + \boxed{ab} + \boxed{ab} = a^2 + b^2 + 2ab$$

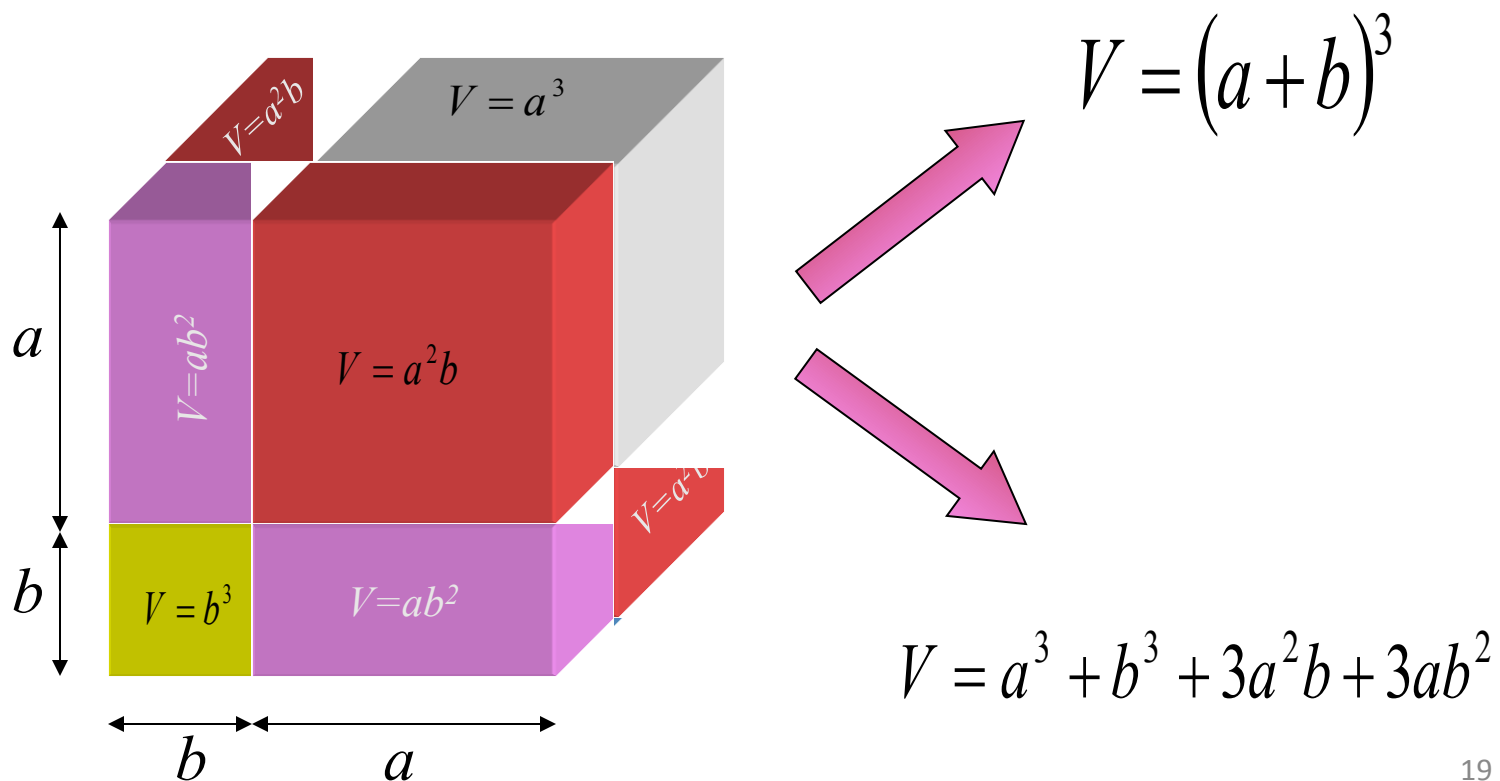
Aumenti percentuali del volume...



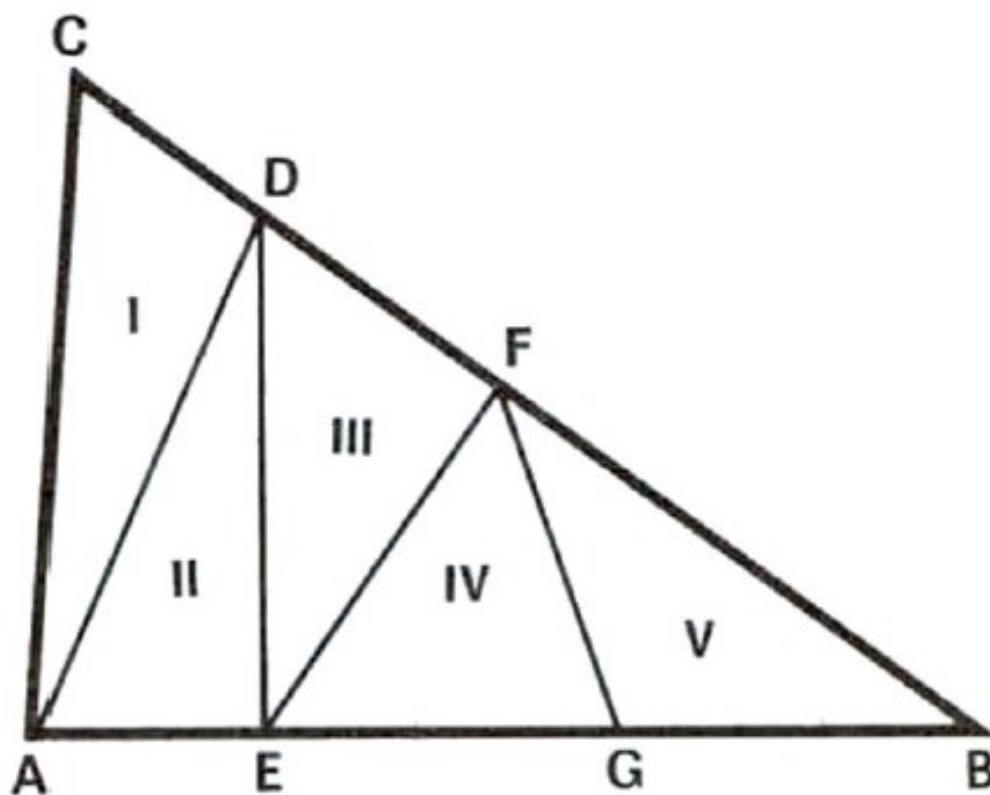
$$(1 + a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3 = \text{cubo grande} + \text{tre piastre} + \text{tre sbarrette} + \text{cubetto piccolo}$$

Cubo di un binomio

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



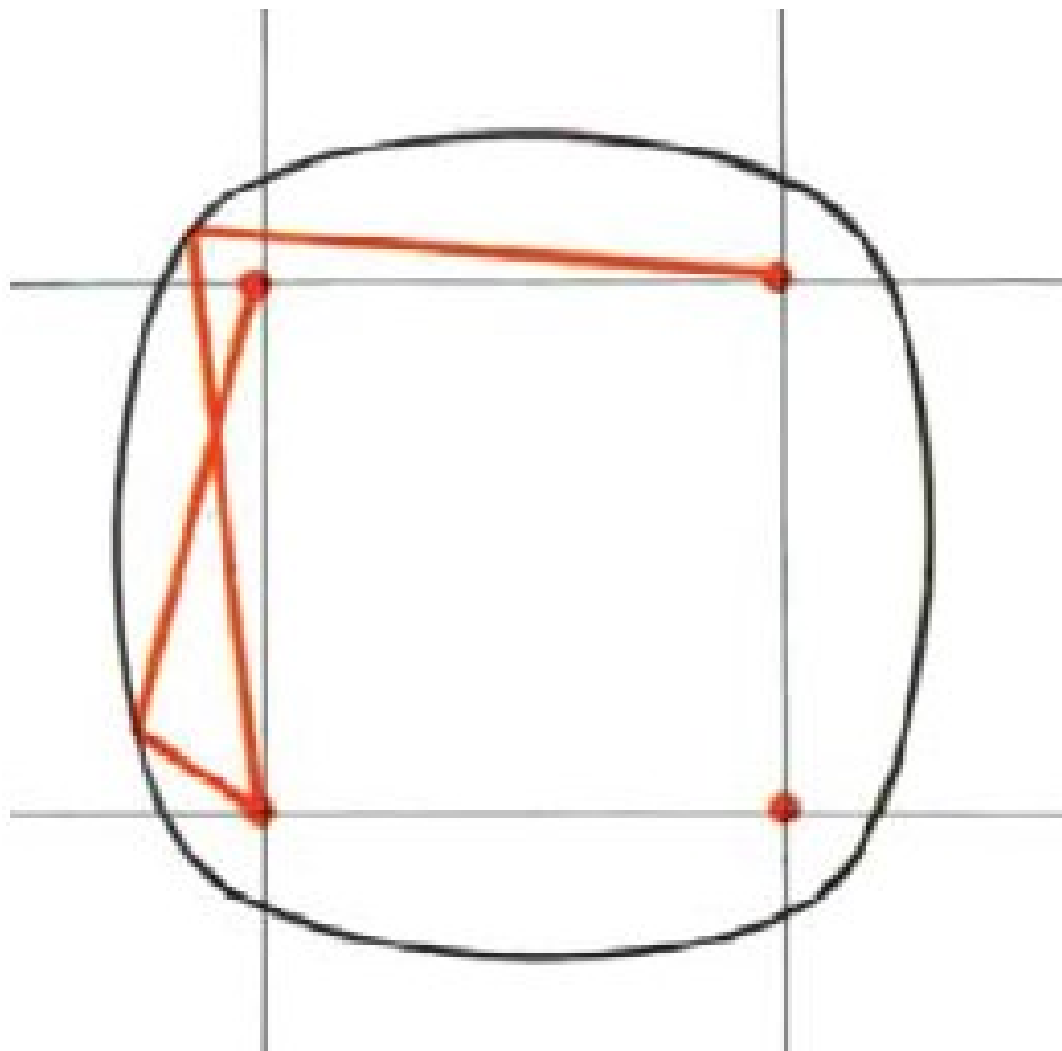
Dividere un triangolo in cinque parti equivalenti con una linea a “zig-zag”



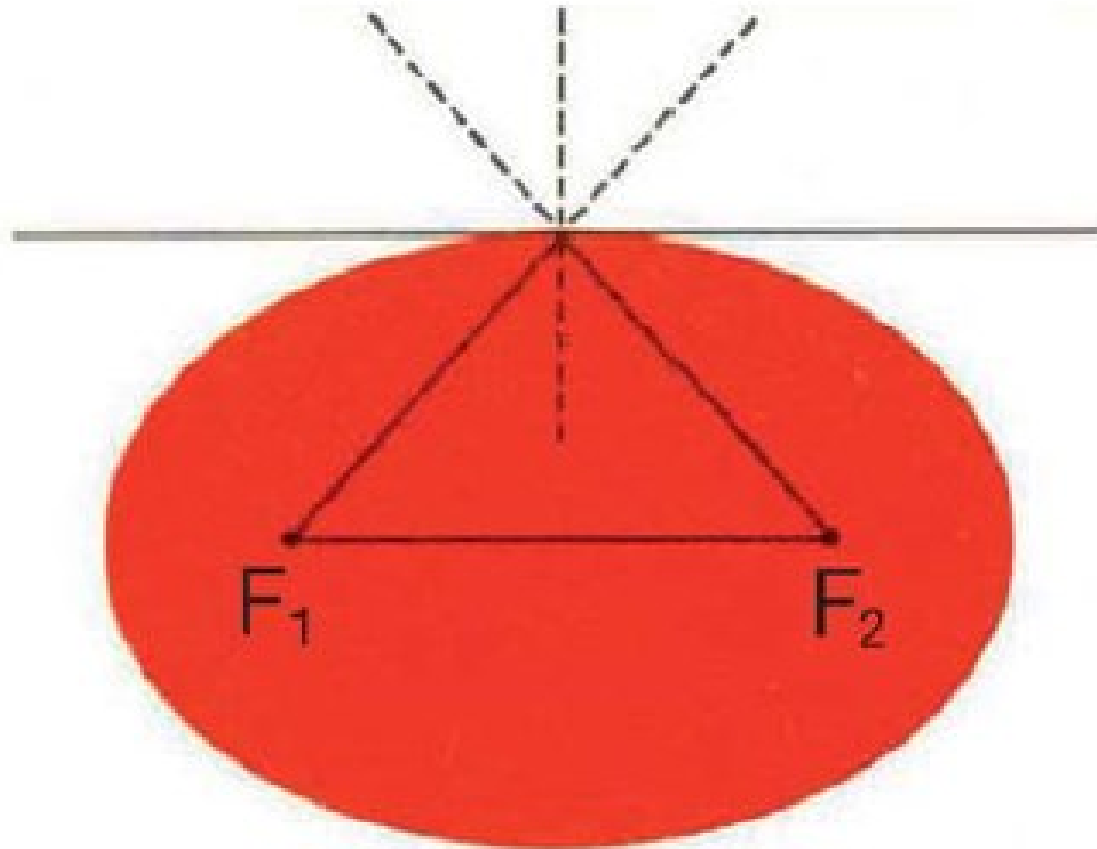
Capire significa collegare

Ripetiamo ancora la solita raccomandazione, di cui tutto quello che diciamo vuol mostrare quanto sia impellente. Bisogna assimilare e render valido ciò che la scuola dà, e che ciascuno può far sì di venirne arricchito anziché soffocato: basta che renda concrete le cose astratte fondendole con ciò che vede e che sa; che vivifichi con la riflessione attiva ciò che appare un sapere fossilizzato e pedantesco; che fonda in sintesi unitaria, con collegamenti e comparazioni, ciò che trova staccato e sminuzzato in campicelli che scriteriatamente ambiscono all'auto-sufficienza.

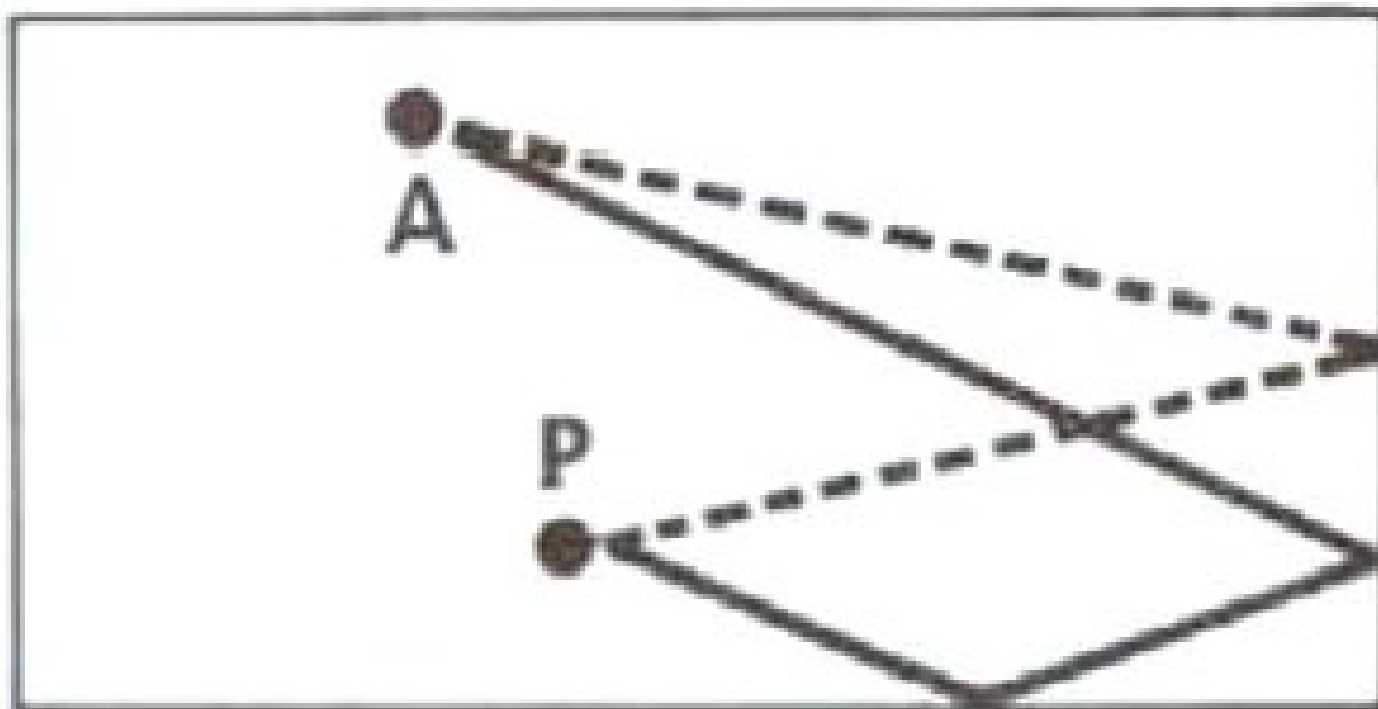
Un filo teso con 4 chiodi



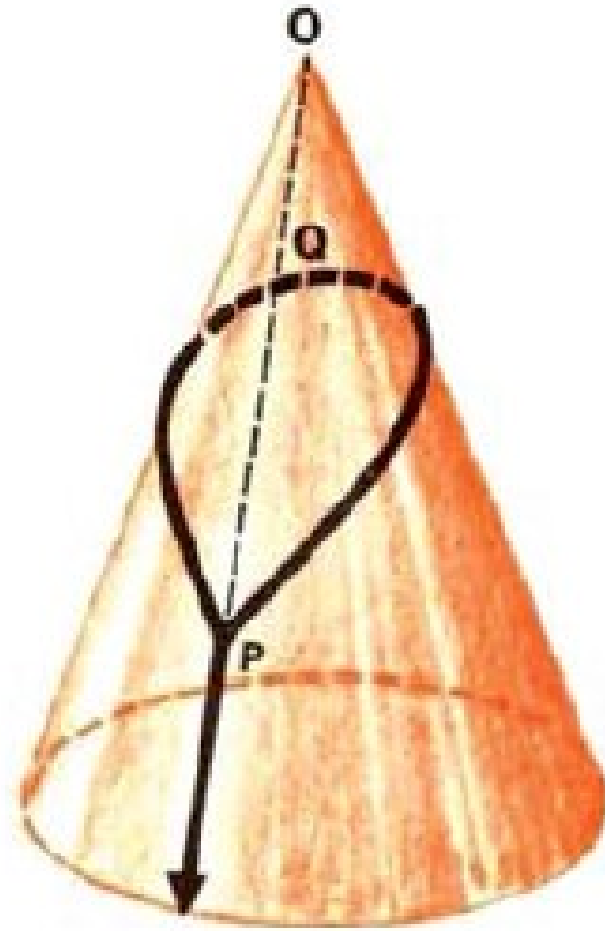
Un filo teso con 2 chiodi...



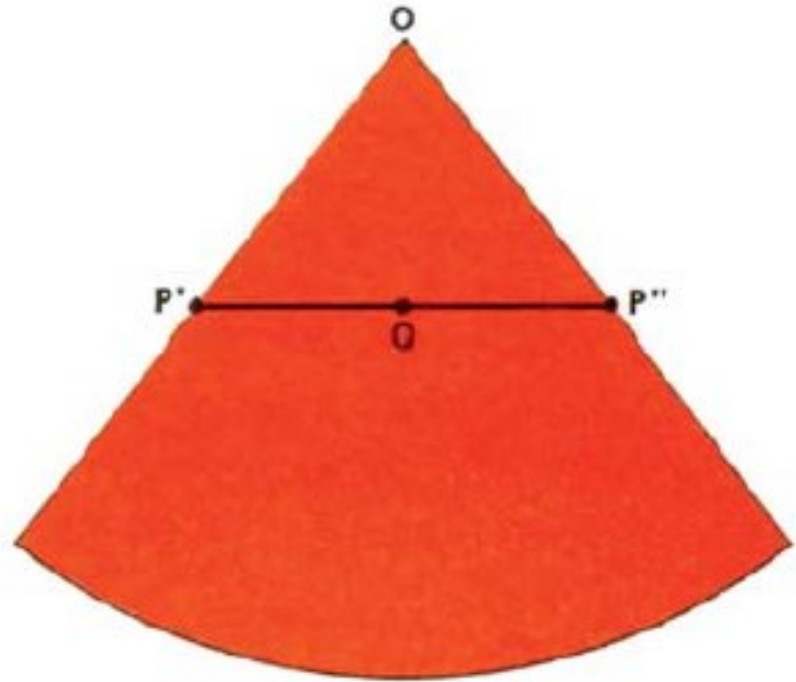
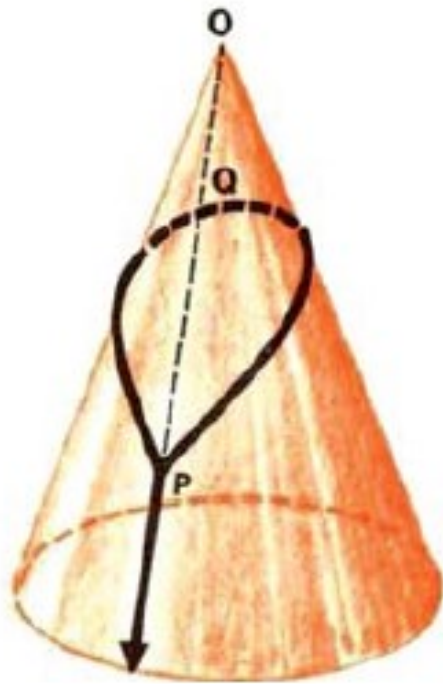
Un problema di biliardo con una
o due sponde (da A a P)



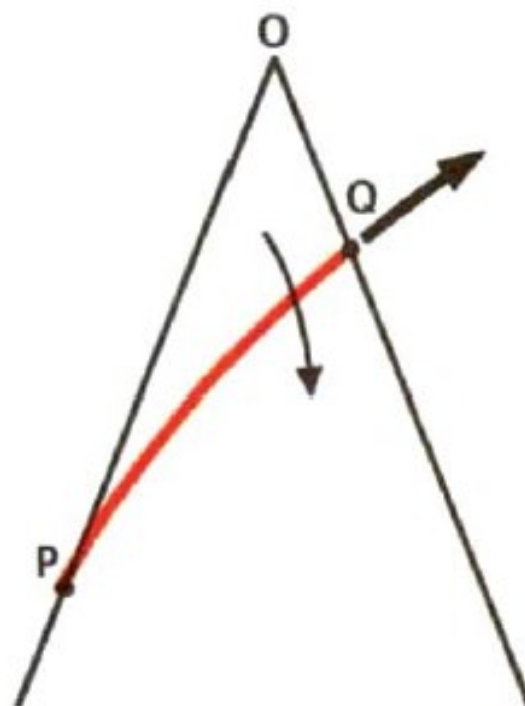
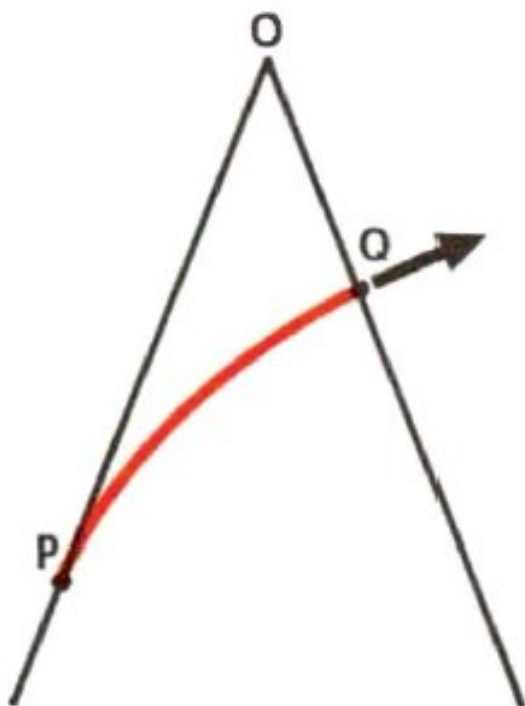
La linea più breve sulla superficie
di un cono



La linea più breve sulla superficie di un cono



Cosa sono le geodetiche?



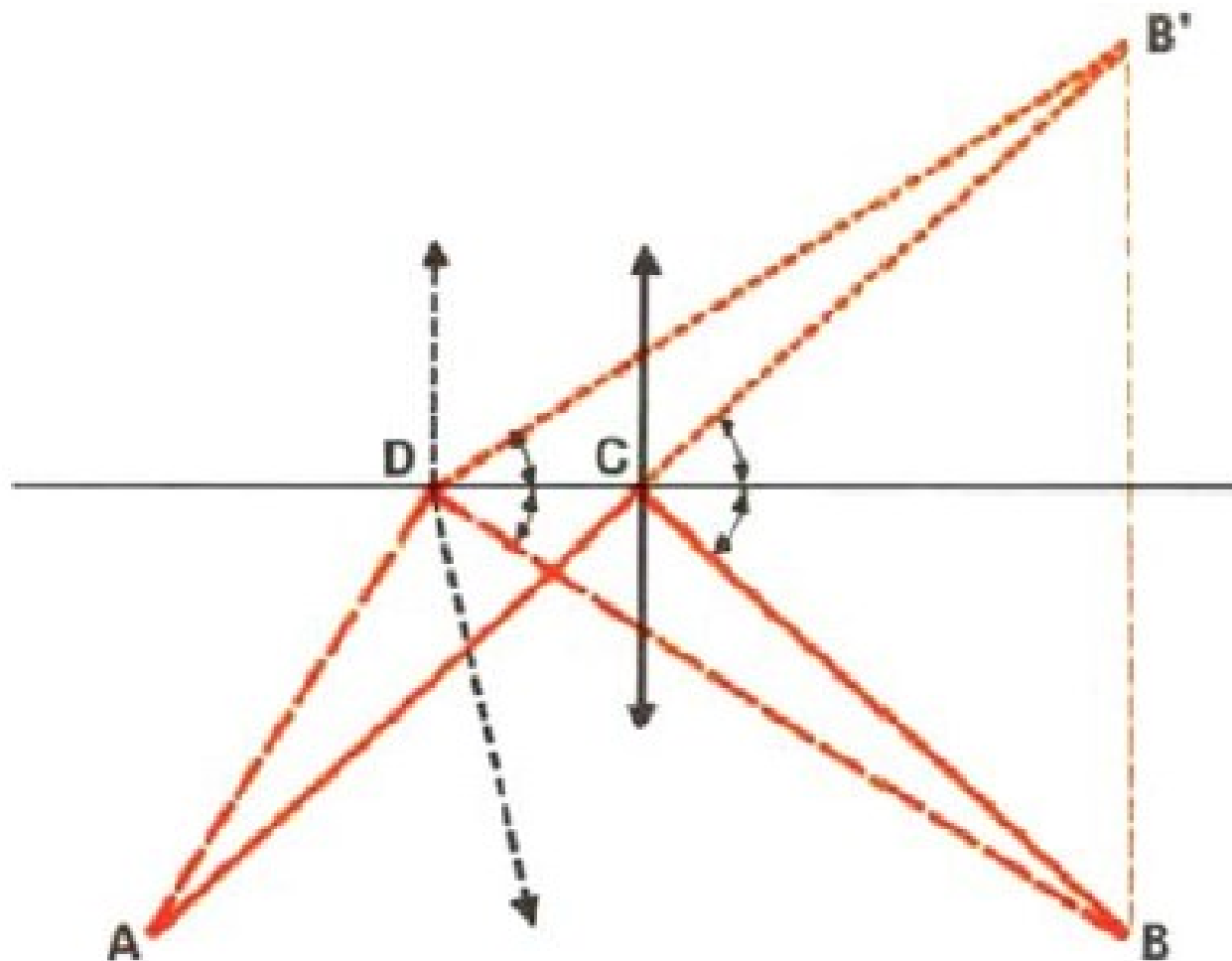
Le rotte aeree e le geodetiche



Le rotte aeree e le geodetiche



La linea più breve da A a B



Saper vedere gli aspetti economici

Antichi pregiudizi, duri a morire e facili a rispuntare con nuove parvenze, considerano pregevole la matematica soltanto se “pura”, coltivata come fiore di serra per nient'altro che una curiosità intellettuale. Spregevole soprattutto, e da tener ben distinta, sarebbe la matematica intesa alle applicazioni economiche, strumento dei mercatanti, e poco meno quella applicata alle altre scienze, all'ingegneria, alla tecnica. Eppure la matematica apparirebbe ben povera, e al limite vuota, privandola di tutto ciò che stiamo presentando nell'intento di far apprezzare la fecondità degli stimoli che, attraverso la molteplicità e ricchezza d'interpretazioni concrete, esercita sulle nostre facoltà di pensare.

Gli aspetti economici e la matematica

Oltre che applicarsi a problemi economici, la matematica ha finalità economica di per sé in quanto è ricerca degli strumenti più adatti per ogni problema, e del modo migliore per sistemarli e presentarli. Del resto tutta la scienza ha (soprattutto nel pensiero di Mach, Vailati, Dewey, ecc.) la finalità “economica” di fornirci la più semplice e comoda teorizzazione di quanto ci circonda.

Gli aspetti economici e la matematica

Conviene ribassare il prezzo?

Supponiamo che un'impresa, che vende giornalmente 300 unità di un suo prodotto con guadagno unitario di Lire 2000, sappia che le vendite aumenterebbero di un'unità in più per ogni 5 lire di diminuzione del prezzo (e quindi del guadagno). Conviene diminuire il prezzo? o aumentarlo? o lasciarlo immutato?

Geometricamente, il ragionamento applicato si basa sul fatto che fra i rettangoli di ugual perimetro il quadrato è quello di area massima; nel n. 9, e poi nel n. 11, insieme a tale fatto geometrico, mostreremo il nesso col presente problema.

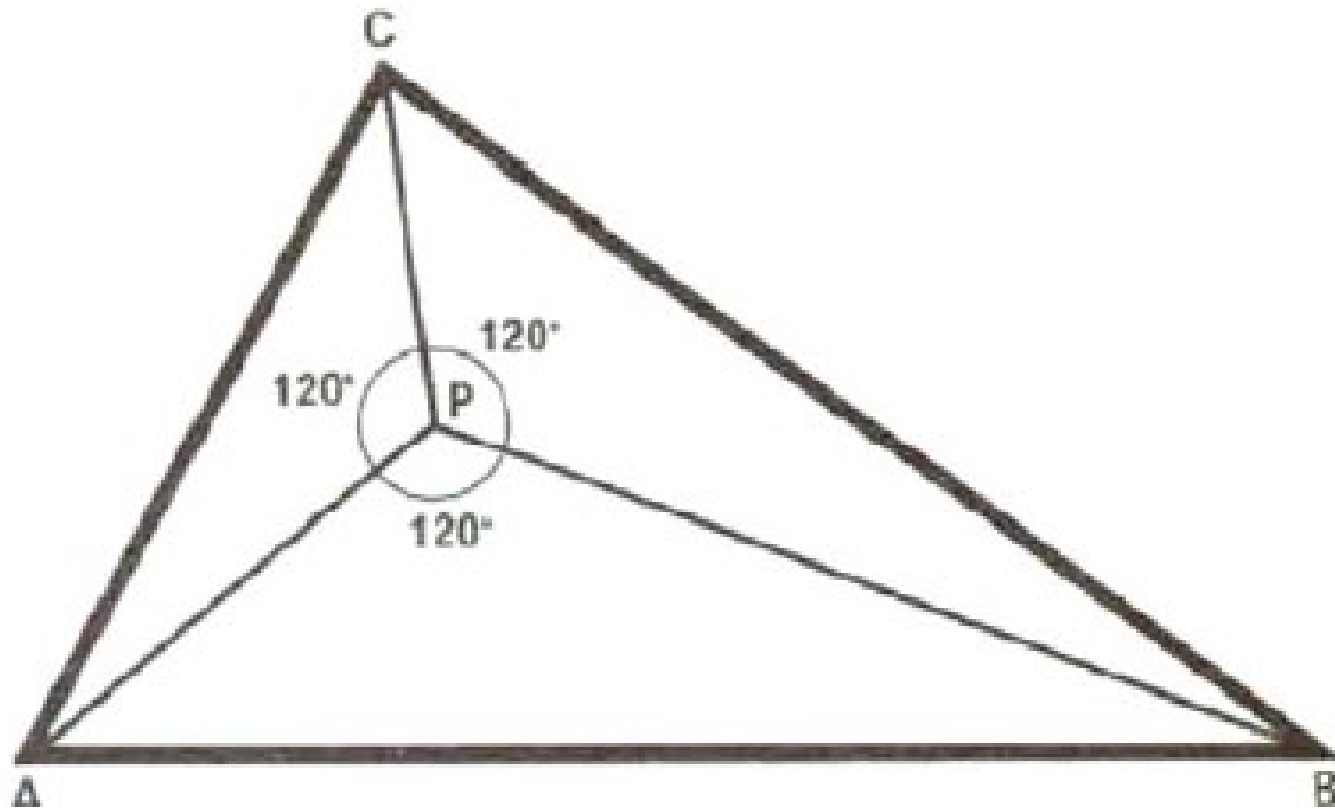
Gli aspetti economici e la matematica

Conviene ribassare il prezzo?

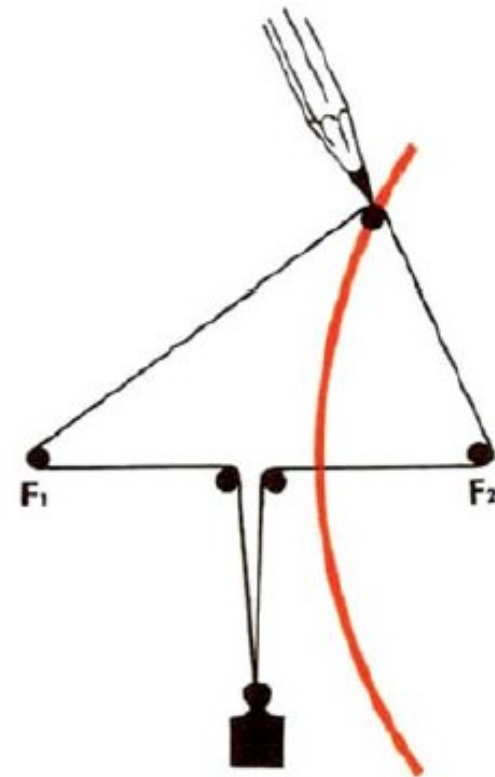
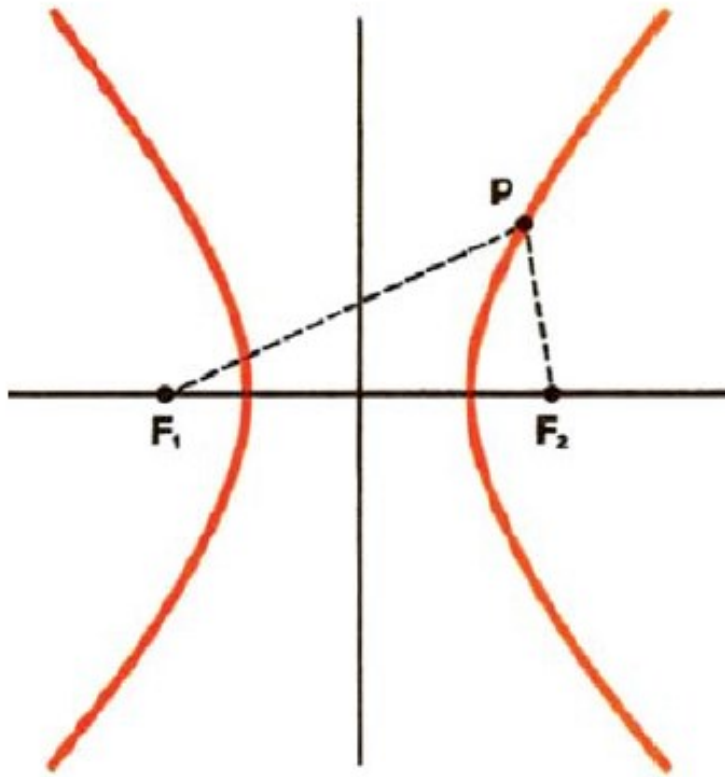
Supponiamo che un'impresa, che vende giornalmente 300 unità di un suo prodotto con guadagno unitario di Lire 2000, sappia che le vendite aumenterebbero di un'unità in più per ogni 5 lire di diminuzione del prezzo (e quindi del guadagno). Conviene diminuire il prezzo? o aumentarlo? o lasciarlo immutato?

Geometricamente, il ragionamento applicato si basa sul fatto che fra i rettangoli di ugual perimetro il quadrato è quello di area massima; nel n. 9, e poi nel n. 11, insieme a tale fatto geometrico, mostreremo il nesso col presente problema.

Come abbreviare la strada? Dove mettere la scuola per 3 paesi?



Fili tesi e iperboli...



Perché servirsi di formule?

Per apprezzare le formule e il tipo di calcoli che consentono non c'è che capire a cosa servono, convincersi che è utile o anche necessario farne uso, comprendere in che modo conviene pensarne il significato, onde farle apparire un modo appena diverso di scrivere le stesse cose che già ci sono familiari. Ci limitiamo qui alle cose più elementari, ossia alla prima introduzione del “calcolo letterale” con qualche cenno introduttivo a conseguenze che potrebbero seguire subito; come “spirito”, le stesse osservazioni sono appropriate quasi ovunque; cenni su argomenti più avanzati si troveranno nel n. 14.

Il rettangolo più grande

Di più, un risultato generale anche semplicissimo, come quello ora usato, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, non solo condensa tutte le infinite identità numeriche cui dà luogo se diamo ad a e b valori ad arbitrio, ma può aiutare a vedere conclusioni importanti. Detta formula mostra ad es. che *il quadrato è, fra i rettangoli di ugual perimetro, quello di area massima*: dal quadrato $a \times a$ si ottengono infatti rettangoli di ugual perimetro aumentando un lato e diminuendo l'altro di una stessa lunghezza b , ma $(a + b) \times (a - b)$ vale a^2 diminuito di b^2 , ossia è sempre minore di a^2 .

Il rettangolo più grande (tra quelli di ugual perimetro)

La fig. 29 rende più chiara la cosa graficamente, ma le due forme non si escludono anzi si integrano: la formula infatti si deduce e si applica più direttamente, ma in compenso la figura ci preserva dal rischio di farlo macchinalmente senza assimilare il senso attraverso l'intuizione. Il che sarebbe come sfruttare la maggiore possibilità di viaggi offerta dall'automobile, non per vedere più cose e con più agio, bensì per attraversare paesi e paesi a gran velocità senza vedere nulla.

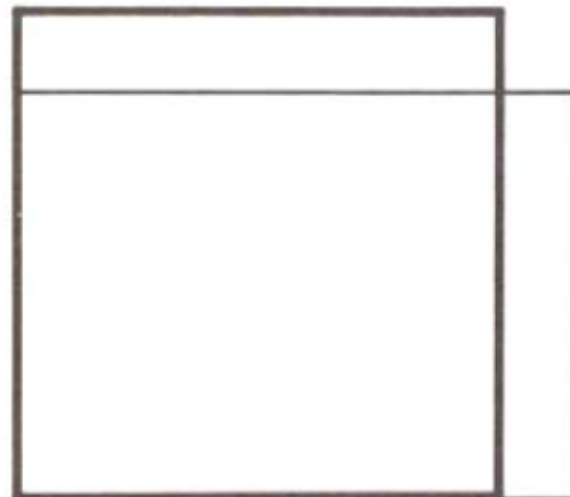


Figura 29

Il rettangolo più grande

La stessa conclusione, in forma solo apparentemente diversa, si può esprimere dicendo (v. fig. 30) che, fra tutti i rettangoli con due lati sui cateti e un vertice sull'ipotenusa del triangolo rettangolo OAB, ha area massima quello con vertice nel punto di mezzo, C.

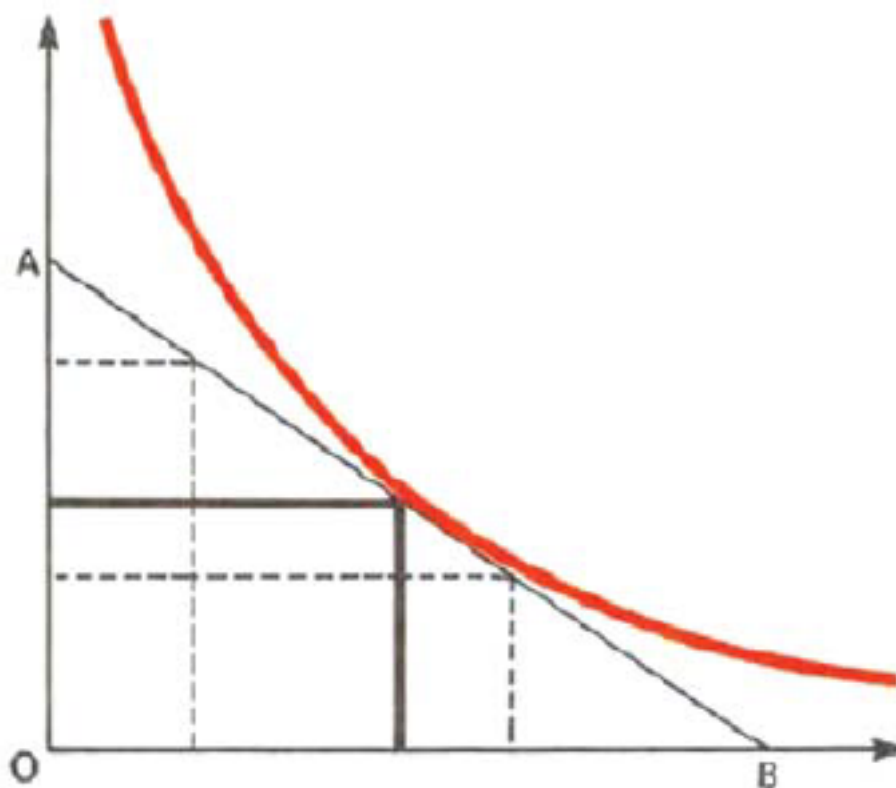


Figura 30

Come sfruttare una visione dinamica

La visione dinamica permette, per così dire, di “ultravedere”! Niente paura per questo parolone, “ultravedere!”, introdotto qui a titolo un po’ scherzoso: si tratta, sì, di cosa importante e seria, ma – anche se in un certo senso si collega a qualche concetto teorico – rimane sempre e soltanto un aspetto della solita esigenza, di saper vedere in forma intuitiva appropriata.

Come sfruttare una visione dinamica

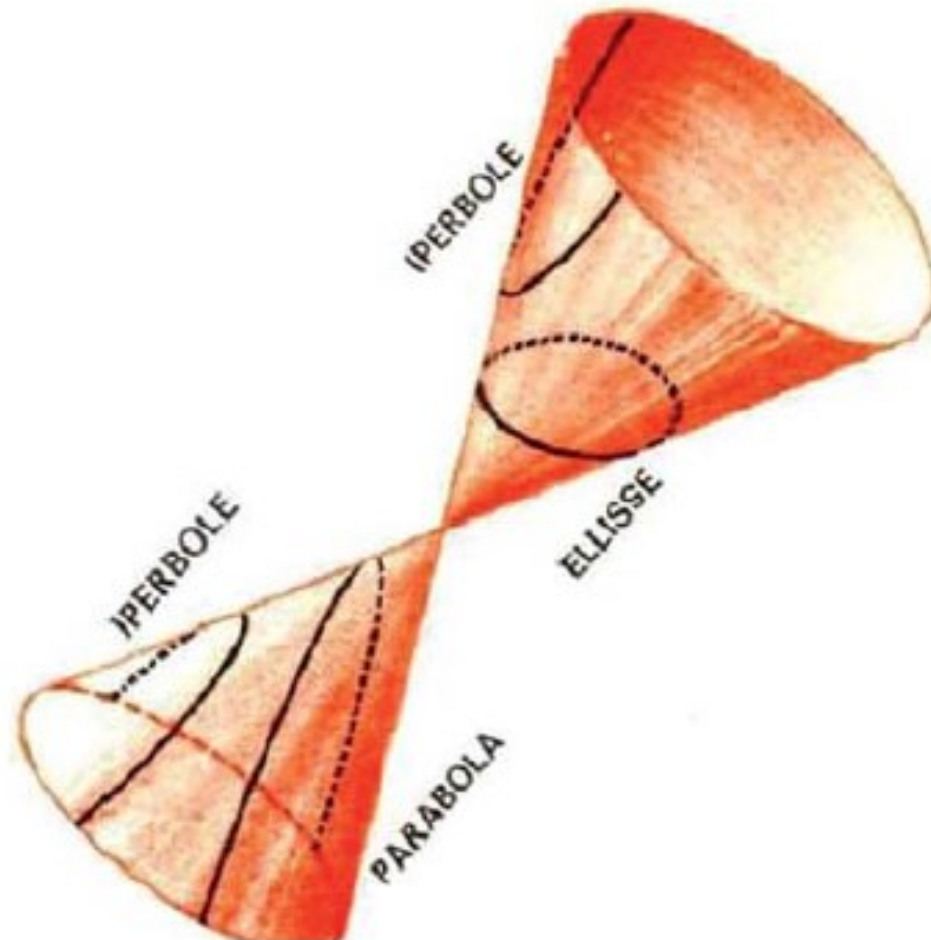
Si tratta, in fondo, di un concetto economico (se non si ha paura dei preconcetti contro tale termine): economico nel senso del massimo rendimento in termini di efficacia del pensiero, di massimo risultato col minimo sforzo. Non secondo la mentalità ispirata alla pigrizia e che risulta quasi sempre miope e sbagliata, ma secondo quella di chi è sospinto dall'anelito a conoscere ed agire e tanto più prende slancio e fiducia man mano che riesce, progredendo, a dominare con maggior facilità e immediatezza panorami più vasti e più nitidi.

Coniche dovunque

La ricerca del massimo (oltre che con la considerazione precedente, del rettangolo xy) si può vedere anche come ricerca del massimo della funzione $x y$ che dà il guadagno totale:

$$\begin{aligned} x y = x f(x) &= x (700 - x/5) = x (3500 - x)/5 = -x^2/5 + 700 x = \\ &= \frac{1}{5} [1750^2 - (x - 1750)^2] \end{aligned}$$

Coniche dovunque

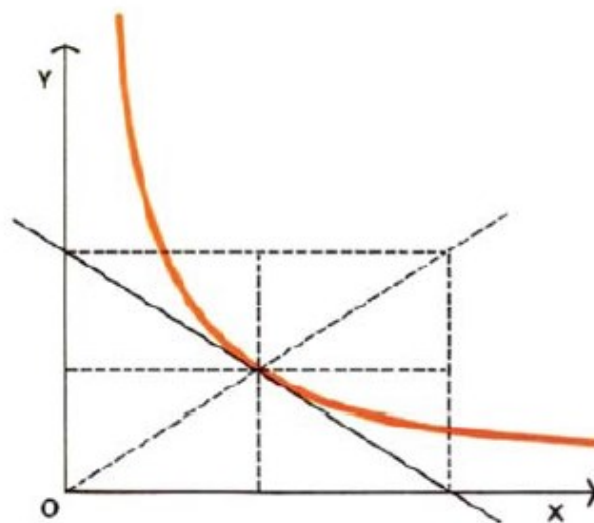
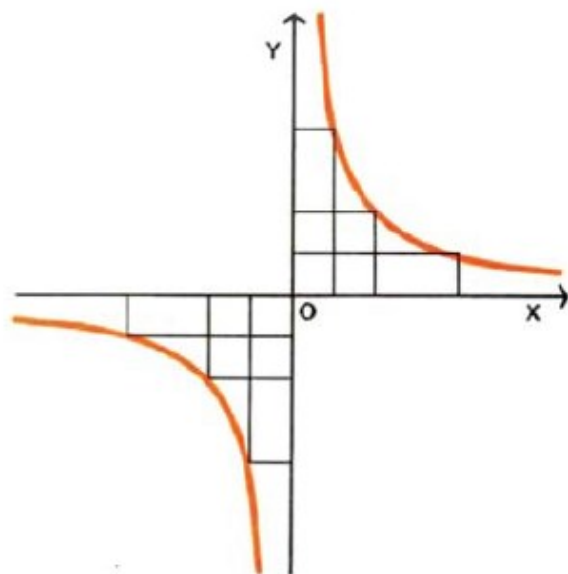


Coniche dovunque

Anche l'iperbole merita di essere menzionata come diagramma di una funzione semplice e importante:

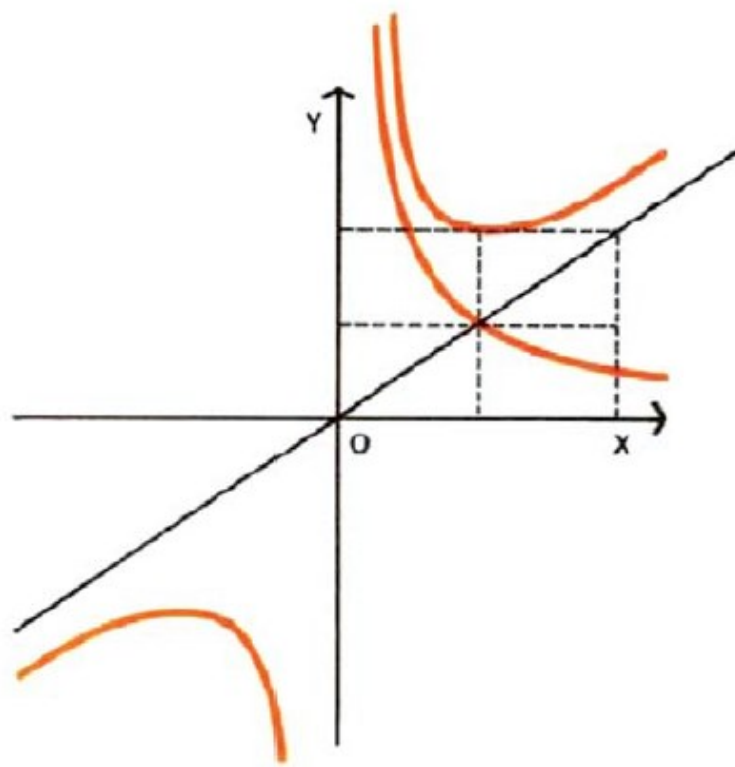
$$y = f(x) = 1/x$$

(nella posizione indicata nella *fig. 35*); tutti i rettangoli di area $xy = 1$ appoggiati agli assi con un vertice in O hanno il vertice opposto su tale iperbole (fatto che la prof. Castelnovo fa opportunamente apparire sperimentalmente collocando in tal modo molti rettangoli di area uguale e forma diversa ritagliati dai singoli alunni).



Coniche anche per le scorte di magazzino...

In qualche applicazione interessante si presenta una combinazione di questi due casi: ad es., al variare del livello medio delle scorte (di merce in magazzino, alto o basso a seconda che si fanno grossi acquisti per periodi lunghi oppure acquisti piccoli in istanti ravvicinati), alcuni fattori di costo crescono in proporzione diretta ed altri in proporzione inversa a tale livello. Il diagramma del costo complessivo (del tipo $y = ax + c/x$) è ancora un'iperbole, ma nella posizione indicata in *fig. 37* (curva in alto).



Il “saper vedere” in matematica

- Lo si può apprendere?
- Lo si può insegnare?
- Che ruolo possono avere le tecnologie oggi per realizzare questo?
- Oggi le tecnologie possono dare un aiuto formidabile per la visualizzazione di oggetti e concetti matematici
- Ma devono essere integrate nella didattica e ci vuole un insegnante che le sappia usare al momento opportuno, con un preciso progetto didattico.

Una didattica per il “saper vedere” in matematica

- Usando ad esempio un software di matematica dinamica, gli allievi imparano... a usare il software.
- Avviene il transfer cognitivo verso la matematica?
- Su questo occorre una riflessione didattica
- Quale insegnamento può arrivare al «saper vedere» in Matematica?
- Il «vedere» in Matematica, come nell'Arte, dipende dalla nostra cultura matematica e questo vale anche per gli allievi.
- Deve essere collegato alla risoluzione di problemi e ad una didattica di tipo laboratoriale (che usi i software, ma anche le mani e tutti gli strumenti del laboratorio di matematica).

Bibliografia e sitografia

- *La Matematica nella società e nella cultura*, Rivista dell'UMI, Dicembre 2015, numero 3, vol. VIII, dedicato a Bruno de Finetti (a cura di G. Anichini, L. Giacardi, E. Luciano), *Dalla realtà, nella realtà, per la realtà*. Riporta il testo de *Il «saper vedere» in matematica*.
- Lettera Matematica PRISTEM 61
Un ritratto di Bruno de Finetti, a cura di G. I. Bischi.
- Il sito dedicato a de Finetti:
<http://www.brunodefinetti.it/>
- De Finetti sulla Wikipedia:
[http://it.wikipedia.org/wiki/Bruno de Finetti](http://it.wikipedia.org/wiki/Bruno_de_Finetti)
- Vedi su Polymath la pagina dedicata a Bruno de Finetti:
<https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/DOCUMENT/DeFinetti/DeFinetti.htm>

Grazie per l'attenzione!

Luigi Tomasi

luigi.tomasi@unife.it